SEDU 2026

Rotinas Pedagógicas Escolares

2ª Série

Primeiro Trimestre

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Gerência de Currículo
da Educação Básica

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Governador
JOSÉ RENATO CASAGRANDE

Secretário de Estado da Educação
VITOR AMORIM DE ANGELO

Subsecretária da Educação Básica e Profissional
ANDRÉA GUZZO PEREIRA

Gerente de Currículo da Educação Básica
ALEIDE CRISTINA DE CAMARGO

Subgerente de Desenvolvimento Curricular da Educação Básica
MARCOS VALÉRIO GUIMARÃES

Subgerente de Educação Ambiental
ALDETE MARIA XAVIER

2026

Coordenador-geral das Rotinas Pedagógicas Escolares
MARCOS VALÉRIO GUIMARÃES

Coordenadores do componente curricular
GABRIEL LUIZ SANTOS KACHEL
LAIANA MENEGUELLI
RAYANE SALVIANO DE OLIVEIRA SILVA
WELLINGTON ROSA DE AZEVEDO
WILLIAM MANTOVANI

Validadores das Rotinas Pedagógicas Escolares
JÉSSICA MONTEIRO FALQUETTO
THIAGO CÉZAR DE PÁDUA ROSA
ORGANDI MONGIN ROVETTA
CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

Professores bolsistas responsáveis pela elaboração das Rotinas Pedagógicas Escolares

5º ano EF
FRANCIELY GOMES FAVERO FERREIRA
PAULA AVAREZ CABANÊZ
SILVANA COCCO DALVI

6º ano EF
KARLA SOUTO DE AMORIM
MAYARA DOS SANTOS ZANARDI

7º ano EF
DAVI MARCIO BERMUDES LINO
HELIONARDO THOMAZ ALVES LOURENÇO

8º ano EF
NAFTALY CRISTAL FÉLIX
FABIANA BUENO

9º ano EF
AMECKSON DE SOUZA FERREIRA
LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO

1ª série EM
ANATIELLI LEILIANE PEREIRA SANTANA
FABRÍCIO OLIVEIRA SOUZA

2ª série EM
HAROLDO CABRAL MAYA
SEBASTIÃO ALMEIDA MOTA

3ª série EM
HIGOR SOARES MAJONI
MAURÍCIO DE OLIVEIRA CELERI

Sumário

Apresentação

Organização do Material 05
Avaliação de Monitoramento da Aprendizagem (AMA) 06

CAPÍTULO 1 - Potenciação, função exponencial e progressão geométrica

Material Extra 08
Potenciação (Gabarito) 10
Função exponencial (Gabarito) 14
Conexão Enem (Gabarito) 17
Gráfico da função exponencial (Gabarito) 18
Aplicações de funções exponenciais (Gabarito) 23
Sequências: progressão geométrica (Gabarito) 26
Conexão Enem (Gabarito) 29
Soma dos termos de uma P.G. (Gabarito) 30
Conexão Enem (Gabarito) 34

CAPÍTULO 2 - Logaritmo e função logarítmica

Material Extra 36
Logaritmo (Gabarito) 40
Função logarítmica (Gabarito) 43
Conexão Enem (Gabarito) 47
Gráficos da função logarítmica (Gabarito) 48
Função logarítmica como inversa da função exponencial (Gabarito) 55

Organização do material

Prezado(a) professor(a), a presente apostila apoia o desenvolvimento do percurso curricular de Matemática do 1º trimestre de 2026, previsto para os(as) estudantes da 2ª série do Ensino Médio das escolas da rede estadual do Espírito Santo.

Este volume está dividido em ***dois capítulos***. As habilidades e respectivos descritores do PAEBES* contemplados em cada capítulo estão expostos no quadro a seguir. Para um detalhamento deste percurso curricular, incluindo as expectativas de aprendizagem das habilidades, consulte o documento de Orientações Curriculares de Matemática do Ensino Médio, disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/ .

Capítulo 1: Potenciação, Função Exponencial e Progressão Geométrica

Habilidade	Descritor(es) do PAEBES
EF09MA03/ES Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários e decimais (radiciação).	Não há descritor alinhado.
EM13MAT304 Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	D074_M Corresponder as representações algébrica e gráfica de uma função exponencial. D088_M Utilizar função exponencial na resolução de problemas.
EM13MAT508 Identificar e associar Progressões Geométricas (PG) a Funções Exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	D097_M Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.

*Programa de Avaliação da Educação Básica (Paebes): Avalia o progresso dos(as) estudantes ao final de cada etapa de ensino (Ensino Fundamental – Anos Iniciais e Anos Finais, Ensino Médio). Por ser uma avaliação somativa, o Paebes é uma importante ferramenta para o planejamento de ações pedagógicas, fornecendo indicadores que orientam a implementação, reformulação e monitoramento de políticas educacionais voltadas à promoção da equidade e qualidade da educação no Espírito Santo.

Capítulo 2: Logaritmo, Função Exponencial e Função Logarítmica

Habilidade	Descritor(es) do PAEBES
EM13MAT305 Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	Não há descritor alinhado.
EM13MAT403 Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	D088_M Utilizar função exponencial na resolução de problemas. D080_M Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

Avaliação de Monitoramento da Aprendizagem (AMA)

Aplicada trimestralmente, essa avaliação permite o acompanhamento contínuo do desempenho dos(as) estudantes nos componentes de Língua Portuguesa e Matemática. A AMA subsidia a preparação para as avaliações externas, como o Saeb e o Paebes, além de contribuir para a identificação e recuperação das fragilidades de aprendizagem em cada trimestre letivo.



Os descritores abordados no Capítulo 1 da presente apostila **estão previstos** para compor a Matriz de Referência da 1ª edição da AMA de 2026.

Dessa forma, Professor(a), o planejamento das aulas e a gestão do tempo são imprescindíveis no sentido de que sejam oferecidas aos(às) estudantes oportunidades de desenvolvimento das habilidades constantes no Capítulo 1 antes do período de aplicação da avaliação.

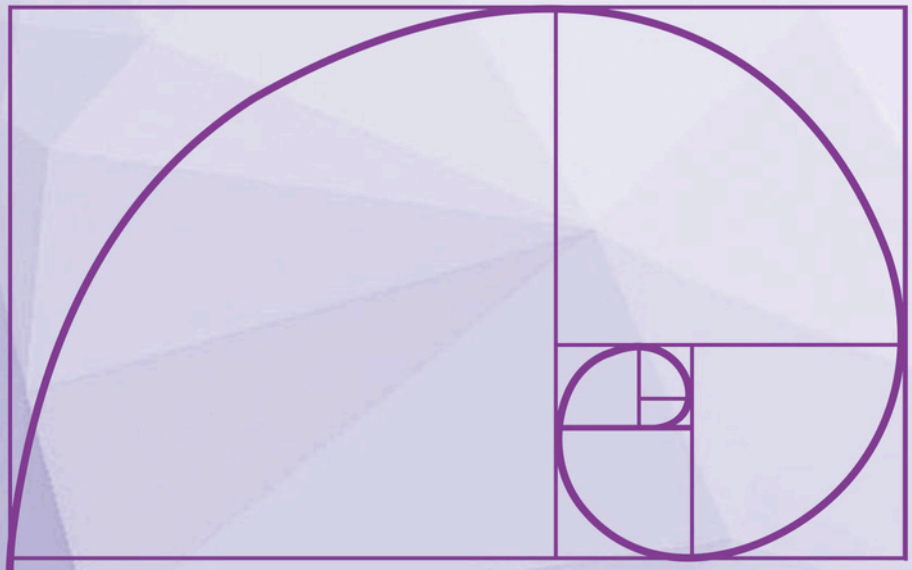
Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica



Capítulo 1: Potenciação, Função Exponencial e Progressão Geométrica

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 1: Função exponencial.

- Ampliando a ideia de função exponencial. (p. 48 - 52)

Matemática em Contexto: estatística e matemática financeira. (DANTE).

Capítulo 2: Matemática financeira.

- Juros compostos. (p. 109 - 115);
- Conexão entre juros e funções (p. 123 - 125).



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 2: função exponencial.

- Equações exponenciais. (p. 64 - 65);
- Conexões - Radioatividade (p. 74).

Prisma Matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas. (BONJORNO)

Capítulo 2: porcentagem e juros.

- Juros. (p. 73 - 77);
- Juros e funções (p. 78 - 81).

PDF AUXILIAR

Equações Exponenciais

Prezado professor, prezada professora:
Não é objetivo deste material discutir sobre equações exponenciais. Contudo, entendemos que para resolver problemas utilizando funções exponenciais, eventualmente, precisamos recorrer a equações desse tipo. Assim, sugerimos, como algo opcional, este material auxiliar. Além dele, há uma tarefa complementar, também opcional.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE)

Capítulo 3: Sequências.

- Sequências. (p. 110 - 113)
- Progressão geométrica. (p. 133 - 141)



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 4: progressões.

- Introdução. (p. 118 - 119);
- Sequências. (p. 119 - 122).
- Progressão geométrica (p. 132 - 134)

VÍDEOS

Portal da OBMEP
Progressões Geométricas

Professor(a),
nesse link você encontra três vídeos sobre Progressão Geométrica. Eles podem ser um suporte para o estudo do aluno, caso considere necessário.

HISTÓRIA



HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Texto:
Paradoxo da dicotomia de Zenão
Página 147

Professor(a),
no livro indicado você encontrará um texto com duas discussões que podem ser feitas com os alunos e que ajudam a refletir sobre o conceito de infinito.

POTENCIAÇÃO

ATIVIDADE 1

a) Temos 4 automóveis com quatro rodas em cada um e em cada roda há 4 parafusos. Logo, o total de parafusos é de: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ parafusos.

b) $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}} = a^n$

ATIVIDADE 2

a) $9 \cdot 9 = 81$

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

c) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$

d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

e) $(-7) \cdot (-7) = 49$

f) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

g) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

h) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

i) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$

j) $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$

k) $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -64$

l) $13 \cdot 13 = 169$

ATIVIDADE 3

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$

c) $0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027$

d) $3,5 \cdot 3,5 = 12,25$

e) 1

f) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{81}{2401}$

g) $2,4 \cdot 2,4 = 5,76$

h) $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 2,0736$

i) $\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$

j) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$

k) $17,1 \cdot 17,1 = 292,41$

l) $0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064$

ATIVIDADE 4

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

b) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

e) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

f) $\left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$

g) $\left(\frac{5}{2}\right)^1 = \frac{5}{2}$

h) $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$

i) $\left(\frac{9}{1}\right)^3 = 9^3 = 729$

j) $\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{216}{343}$

k) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$

l) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$

ATIVIDADE 5

a) $\sqrt{81} = 9$

b) $\sqrt{9^3} = 27$

c) $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

d) $\sqrt[4]{16} = 2$

e) $121^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121} = 11$

f) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$

g) $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

h) $\left(\frac{36}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

i) $\left(\frac{144}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

j) 1

k) $\left(\frac{27}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{3}{10}$

l) $\frac{\sqrt[4]{16^3}}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{8}{27}$

ATIVIDADE 6

a) 100

b) 1 000

c) 100 000

d) 10 000

e) 1000 000

f) 10

g) 0,1

h) 0,001

i) 0,01

j) 0,0001

k) 0,00001

l) 0,000001

ATIVIDADE 7

a) Sim. O valor numérico da potência de 10 com expoente positivo 10^n é o número 1 seguido por uma quantidade de zeros que é igual ao valor do expoente n.

b) Sim. O valor numérico da potência de 10 com expoente negativo 10^{-n}, onde n é o valor positivo do expoente é um número decimal que possui a seguinte estrutura:

1. Começa com 0, (zero vírgula).
2. O algarismo 1 aparece na n-ésima casa decimal (a posição do 1 é igual ao valor do expoente n).
3. O número de zeros imediatamente após a vírgula é igual a n - 1.

ATIVIDADE 8

a) 10^2

b) 10^4

c) 10^{-3}

d) 10^{-6}

e) 10^6

f) 10^{-5}

g) 10^3

h) $\frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-4-3} = 10^{-7}$

i) $(10^2)^{-6} = 10^{-12}$

j) $(10^{-1})^8 = 10^{-8}$

ATIVIDADE 9

a) (V)
b) (F)
c) (F)
d) (F)
e) (V)

ATIVIDADE 10

$$y = \frac{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{10}}{30^9} = \frac{30^{10}}{30^9} = 30^1 = 30$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

ATIVIDADE 1

A função exponencial é caracterizada pela presença da variável no expoente, com a base sendo um número maior que zero e diferente de um. Ela pode ser representada na forma $f(x) = a^x$, onde a > 0 e a ≠ 1.
No caso da função $f(x) = (0,3)^{2x}$, temos que a = 0,3 (uma constante positiva, sendo 0 < 0,3 < 1) e o expoente é 2x. Como a base 0,3 é menor que 1, a função será decrescente. Portanto, essa função é do tipo exponencial decrescente.

ATIVIDADE 2

Sabemos que uma função exponencial pode ser expressa na forma $f(x) = a^x$, e sua classificação depende do valor da base a. Se a > 1, a função é crescente. Por outro lado, se 0 < a < 1, a função é decrescente. Portanto temos:
a) a base *a* é 9/5 = 1,8. Logo a > 1, função crescente
b) a base *a* é 1/6 = 0,166.... . Logo 0 < a < 1, função decrescente.
c) a base *a* é 2. Logo a > 1, função crescente.
d) a base *a* é 1/5 = 0,2. Logo 0 < a < 1, função decrescente.

ATIVIDADE 3

a) Sabemos que, a cada divisão celular (mitose), cada célula-mãe se divide em duas células-filhas. Por isso, na 1ª divisão teremos 2 células-filhas; na 2ª divisão teremos 4 células-filhas; na 3ª divisão teremos **8 células-filhas**; na 4ª divisão teremos **16 células-filhas**; e na 10ª divisão teremos **1 024 células-filhas**.

b) Mantendo esse padrão, o processo de divisão celular pode ser modelado por uma função exponencial de base 2, onde o número de células-filhas y pode ser expresso por em função de x, logo a expressão é: $y = 2^x$

ATIVIDADE 4

Considerando as funções *f(x)* e *g(x)* dadas para cada item teremos:

a) *f(2)* = $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$

b) $g(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

c) $f(-2) = 8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

d) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

e) $g(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$ ou $g(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$

f) *g(-1)* + *f(1)* = 2 + 8 = 10

$g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$ $\qquad$ $f(1) = 8^1 = 8$

ATIVIDADE 5

Observando o gráfico m x t é possível identificar que no instante t = 24º dia a massa de iodo-131 corresponde a **2,5 mg**, ou é possível ainda calcular a quantidade no 24º dia, substituímos t = 24 na fórmula:

$$m(24) = 20 \cdot (0,5)^{\frac{24}{8}} \Rightarrow m(24) = 20 \cdot (0,5)^3 \Rightarrow m(24) = 20 \cdot 0,125 = m(24) = 2,5\ mg.$$

Para calcular a quantidade no 32º dia, substituímos t = 32 na fórmula:

$$m(32) = 20 \cdot (0,5)^{\frac{32}{8}} \Rightarrow m(32) = 20 \cdot (0,5)^4 \Rightarrow m(32) = 20 \cdot 0,0625 = m(32) = 1,25\ mg.$$

ATIVIDADE 6

Por definição, sabemos que o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, onde *a* é uma constante real, a > 0 e a ≠ 1 , sempre passa pelo ponto (0, 1), pois: $f(0) = a^0 = 1$

Resposta: LETRA D

ATIVIDADE 7

A situação descrita segue um padrão de crescimento exponencial, onde a quantidade inicial de 200 pessoas alcançadas aumenta cinco vezes a cada hora. Assim, a função que relaciona a quantidade N de pessoas alcançadas com o tempo t em horas é:

$$N(t) = 200 \cdot 5^t$$

Resposta: LETRA D

ATIVIDADE 8

Para calcular o número de pessoas que visualizaram o anúncio após 10 horas, substituímos t = 10 na função N(t):

$$N(10) = 100 \cdot 3^{0,5 \cdot 10}$$

$$N(10) = 100 \cdot 3^5$$

$$N(10) = 100 \cdot 243 = 24\,300$$

Portanto, **24 300** pessoas visualizarão o anúncio após 10 horas.



QUESTÃO 1

Do gráfico, tem-se que o saldo devedor inicial é R$ 500,00. Além disso, como a capitalização é composta, podemos concluir que a parcela mensal de juros é variável. Finalmente, supondo uma taxa de juros constante e igual a 10% ao mês, teríamos, ao final de 6 meses, um saldo devedor igual a:

$$M = 500 \cdot (1,1)^6 \Rightarrow M = 500 \cdot 1,771561 = \text{R\$}\, 885,78$$

Portanto, comparando esse resultado com o gráfico, podemos afirmar que a taxa de juros mensal é superior a 10%. Logo a resposta é a **LETRA C**.

QUESTÃO 2

Observando a tabela, podemos perceber que, à medida que o número de discos aumenta, o número de movimentos necessários dobra a cada disco adicional e subtrai 1. Isso evidencia o crescimento exponencial dos movimentos exigidos para resolver o problema.

- Para 1 disco: $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ movimento.
- Para 2 discos: $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ movimentos.
- Para 3 discos: $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ movimentos.
- E assim por diante.

Portanto, a fórmula que descreve o número mínimo de movimentos Y necessários para mover X discos é dada por: $y = 2^x - 1$

Resposta: LETRA A.

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

ATIVIDADE 1

a) Considerando a lei de formação $f(x) = 5^x$, iremos substituir o expoente x em cada uma delas obtendo:

$f(-2) = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}\ ou\ 0,04$

$f(-1) = 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}\ ou\ 0,2$

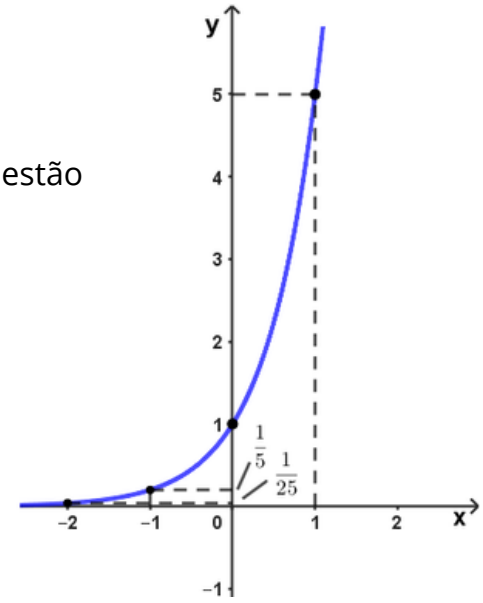
$f(0) = 5^0 = 1$

$f(1) = 5^1 = 5$

Professor, caso considere necessário, utilize o aplicativo Geogebra para demonstrar o comportamento dos gráficos de forma mais clara.

b) Considerando os resultados obtidos na questão anterior, teremos os seguintes pares ordenados:

$\left(-2, \frac{1}{25}\right)\left(-1, \frac{1}{5}\right)\ (0,1)\quad (1,5)$



c) Analisando o gráfico, é possível observar que, à medida que os valores de x aumentam, os resultados de *f(x)* também **aumentam**. Dessa forma, podemos classificar a função como sendo **crescente**.

ATIVIDADE 2

a) Considerando a lei de formação $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, iremos substituir o expoente x em cada uma delas obtendo:

$f(-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{1}\right)^1 = 4^1 = 4$

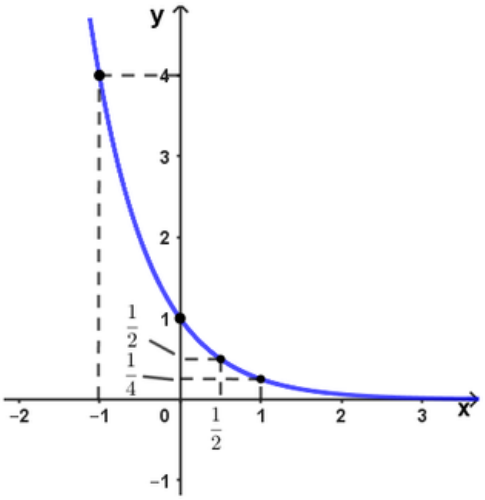
$f(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{4}\right)^1} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2}$

$f(1) = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$

b) Considerando os resultados obtidos na questão anterior, teremos os seguintes pares ordenados:

$(-1, 4)\ (0, 1)\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\ \left(1, \frac{1}{4}\right)$



c) Analisando o gráfico, é possível observar que, à medida que os valores de x aumentam, os resultados de *f(x)* **diminuem**. Dessa forma, podemos classificar a função como sendo **decrescente**.

ATIVIDADE 3

Para que o gráfico de uma função exponencial $f(x) = a^x$ seja uma curva crescente, a base *a* precisa ser positiva e maior que 1. Portanto a resposta correta é a LETRA E.

ATIVIDADE 4

A expressão $f(x) = \pi^x$ é uma função exponencial, onde a base é o número *π*, que é aproximadamente 3,1416. Como a base *π* é maior que 1, o gráfico cresce rapidamente à medida que x aumenta, sendo que seu gráfico representa uma função exponencial crescente. Portanto a resposta correta e a **LETRA B**.

ATIVIDADE 5

a) Diminuindo, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
b) Não, porque a curva não corta o eixo x.
c) $\{a \epsilon \mathbb{R} / 0 < a < 1\}$

ATIVIDADE 6

Para identificar a lei da função exponencial, é necessário analisar o gráfico. Em uma função exponencial da forma $f(x) = a^x$ as características que podemos observar são:

- Crescimento ou decrescimento.
- Ponto de interceptação com o eixo y.
- Assíntota horizontal: A função terá uma assíntota horizontal no eixo x, ou seja, o gráfico se aproxima de 0, mas nunca o toca, quando x → −∞ (x tende ao menos infinito).

Analisando o gráfico da função exponencial, observamos que ele representa uma curva crescente. Isso implica que a base da função deve ser positiva e maior que 1. O gráfico intercepta o eixo y no ponto (0, 3) e, quando x = 1, o valor de y é 9, ou seja, (1, 9). Além disso, a assíntota horizontal da curva está próxima de 0. Com essas informações, podemos testar as hipóteses para cada uma das funções propostas.

a) Para x = 0, teríamos: $f(0) = 3^0 = 1$ Falso, pois para f(0) = 3

b) Para x = 0, teríamos: $f(0) = 9^0 = 1$ Falso, pois para f(0) = 3
Para x = 1, teríamos: $f(1) = 9^1 = 9$ Verdadeiro, pois para f(1) = 9

c) Para x = 0, teríamos: $f(0) = 3^{0+1} = 3^1 = 3$ **Verdadeiro**, pois para f(0) = 3
Para x = 1, teríamos: $f(1) = 3^{1+1} = 3^2 = 9$ **Verdadeiro**, pois para f(1) = 9

d) Para x = 0, teríamos: $f(0) = 3^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ Verdadeiro, pois para f(0) = 3
Para x = 1, teríamos: $f(1) = 3^1 + 2 = 3 + 2 = 5$ Falso, pois para f(1) = 9

e) Falso, pois a base $a = \frac{1}{3}$, portanto temos que 0 < *a* < 1, função decrescente.

Portanto a resposta correta é a **LETRA C**.

ATIVIDADE 7

A função $f(x) = 2^x + 1$ é uma função exponencial com as seguintes características:

- Crescimento exponencial: Como a base da exponencial é 2 (maior que 1), o gráfico cresce rapidamente à medida que x aumenta.
- Forma geral: A função é uma variação da função exponencial básica 2^x , deslocada verticalmente para cima por 1 unidade, ou seja, sua Assíntota horizontal será a linha y = 1. Isso significa que, para valores de $x \to -\infty$ (x tende ao menos infinito), o valor de f(x) se aproxima de 1, mas nunca o atinge.
- Interceptação no eixo y, ou seja, quando x = 0, teremos: $f(0) = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$
- Quando x = 1, teremos: $f(1) = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$
- Quando x = 2, teremos: $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Portanto, o gráfico que correspondente função $f(x) = 2^x + 1$ é o que está representado na **LETRA E.**

ATIVIDADE 8

A função $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$, será uma curva que:

- Decresce rapidamente a medida que x aumenta ($0 < a < 1$)
- Passa pelo ponto (-1, 3) e (0, 0);
- Se apróxima da linha horizontal y = -1 a medida que $x \to +\infty$, ou seja, sua assíntota horizontal está em y = -1

Portanto, o gráfico que correspondente função $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$ é o que está representado na **LETRA D**.

ATIVIDADE 9

Analisando o gráfico da função exponencial, é possível observar que ele representa uma curva decrescente. Isso implica que a base da função deve ser maior que 0 e menor que 1. O ponto de interceptação com o eixo y ocorre em (0, 1). Além disso, quando x = -1, o valor de y é 6, ou seja, o ponto é (−1, 6). A assíntota horizontal da função está próxima de 0. Logo podemos testar as hipóteses em cada uma das funções verificando que:

$$f(0) = \left(\frac{1}{6}\right)^0 = 1 \qquad f(-1) = \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 6$$

Portanto a resposta correta é a **LETRA A**.

ATIVIDADE 10

a) Analisando o gráfico, é possível estabelecer que representa uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x + b$. Logo:

- Para x = 0, temos que y = 2, e substituindo na função:

  $a^0 + b = 2 \Rightarrow 1 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 1 = 1$

- Sabendo que b =1 e que para x = 1, temos que y = 8, e substituindo na função:

  $a^1 + 1 = 8 \Rightarrow a + 1 = 8 \Rightarrow a = 8 - 1 = 7$

Portanto, a função é: $f(x) = 7^x + 1$

b) Analisando o gráfico, é possível estabelecer que representa uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x \cdot b$. Logo:

- Para x = 0, temos que y = 3, e substituindo na função:

  $a^0 \cdot b = 3 \Rightarrow 1 \cdot b = 3 \Rightarrow b = 3$

- Sabendo que b = 3 e que para x = -1, temos que y = 6, e substituindo na função:

  $a^{-1} \cdot 3 = 6 \Rightarrow a^{-1} = \frac{6}{3} \Rightarrow a^{-1} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Portanto, a função é: $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

ATIVIDADE 1

Resolução:

$a) f(1) = 4^{1+1} = 4^2 = 16$

$b) f(-4) = 4^{-4+1} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

$c) f(x) = 256 \Rightarrow 4^{x+1} = 256 \Rightarrow 4^{x+1} = 4^4 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 4 - 1 = 3$

ATIVIDADE 2

Resolução:

$a) f(3) = 5^3 - 2 = 125 - 2 = 123$

$b) f(-1) = 5^{-1} - 2 = \frac{1}{5} - 2 = \frac{1-10}{5} = \frac{-9}{5} = -\frac{9}{5}$

$c) f(x) = 23 \Leftrightarrow 5^x - 2 = 23 \Rightarrow 5^x = 23 + 2 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2, \text{logo x=2}$

ATIVIDADE 3

A expressão fornecida para o decaimento exponencial da quantidade *Q(t)* de medicamento na corrente sanguínea é: $Q(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$, onde, N_0 é a quantidade inicial de medicamento, no caso 800 mg e t é o tempo em horas desde a ingestão do medicamento.

Como Carlos tomou o comprimido às 15 horas, o tempo t entre as 15 horas e as 21 horas é de 6 horas. Substituindo *t = 6* na fórmula teremos:

$$Q(6) = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{2}} \Rightarrow Q(6) = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \Rightarrow Q(6) = 800 \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow Q(6) = \frac{800}{8} = 100\,\text{mg}$$

Portanto, a quantidade de ibuprofeno na corrente sanguínea de Carlos às 21 horas será 100 mg. A resposta correta é a **LETRA E**.

ATIVIDADE 4

A função que descreve o montante M(t) acumulado em uma aplicação com juros compostos é dada por: $M(t) = C \cdot (1+i)^t$, onde *M(t)* é o montante acumulado após *t* períodos de tempo, *C* é o valor principal ou Capital inicial investido, *i* é a taxa de juros por período de tempo, que neste caso é de 2% ao mês, ou seja, *i* = 0,02, *t* é o número de períodos em meses, que o investimento ficará aplicado.
Portanto, a função que relaciona o montante *M(t)* com o número de meses t seria:

$M(t) = 1\,000 \cdot (1,02)^t$ Logo a resposta Correta é a **LETRA C**

ATIVIDADE 5

Para estimar o número de peixes no lago 5 anos após a instalação do parque industrial, basta substituir t = 5 na fórmula:

$N(5) = 300 - 10 \cdot 2^{5-1} \Rightarrow N(5) = 300 - 10 \cdot 2^4 \Rightarrow N(5) = 300 - 10 \cdot 16$

$N(5) = 300 - 160 \Rightarrow N(5) = 140 \text{ peixes}$

ATIVIDADE 6

Para calcular o montante acumulado *M(t)* após 3 anos, iremos substituir o valor na fórmula:

$$M(3) = 400 \cdot (1,11)^3$$
$$M(3) = 400 \cdot 1,367631$$
$$M(3) = 547,05$$

Portanto, o montante gerado após 3 anos é R$ 547,05.

A resposta correta é **LETRA C**

ATIVIDADE 7

Queremos saber quantos minutos *t* seriam necessários para que a notícia atingisse 1 620 pessoas. Ou seja, queremos encontrar o valor de t quando *N(t)* = 1 620.
Substituindo na fórmula, teremos:

$N(t) = 1\,620 \Leftrightarrow 20 \cdot 3^{t-1} = 1\,620 \Rightarrow 3^{t-1} = \dfrac{1\,620}{20} \Rightarrow 3^{t-1} = 81 \Rightarrow 3^{t-1} = 3^4$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes: $t - 1 = 4 \Rightarrow t = 4 + 1 = 5$

Portanto, **5 minutos** são necessários para que a notícia atinja 1 620 pessoas.

ATIVIDADE 8

O crescimento exponencial pode ser modelado pela seguinte fórmula:

$P(2) = 30\,000 \cdot (1+0,05)^2 \Rightarrow P(2) = 30\,000 \cdot (1,05)^2 \Rightarrow P(2) = 30\,000 \cdot 1,1025 \Rightarrow P(2) = 33\,075$

Portanto, após 2 anos, a população da cidade será de **33 075 habitantes**.

ATIVIDADE 9

Queremos saber o valor de *t* quando *Q(t)* = 192 000. Ou seja, queremos encontrar o valor de *t* tal que:

$$Q(t) = 192\,000 \Rightarrow 3\,000 \cdot 2^t = 192\,000 \Rightarrow 2^t = \frac{192\,000}{3\,000} \Rightarrow 2^t = 64 \Leftrightarrow 2^t = 2^6$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes: ***t = 6***

Portanto, a cultura atingirá 192 000 bactérias após 6 horas.

A resposta correta é **LETRA B**

ATIVIDADE 10

Queremos encontrar o tempo *t* quando o valor do carro for R$ 87 480,00. Ou seja, queremos resolver para *t* na equação:

$$V(t) = 87\,480 \Leftrightarrow 120\,000 \cdot (0,9)^t = 87\,480 \Rightarrow (0,9)^t = \frac{87\,480}{120\,000} \Rightarrow (0,9)^t = 0,729$$

Vamos escrever 0,729 na forma de uma potência: $(0,9)^3$. Assim, queremos encontrar o valor de *t* tal que: $(0,9)^t = (0,9)^3$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes: *t = 3*

Portanto, o tempo necessário para que o carro tenha o valor de R$ 87 480,00 é aproximadamente 3 anos.

SEQUÊNCIAS: PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

ATIVIDADE 1

Calculando razão *q* em cada item, teremos:

$a)\ q = \dfrac{50}{10} = 5$

$b)\ q = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

$c)\ q = \dfrac{-10}{-30} = \dfrac{1}{3}$

$d)\ q = \dfrac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{9}} = 1$

$e)\ q = \dfrac{-4}{-1} = 4$

$f)\ q = \dfrac{18}{-3} = -6$

$g)\ q = \dfrac{2^5}{2} = 2^{5-1} = 2^4$

$h)\ q = \dfrac{2^{-4}}{2^{-2}} = 2^{-4-(-2)} = 2^{-4+2} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

ATIVIDADE 2

Calculando a razão da PG, Temos:

$$q = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = \frac{27}{9} = 3 \ \ OU \ \ \frac{3}{1} = 3$$

Portanto, temos uma PG de razão 3. Resposta correta **Letra E.**

ATIVIDADE 3

Analisando o enunciado e a tabela fornecida, podemos concluir que:

a) Como a sequência é uma PG, teremos: $q = \frac{120\,000}{100\,000} = 1,2$

b) O valor de a_1 (o primeiro termo da PG) é o valor inicial do imóvel, que foi de R$ 100 000,00 em 2019. Portanto, temos: $a_1 = 100\,000$

Importância do primeiro termo: O primeiro termo é importante, pois a_1 representa o valor inicial do imóvel. Além disso, é o valor que será multiplicado pela razão da PG, servindo como base para a formulação de uma função do tipo exponencial que descreve o crescimento do valor do imóvel ao longo do tempo.

c) Sabemos que o valor do imóvel inicial a_1 é de R$ 100 000,00 e que o crescimento é de 20% ao ano, formando uma sequência de razão *q = 1,2*. Desta forma a expressão que representa a função do tipo exponencial é: $V(x) = 100\,000 \cdot (1,2)^{x-1}$

d) Não, os valores estariam incorretos, pois, ao modelar a função exponencial, é necessário ajustar o expoente para que os valores discretos de x (x ∈ ℕ*) correspondam aos termos a_n da PG. Isso ocorre porque, ao substituir x = 1 na função $f(x) = 100\,000 \cdot (1,2)^x$, o resultado será a_2 em vez de a_1, o que não reflete corretamente os dados da tabela.

ATIVIDADE 4

Considerando a sequência (10, 30, 90, 270, 810, ...), teremos:

a) Uma PG, de Razão: $q = \frac{30}{10} = 3$

b) Termo geral: $a_n = 10 \cdot 3^{n-1}$

Professor (a), o objetivo é que o aluno compreenda que a regularidade de uma sequência numérica diz respeito à existência de um padrão e que, com base na sua identificação, é possível determinar os termos subsequentes dessa sequência. Sugerimos explorar outras sequências numéricas com seus alunos, que sejam ou não Progressões Geométricas, e proponha discussões para que eles tentem identificar a regularidade. Uma sugestão para isso é a sequência de Fibonacci.

c) $a_9 = 10 \cdot 3^{9-1} \Rightarrow a_9 = 10 \cdot 3^8 \Rightarrow a_9 = 10 \cdot 6\,561 = 65\,610$

ATIVIDADE 5

a) Analisando os valores de a_n , para cada *n* natural, temos:

- Para n = 1, temos: $a_1 = \frac{1}{2}$
- Para n = 2, temos: $a_2 = \frac{1}{4}$
- Para n = 3, temos: $a_3 = \frac{1}{8}$
- Para n = 4, temos: $a_4 = \frac{1}{16}$
- Para n = 5, temos: $a_5 = \frac{1}{32}$

b) Razão da PG: $q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{\cancel{2}^2}{\cancel{4}^2} = \frac{1}{2}$

c) Calculando o 6º termo da PG: $a_6 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{64}$

ATIVIDADE 6

Professor (a), o tapete de Sierpinski é um tipo de fractal.
Que tal conversar com os alunos sobre fractais e mostrar alguns outros exemplos? Sugerimos uma breve conversa no momento da discussão da atividade e, num momento oportuno, quem sabe trazer outras abordagens sobre fractais?

Considerando a PG, (1, 8, 64, 512, ...), teremos:

a) Razão da PG: $q = \frac{8}{1} = 8$ e $a_1 = 1$

Logo: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 8^{n-1} \Rightarrow a_n = 8^{n-1}$

b) $a_9 = 8^{9-1} \Rightarrow a_9 = 8^8$

ATIVIDADE 7

O problema descreve um processo de divisão celular por mitose, onde cada célula se divide em duas a cada ciclo. O cientista observou 8 192 células após 9 ciclos de mitose, ou seja, *n(9)* = 8 192. Portanto, temos uma PG de razão *q* = 2, onde $a_9 = 8\,192$.

Logo: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 8192 = a_1.2^{9-1} \Rightarrow 8192 = a_1 \cdot 2^8$

$$8192 = a_1 \cdot 256 \Rightarrow \frac{8192}{256} = a_1 \Rightarrow a_1 = 32$$

Portanto, o número de células iniciais era de 32 células. Resposta correta é **LETRA C.**

ATIVIDADE 8

Para resolver este problema, precisamos utilizar a fórmula geral da progressão geométrica (PG), que é:

$a_1 = 3$
$a_6 = 9\,375$
n = 6

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 9375 = 3 \cdot q^{6-1} \Rightarrow \frac{9375}{3} = q^5$$

$$q^5 = 3125 \Rightarrow q = \sqrt[5]{3125} \Rightarrow q = \sqrt[5]{5^5} \Rightarrow q = 5$$

Portanto, a razão da PG, é 5.

ATIVIDADE 9

Para resolver este problema, precisamos utilizar a fórmula geral da progressão geométrica (PG), que é:

$a_1 = 7$
$a_n = 3\,584$
Razão q = 2
n = ?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 3584 = 7 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{3584}{7} = 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 512 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^9$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes:

$$n - 1 = 9 \Rightarrow n = 9 + 1 = 10$$

Portanto, a PG, é composta de 10 termos.

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

Cada dobradura do papel resulta em uma redução pela metade de uma das dimensões. Assim, o número de folhas aumenta a cada dobradura. A partir da folha A0, a sequência de número de folhas vai dobrando a cada formato: A1 = 2 folhas, A2 = 4 folhas, e assim por diante.

Logo: $A8 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot 2^{8-1} \Rightarrow a_8 = 2 \cdot 2^7 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot 128 = 256$

Portanto, a quantidade de folhas A8 que podemos obter a partir de uma folha A0 é 256. Resposta correta é **LETRA E.**

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG

ATIVIDADE 1

A quantidade total de água despejada após 7 segundos é a soma dos volumes despejados a cada segundo, ou seja, a soma do 1º ao 7º termo da progressão geométrica: (3 000, 6 000, 12 000, ...), onde a_1 = 3 000, *n* = 7 e a razão é 2.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG, finita: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_7 = \frac{3\,000 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{3\,000 \cdot (128 - 1)}{1} \Rightarrow S_7 = 3\,000 \cdot 127 = 381\,000$$

A quantidade total de água despejada após 7 segundos é 381 000 litros, logo a alternativa correta é a **LETRA E**.

ATIVIDADE 2

A quantidade total de pessoas que visualizaram a publicação ao final dos 8 minutos é a soma dos termos dessa progressão geométrica: (6, 18, 54, ...), onde a_1 = 6, *n* = 8 e a razão é 3.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_8 = \frac{6 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{6 \cdot (6\,561 - 1)}{2} \Rightarrow S_8 = 3 \cdot 6\,560 = 19\,680$$

A quantidade total de pessoas que visualizaram a publicação ao final dos 8 minutos foi 19 680, logo a alternativa correta é a **LETRA C**.

ATIVIDADE 3

Analisando a PG, (2, -8, 32, ...), temos: a_1 = 2, a razão é -4 e queremos somar os seis primeiro termos, logo *n* = 6.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_6 = \frac{2 \cdot ((-4)^6 - 1)}{-4 - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{2 \cdot (4\,096 - 1)}{-5} \Rightarrow S_6 = \frac{2 \cdot 4\,095}{-5}$$

$$S_6 = \frac{8\,190}{-5} = -1\,638$$

Portanto, a soma dos seis primeiros termos da PG, é **-1 638**.

ATIVIDADE 4

Sabemos que o paciente ingeriu Ésio pela manhã e que a meia-vida de eliminação do medicamento é de 1 hora. Isso significa que, a cada hora, a quantidade de medicamento na corrente sanguínea é reduzida pela metade. Assim, passado 1 hora, restam 20 mg; passados 2 horas, restam 10 mg; passados 3 horas, restam 5 mg, e assim por diante.
Esse padrão de redução segue uma progressão geométrica (PG) em que o primeiro termo é 20 mg e a razão é $q = \frac{1}{2}$

Utilizando a fórmula do termo geral da PG, teremos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} \Rightarrow a_6 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \qquad a_6 = 20 \cdot \frac{1}{32} \Rightarrow \frac{20}{32} = 0,625$$

A quantidade de medicação que permanecerá na corrente sanguínea do paciente passados 6 horas será 0,625 mg. Portanto, a alternativa correta é **LETRA D**.

ATIVIDADE 5

A situação descrita é uma progressão geométrica (PG) (8, 16, 32, ..., 512), onde $a_1 = 8$, $a_n = 512$ e a razão é 2. Queremos saber o valor de *n*, logo utilizaremos o termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 512 = 8 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{512}{8} = 2^{n-1} \Rightarrow 64 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^6 = 2^{n-1}$$

Considerando que as bases são iguais, teremos: $n - 1 = 6 \Rightarrow n = 6 + 1 = 7$

Portanto, a alternativa correta é **LETRA C**.

ATIVIDADE 6

A questão descreve uma progressão geométrica (PG) infinita com razão $q = \frac{1}{2} = 0,5$ e primeiro termo $a_1 = 20$, onde o objetivo é calcular o total de fichas distribuídas ao visitante após um número infinito de giros.
Ao substituir os valores na fórmula da soma de uma PG infinita, obtemos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{20}{1-0,5} \Rightarrow S = \frac{20}{0,5} = 40$$

Portanto, o valor total de fichas que o visitante receberá após um número infinito de giros é 40. A alternativa correta é a **LETRA D**.

ATIVIDADE 7

Para resolver essa questão, iremos utilizar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos da PG, para calcular o valor de a_1
Sabemos que a PG, tem 10 termos, logo: *n* = 10, razão *q* = 2, e a soma a_n = 4 092.

$$s_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 4\,092 = \frac{a_1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 4\,092 = \frac{a_1 \cdot (1\,024 - 1)}{1} \Rightarrow 4\,092 = a_1 \cdot 1\,023$$

$$\frac{4092}{1023} = a_1 \Leftrightarrow a_1 = 4$$

Portanto, o primeiro termo da progressão geométrica é 4. A resposta correta é **LETRA C.**

ATIVIDADE 8

A sequência fornecida é uma progressão geométrica (PG) finita, onde o primeiro termo $a_1 = 1$, a razão *q* = 2 e soma dos termos da PG, é 1 023.

Utilizando a fórmula para a soma dos primeiros *n* termos de uma PG finita, teremos:

$$1\,023 = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 1023 = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{1} = 1\,023 = 2^n - 1$$

$$1023 + 1 = 2^n \Rightarrow 1024 = 2^n \Rightarrow 2^{10} = 2^n$$

Considerando que as bases são iguais, teremos: *n* = 10. Portanto, a quantidade de elementos da PG finita é 10.

ATIVIDADE 9

a) Na 1ª geração: Uma fêmea do mosquito Aedes aegypti coloca 200 ovos. Metade dessas crias serão fêmeas, então, teremos: $N = \frac{200}{2} = 100$

Dessas 100 fêmeas, 30% nascerão infectadas com o vírus da dengue. Portanto, o número de fêmeas infectadas será:

$$30\% \text{ de } 100 = \frac{30}{100} \cdot 100 = 0,30 \cdot 100 = 30$$

Então, o número de fêmeas infectadas na 2ª geração será 30.

b) Formando a PG, a partir de $a_1 = 1$, $a_2 = 30$, teremos a razão da PG, *q* = 30. Portanto, a sequência das quantidades de fêmeas infectadas nas 5 primeiras gerações é: (1, 30, 900, 27 000, 810 000).

c) Realizando a soma do números de fêmeas nas 5 primeiras gerações:

Soma: 1 + 30 + 900 + 27 000 + 810 000 = **837 931**

OU $S_5 = \frac{1 \cdot (30^5 - 1)}{30 - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{1 \cdot (24\,300\,000 - 1)}{29} \Rightarrow S_5 = \frac{24\,299\,999}{29} = 837\,931$



QUESTÃO 1

Em um torneio de tênis com sistema de eliminatória simples, a cada fase, metade dos competidores é eliminada, ou seja, em cada fase ocorre um número de partidas igual ao número de competidores eliminados. Cada partida tem um vencedor, que avança para a próxima fase. Em cada fase, o número de partidas é igual à quantidade de competidores restantes dividida por 2. Assim, temos: 1ª fase: 64 partidas (de 128 competidores), 2ª fase: 32 partidas (de 64 competidores) e assim por diante, seguindo uma PG, de razão $q = \frac{1}{2}$.

Portanto, o número total de partidas necessárias para definir o campeão é 127, e essa soma é dada pela expressão 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

A alternativa correta é **LETRA E**.

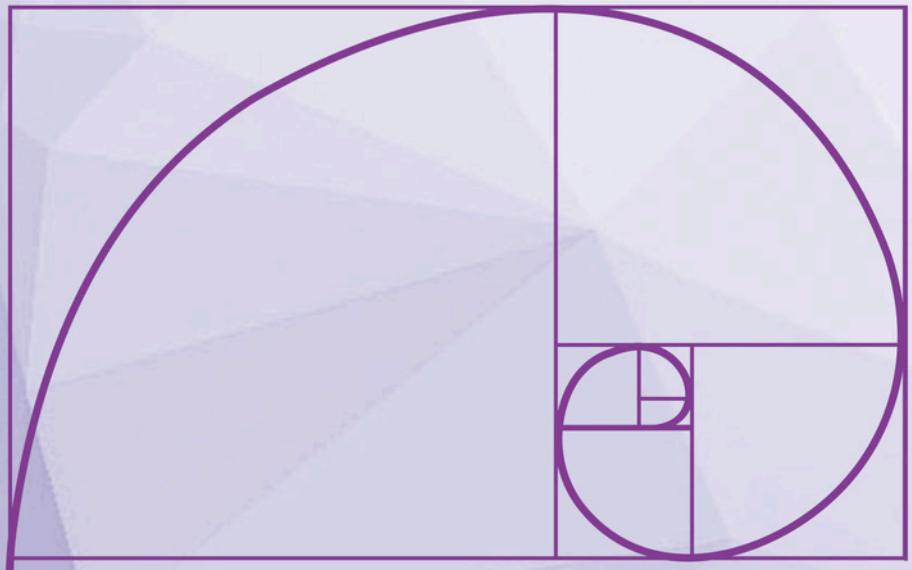
Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica



Capítulo 2: Logaritmo e Função Logarítmica

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logaritmica.

- Logaritmo. (p. 70 - 82)



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logaritmica.

- Introdução. (p. 86 - 98).

ESCALA RICHTER

Ampliando as discussões sobre ESCALA RICHER

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logarítmica.

- A função logarítmica. (p. 83 - 89)



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.

- Função logarítmica. (p. 99 - 102).

VIDEOAULAS

Portal da OBMEP
Função Logarítmica

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logaritmica.

- Tecnologias digitais. (p. 90 - 96)
- Conexões. (p. 97 - 103)



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.

- Função logarítmica. (p. 99 - 102).

CONEXÕES

A audição e a função do tipo logarítmica

Nas páginas 97 a 100, há textos e questões para debate sobre a relação entre a audição e a função do tipo logarítmica.



LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logarítmica.

- A função logarítmica. (p. 88 - 89).



Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.

- Função logarítmica. (p. 101 - 102).

LOGARITMO

ATIVIDADE 1

A expressão completa de um logaritmo é geralmente escrita da seguinte forma:

$$log_a\, b = c$$

Onde: *a* é a base do logaritmo (um número real maior que 0 e diferente de 1); *b* é o argumento do logaritmo (um número real positivo); *c* é o resultado ou valor do logaritmo (um número real que responde à pergunta "A que potência devemos elevar *a* para obter *b*?").

Portanto, dizemos que o logaritmo de *b* na base *a* é igual a *c*, o que significa que:

$a^c = b$, ou seja, *c* é a potência à qual a base *a* deve ser elevada para resultar em *b*.

Resposta correta **LETRA B.**

ATIVIDADE 2

Para cada item, apresentaremos o resultado de cada potência, juntamente com a representação do logaritmo correspondente a cada termo.

$a)\ 2^3 = 8 \ \therefore\ log_2 8 = 3$

$b)\ 7^2 = 49 \ \therefore\ log_7 49 = 2$

$c)\ 10^3 = 1\,000 \ \therefore\ log_{10} 1\,000 = 3$

$d)\ 3^{-1} = \frac{1}{3} \ \therefore\ log_3 \left(\frac{1}{3}\right) = -1$

$e)\ 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{7} = \sqrt{7} \ \therefore\ log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

$f)\ 5^{-2} = \frac{1}{25} \ \therefore\ log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$

ATIVIDADE 3

Utilizando a definição de logaritmos, teremos:

$a)\ log_2 16 = 4$

$b)\ log_3 27 = 3$

$c)\ log_5 125 = 3$

$d)\ log_{10} 1\,000 = log\, 1000 = 3$

$e)\ log\, 10\,000 = 4$

$f)\ log_7 1 = 0$

$g)\ log_8 8 = 1$

$h)\ log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$

$i)\ log_{10} 0,01 = -2$

$j)\ log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

ATIVIDADE 4

Utilizando a definição de logaritmos, temos que o valor de A é:

$a)\ A = log_6 36 + log_4 4 \Rightarrow 2 + 1 = 3$

$b)\ A = log_3 81 - log_2 1 + log\, 100 \Rightarrow 4 - 0 + 2 = 6$

ATIVIDADE 5

Utilizando a definição e as consequências da definição de logaritmo, teremos em cada caso:

$a)\ log_3 x = 4,\ logo:\ 3^4 = x \Leftrightarrow x = 81$

$b)\ log_x 9 = 2,\ logo:\ x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{9} = 3$ Lembre-se que pela definição de logaritmo, neste caso, x > 0 e x ≠ 1, portanto x = 3.

$c)\ log_8 x = log_8 \left(\frac{2}{3}\right),\ logo:\ x = \frac{2}{3}$ Pois, pela propriedade: $log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$

$d)\ 3^{log_3 2} = x,\ logo: x = 2$ Pois, pela propriedade: $a^{log_a b} = b$

ATIVIDADE 6

Utilizando as propriedades de logaritmos e considerando os valores de $log 2 \approx 0,30$, $log 3 \approx 0,48$ e $log 5 \approx 0,70$, teremos em cada caso:

$a)\ log 15 \Rightarrow log(3 \cdot 5) = log 3 + log 5 = 0,48 + 0,70 = 1,18$

$b)\ log 6 \Rightarrow log(2 \cdot 3) = log 2 + log 3 = 0,30 + 0,48 = 0,78$

$c)\ log 32 \Rightarrow log 2^5 = 5 \cdot log 2 = 5 \cdot 0,30 = 1,5$

$d)\ log \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow log 2 - log 3 = 0,30 - 0,48 = -0,18$

$e)\ log 1,5 \Rightarrow log \left(\frac{15}{10}\right) = log 15 - log 10 = 1,18 - 1 = 0,18$

$f)\ log 30 \Rightarrow log(2 \cdot 3 \cdot 5) = log 2 + log 3 + log 5 = 0,30 + 0,48 + 0,70 = 1,48$

ATIVIDADE 7

Utilizaremos as propriedades operatórias de logaritmos para resolver as questões:

a) Logaritmo de um produto: $A = log 5 + log 200 \Rightarrow A = log(5 \cdot 200) \Rightarrow A = log 1\,000 = 3$

b) Logaritmo de um quociente: $A = log_2 100 - log_2 25 \Rightarrow A = log_2 \left(\frac{100}{25}\right) \Rightarrow A = log_2 4 = 2$

c) Logaritmo de um produto e de um quociente:

$A = log 30 + log 7 - log 21 \Rightarrow A = log(30 \cdot 7) - log 21 \Rightarrow A = log \left(\frac{30 \cdot 7}{21}\right) \Rightarrow A = log \left(\frac{210}{21}\right) \Rightarrow A = log 10 = 1$

d) Logaritmo de uma potência: $A = log_2 (0,5)^6 - log 100^{-4} \Rightarrow A = 6 \cdot log_2 (0,5) - (-4) \cdot log 100$

$A = 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \Rightarrow A = -6 + 8 = 2$

ATIVIDADE 8

Considerando a definição de logaritmo, a propriedade de mudança de base, as aproximações com duas casas decimais e os valores $log\,2 \approx 0,30$, $log\,3 \approx 0,48$ e $log\,5 \approx 0,70$, teremos os seguintes resultados em cada item:

$a)\ 2^x = 3\ \ logo : log_2\,3 = x \Leftrightarrow x = \dfrac{log\,3}{log\,2} = \dfrac{0,48}{0,30} \approx 1,6$

$b)\ 100^x = 3\ \ logo : log_{100}\,3 = x \Leftrightarrow x = \dfrac{log\,3}{log\,100} = \dfrac{0,48}{2} \approx 0,24$

$c)\ 2^x = 5\ \ logo : log_2\,5 = x \Leftrightarrow x = \dfrac{log\,5}{log\,2} = \dfrac{0,70}{0,30} \approx 2,33$

$d)\ 5^x = 27\ logo : log_5\,27 = x \Leftrightarrow x = \dfrac{log\,27}{log\,5} = \dfrac{log\,3^3}{log\,5} = \dfrac{3 \cdot log\,3}{log\,5} = \dfrac{3 \cdot 0,48}{0,70} = \dfrac{1,44}{0,70} \approx 2,06$

ATIVIDADE 9

Para calcular o pH do sangue, substituímos os valores conhecidos para *B* e *C* na expressão Henderson-Hasselbalch:

$pH = 6,1 + log\left(\dfrac{B}{C}\right)$

Onde: B = 25 mmol/l; C = 2 mmol/l

$pH = 6,1 + log\left(\dfrac{25}{2}\right)$

$pH = 6,1 + 1,1$

$pH = 7,2\,mmol/l$

Agora, calculamos $log\left(\dfrac{25}{2}\right)$. Utilizando as propriedades teremos:

$log\left(\dfrac{25}{2}\right) \Rightarrow log\,25 - log\,2 \Rightarrow log5^2 - log\,2$

$2 \cdot log\,5 - log\,2 \Rightarrow 2 \cdot 0,70 - 0,30 \Rightarrow 1,40 - 0,30 = 1,1$

Portanto, o pH do sangue da pessoa é 7,2 mmol/l. Resposta correta é a **LETRA C.**

ATIVIDADE 10

Sabemos que *M* = 640, então substituímos esse valor na equação com o objetivo de determinar o valor de *t* (meses).

$M = 400 \cdot (1,1)^t \Rightarrow 640 = 400 \cdot (1,1)^t \Rightarrow \dfrac{640}{400} = (1,1)^t \Rightarrow 1,6 = (1,1)^t$

Agora, sabemos que $1,6 = (1,1)^t$ equivale a $log_{1,1}\,1,6 = t\ \therefore\ t = log_{1,1}\,1,6$.

Ao realizar a mudança de base para a base 10 e considerando que $log\,1,6 \approx 0,20\ e\ log\,1,1 \approx 0,04$, obtemos:

$$t = log_{1,1}\,1,6 \Rightarrow t = \frac{log\,1,6}{log\,1,1} = \frac{0,20}{0,04} = 5$$

Portanto, o tempo necessário para que a dívida atinja R$ 640,00 é de 5 meses.
A resposta correta é **LETRA D**.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

ATIVIDADE 1

Considerando as funções logarítmicas $f(x) = 4 + log_3 x$ e $g(x) = log\,(x + 6)$, teremos:

$a)\ f(1) = 4 + log_3 1 = 4 + 0 = 4$

Lembrando que, o logaritmo de 1 na base 3 é o expoente x tal que 3 elevado a x resulte em 1.

$3^x = 1 \quad 3^x = 3^0 \quad x = 0$

$b)\ g(4) = log(4 + 6) = log\ 10 = 1$

$c)\ f(3) = 4 + log_3 3 = 4 + 1 = 5$

$d)\ f(9) + g(-5) \Rightarrow 4 + log_3 9 + log(-5 + 6) \Rightarrow 4 + 2 + log\ 1 = 6 + 0 = 6$

$e)\ f(x) = 9 \Leftrightarrow 4 + log_3 x = 9 \Rightarrow log_3 x = 9 - 4 \Leftrightarrow log_3 x = 5$

Logo, fazemos a exponencial inversa de log:

$f)\ g(x) = 2 \Leftrightarrow log(x+6) = 2, logo: 10^2 = (x+6) \Rightarrow 100 = x+6 \therefore x = 100-6 = 94$

ATIVIDADE 2

A alternativa correta é **LETRA D**. A função logarítmica possui domínio em *x* > *0*, imagem em $\mathbb{R}$ (todos os números reais) e é crescente quando *a* > *1* e decrescente quando *0* < *a* < *1*.

Justificativa:

- O domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, *x* > 0, pois o logaritmo de números negativos ou zero não está definido.
- A imagem da função logarítmica é $\mathbb{R}$, ou seja, ela pode gerar qualquer número real.
- A função é crescente quando a base *a* > *1*, porque à medida que *x* aumenta, o valor de $f(x) = log_a x$ também aumenta. Já quando *0* < *a* < *1*, a função é decrescente, pois à medida que *x* aumenta, o valor de $f(x) = log_a x$ diminui.

ATIVIDADE 3

A função logarítmica é definida por $f(x) = log_a x$ e, quando a base *a* > *1* a função é crescente e quando *0* < *a* < *1*, a função é decrescente, logo analisando os itens teremos:

$a)\ f(x) = log_9 x$ — A base *a* = *9*, logo *a* > *1*, função crescente.

$b)\ f(x) = log_{\frac{1}{5}} x$ — A base $a = \frac{1}{5}$, logo *0* < *a* < *1*, função decrescente.

$c)\ y = log_{0,2} x$ — A base $a = 0,2$, logo *0* < *a* < *1*, função decrescente.

$d)\ y = log\ x$ — A base *a* = *10*, logo *a* > *1*, função crescente.

ATIVIDADE 4

Considere uma função $g : A \to B$ definida por $g(x) = log\, x$, teremos:
a) O domínio da função: *D(g)* = {1, 10, 100} e o Conjunto imagem *Im(g)* = {0, 1, 2}.
b) O valor de *g(10)* = 1
c) O valor de *x* para o qual *g(x)* = 2 é 100, pois *g(100)* = 2.

ATIVIDADE 5

Pela definição, o domínio de uma função $f(x) = log_a\, x$ está definido somente para valores positivos de *x*, ou seja, *x > 0*, independentemente do valor da base *a* (desde que *a > 0* e *a ≠ 1*), portanto:
a) Para a função $f(x) = log_5\, x$, a função está bem definida para x > 0, ou seja, *D(f)* = $\{ x \in \mathbb{R}_+^* \}$

b) Para a função $f(x) = log(x - 3)$, teremos a condição de existência:
$(x - 3) > 0 \Rightarrow x > 0 + 3 \Rightarrow x > 3$, logo: $D(f) = \{x \in R / x > 3\}$

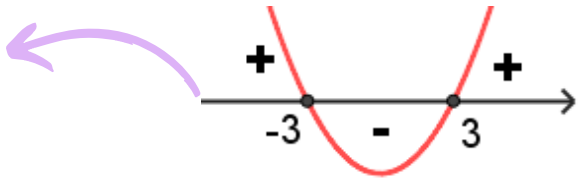
c) Para a função $f(x) = 5 + log_4\, 2x$, teremos a condição de existência:
$2x > 0 \Rightarrow x > \frac{0}{2} \Rightarrow x > 0$ Logo: $D(f) = \{x \in R / x > 0\}$

d) Para a função $f(x) = log_{1/2}(5x - 52)$, teremos a condição de existência:
$(5x - 52) > 0 \Rightarrow 5x > 0 + 52 \Rightarrow x > \frac{52}{5}$ Logo: $D(f) = \left\{x \in R / x > \frac{52}{5}\right\}$

e) Para a função $f(x) = log_3(x^2 - 9)$, teremos a condição de existência:
$(x^2 - 9) > 0$ Resolvendo a equação, teremos: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$
As raízes são **x = 3** e **x = - 3.**

Fazendo o estudo do sinal, onde *f(x)* > 0

Os valores que satisfazem a condição de existência do domínio são, x < - 3 e x > 3.
Logo, o domínio da função é:



ATIVIDADE 6

A pergunta pede para determinar o número total de anos *t* necessários para que o valor final *V(t)* do financiamento seja igual a R$ 440.000,00. Para isso utilizaremos a equação: $V(t) = 200\,000 \cdot (1,08)^t$

Vamos resolver a equação para *t*, substituindo *V(t)* = 440 000.

$$440\,000 = 200\,000 \cdot (1,08)^t \Rightarrow \frac{440\,000}{200\,000} = (1,08)^t \Rightarrow 2,2 = (1,08)^t$$

Agora, sabemos que $2,2 = (1,08)^t$ equivale a: $log_{1,08}\, 2,2 = t \;\therefore\; t = log_{1,08}\,(2,2)$

Ao realizar a mudança de base para a base 10 e considerando que log 2,2 ≈ 0,342 e log 1,08 ≈ 0,033, obtemos:

$$t = log_{1,08}\,(2,2) = \frac{log\,2,2}{log\,1,08} = \frac{0,342}{0,033} \approx 10,36$$

Assim, o tempo, em anos, necessário para quitar o financiamento está mais próximo de 10 anos.

Portanto, a alternativa correta é a **LETRA E.**

Lembrete ao(a) Professor(a): Alguns autores resolvem esta questão aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação para isolar o valor de *t*. Para simplificar o cálculo, adotamos as aproximações log 2,2 ≈ 0,342 e log 1,08 ≈ 0,033. Logo teríamos:

$$log\,2,2 = log\,(1,08)^t \Rightarrow t \cdot log\,(1,08) = log\,2,2 \Rightarrow t = \frac{log\,2,2}{log\,1,08} = \frac{0,342}{0,033} \approx 10,36$$

ATIVIDADE 7

Utilizando a expressão pH = −log [H⁺], teremos:

a) Para a concentração de íons de hidrogênio na solução de $10^{-5}\ mol/l$, iremos substituir [H⁺] na expressão e utilizar a propriedade do logaritmo de uma potência:

$$pH = -log[H^+] \Rightarrow pH = -log 10^{-5} \Rightarrow pH = -(-5) \cdot log\,10$$

$$pH = 5.1 = 5$$

b) O pH encontrado do cafezinho foi 5. Considerando que a escala de pH varia de 0 a 14, e que valores abaixo de 7 indicam soluções ácidas, podemos concluir que o café é uma solução ácida.

ATIVIDADE 8

Utilizando a função, $V(t) = log_2(t+4)$ teremos:

a) Substituímos *t* = 4 na função *V(t)*:

$$V(t) = log_2(t+4) \Rightarrow V(4) = log_2(4+4) \Rightarrow V(4) = log_2 8 = 3$$

Como o valor do imposto pago é denotado em milhares de reais, teremos:
3 . 1 000 = 3 000, ou seja, 3 mil reais.

b) Sabemos que o imposto pago será *V(t)* = 6 mil reais. Logo, a equação fica:

$6 = log_2(t+4)$

Para resolver essa equação, aplicamos a definição de logaritmo para reescrevê-la na forma exponencial:

$6 = log_2(t+4) \Rightarrow 2^6 = (t+4) \Rightarrow 64 = t+4 \therefore t = 64-4 = 60$

Portanto, o tempo necessário para que a empresa pague R$ 6 000,00 de imposto é: **t = 60 meses.**

ATIVIDADE 9

A fórmula geral para calcular a velocidade máxima de transmissão de sinais *V* (em bits por segundo) é dada por: $V_{max} = 3\,400 \cdot lo_2(x+1)$ e substituímos na equação:

$$\begin{matrix} V_{max} = 3\,400 \cdot lo_2(x+1) \\ 27\,200 = 3\,400 \cdot log_2(x+1) \end{matrix} \Rightarrow \frac{27\,200}{3\,400} = log_2(x+1) \Rightarrow 8 = log_2(x+1)$$

Para resolver essa equação, aplicamos a definição de logaritmo para reescrevê-la na forma exponencial:

$2^8 = x+1 \Rightarrow 256 = x+1 \therefore x = 256-1 = 255$

Portanto, a potência representada por *x* corresponde a uma velocidade máxima de 27 200 bits por segundo é: **x = 255 dBm** (Decibéis-miliwatt)



QUESTÃO 1

Para calcular a magnitude local *M* do terremoto, utilizando a fórmula fornecida e substituímos *A* = 2 000 μm e *f* = 0,2 Hz

$M = 3,3 + log\,(2\,000 \cdot 0,2) \Rightarrow M = 3,3 + log\,400$

Utilizando a propriedade do logaritmo de um produto, é possível resolver o *log 400*:

$log\,400 \Rightarrow log(4 \cdot 100) \Rightarrow log\,4 + log\,100 \Rightarrow log\,2^2 + log100 \Rightarrow 2 \cdot log\,2 + log\,100$

Considerando que $log\,2 \approx 0,30$, teremos: $2.(0,30) + 2 \Rightarrow 0,60 + 2 = 2,60$

Voltando com a função, teremos:

$$M_s = 3,3 + log400 \Rightarrow M_s = 3,3 + 2,60 \Rightarrow M_s = 5,90$$

Portanto, analisando a tabela é possível observar que 5,90 corresponde a um terremoto moderado, logo a resposta correta é a **LETRA C**

GRÁFICOS DA FUNÇÃO LOGARITMICA

ATIVIDADE 1

Considerando a função logarítmica definida em $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = log_4 x$, para cada item teremos:

a) $f\left(\frac{1}{4}\right) = log_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1$ pois, sabemos que: $4^{-1} = \frac{1}{4}$

$$f(1) = log_4 1 = 0$$

Para realizar o calculo de $f(2) = log_4 2$, utilizaremos as propriedades de Logaritmo e iremos considerar o valor aproximado $log\, 2 \approx 0,30$.

$$f(2) = log_4 2 = \frac{log\, 2}{log\, 4} = \frac{log\, 2}{log\, 2^2} = \frac{log\, 2}{2 \cdot log\, 2} = \frac{0,30}{2 \cdot (0,30)} = \frac{0,30}{0,60} = 0,5$$

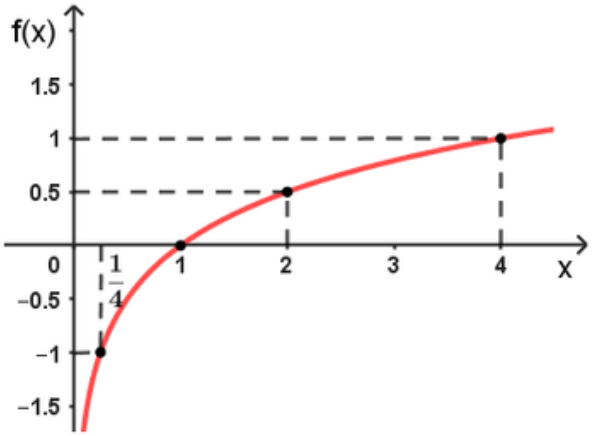
$$f(4) = log_4 4 = 1$$

Outra possibilidade:
Resolvendo através da definição de logaritmo e com noção de equação exponencial.

$$4^x = 2$$
$$(2^2)^x = 2^1$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2} = 0,5$$

b) Com base nos valores de x e y obtidos nos itens anteriores, teremos:

x	f(x)	(x , y)
$\frac{1}{4}$	-1	$\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
1	0	(1, 0)
2	0,5	(2; 0,5)
4	1	(4, 1)



c) Analisando o gráfico, é possível dizer que, quando *x* aumenta, o valor de *f(x)* também aumenta, mas de forma mais lenta. Ou seja, a função é crescente, mas de forma progressivamente mais suave à medida que *x* fica maior.

ATIVIDADE 2

A alternativa incorreta é a **LETRA E.**
Incorreto, porque a função logarítmica $f(x) = log_a x$ nunca passa pelo ponto (0, 1), independentemente da base *a*. A função logarítmica não é definida para *x* = 0, pois não existe *y* tal que $log_a 0$ tenha um valor real.

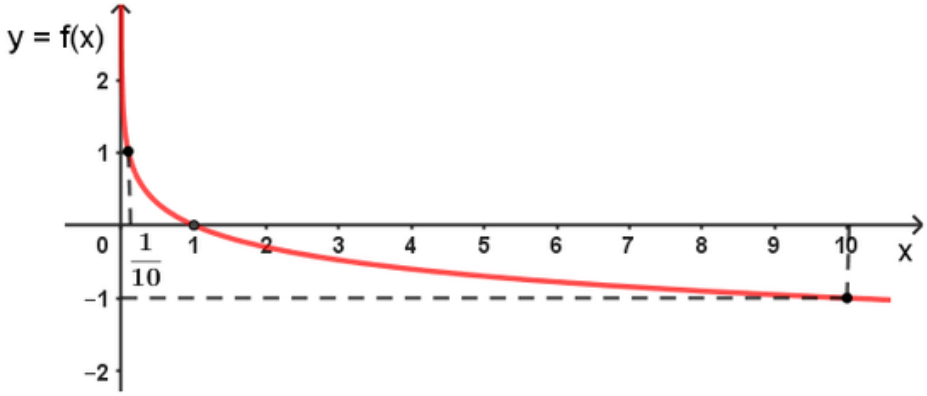
ATIVIDADE 3

Para a construção dos gráficos das funções logarítmicas a seguir, realizaremos cálculos com valores para x dentro do domínio da função, escolhendo valores que facilitem o cálculo dos logaritmos em relação à base *a*, a fim de simplificar a análise e a representação gráfica.

$a) f(x) = log_{\frac{1}{10}}(x)$ Identificamos que o domínio da função é x > 0, logo:

$f\left(\frac{1}{10}\right) = log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{10}\right) = 1$ $f(1) = log_{\frac{1}{10}} 1 = 0$ $f(10) = log_{\frac{1}{10}}(10) = -1$

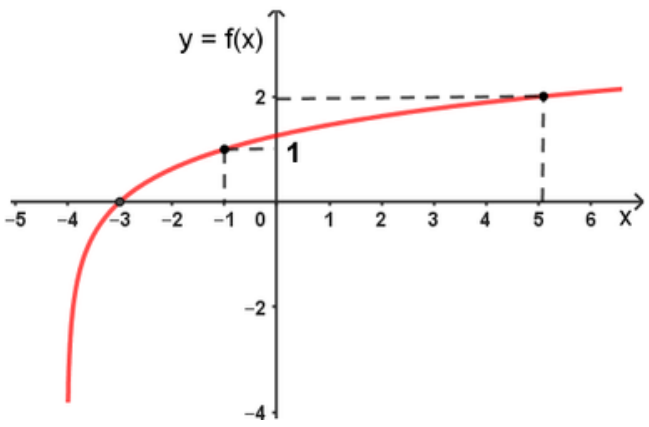
x	f(x)	(x , y)
$\frac{1}{10}$	1	$\left(\frac{1}{10}, 1\right)$
1	0	(1, 0)
10	-1	(10, -1)



$b) f(x) = log_3(x + 4)$ Identificamos que o domínio da função é x > -4, logo:

$f(-3) = log_3(-3 + 4) = log_3 1 = 0$
$f(-1) = log_3(-1 + 4) = log_3 3 = 1$
$f(5) = log_3(5 + 4) = log_3 9 = 2$

x	f(x)	(x , y)
-3	0	(-3, 0)
-1	1	(-1, 1)
5	2	(5, 2)



$c) f(x) = 3 + log_2(x)$ Identificamos que o domínio da função é x > 0, logo:

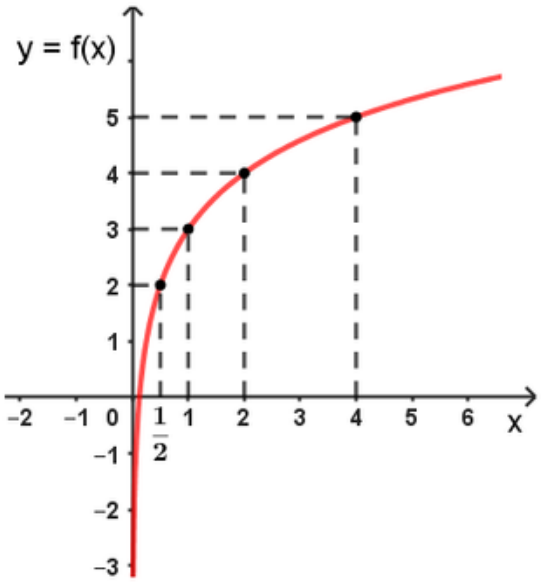
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + (-1) = 2$

$f(1) = 3 + log_2 1 = 3 + 0 = 3$

$f(2) = 3 + log_2 2 = 3 + 1 = 4$

$f(4) = 3 + log_2 4 = 3 + 2 = 5$

x	f(x)	(x , y)
$\frac{1}{2}$	2	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
1	3	(1, 3)
2	4	(2, 4)
4	5	(4, 5)



$d) f(x) = 3 \cdot log_2(x)$ Identificamos que o domínio da função é x > 0, logo:

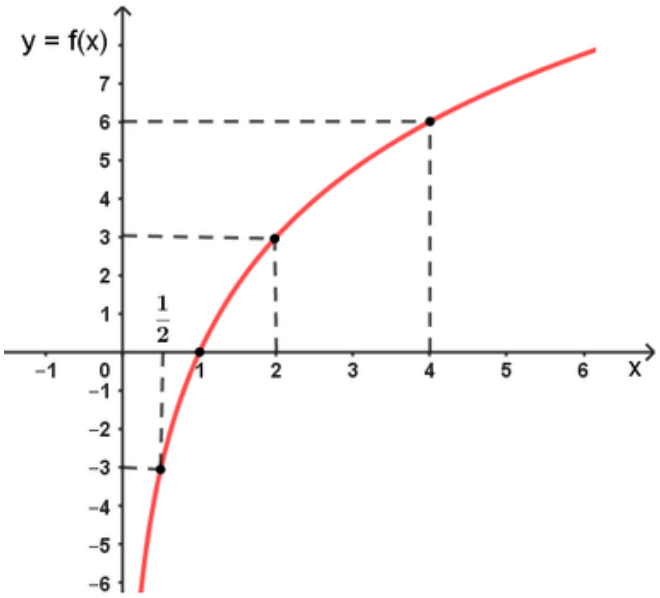
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot (-1) = -3$

$f(1) = 3 \cdot log_2 1 = 3 \cdot 0 = 0$

$f(2) = 3 \cdot log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

$f(4) = 3 \cdot log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

x	f(x)	(x , y)
$\frac{1}{2}$	-3	$\left(\frac{1}{2}, -3\right)$
1	0	(1, 0)
2	3	(2, 3)
4	6	(4, 6)



Lembrete ao(a) Professor(a): é importante destacar que, para cada função logarítmica apresentada, existe um domínio real específico, ou seja, os valores de x utilizados na atividade servem como pontos de referência, mas os alunos podem ter feito suas representações gráficas utilizando outros valores de referência. Isso não invalida suas respostas, desde que a representação gráfica siga os critérios/definição de uma função logarítmica.

ATIVIDADE 4

Ao analisar a representação gráfica da função *f(x)*, podemos identificar as seguintes características principais:

- O gráfico da função *f(x)* é crescente, ou seja, à medida que *x* aumenta, o valor de *f(x)* também aumenta. Isso implica que a base *a*, por definição deve ser maior que 1;
- O gráfico está definido apenas para *x* > *0*, o que significa que a função tem uma assíntota vertical em *x* = *0*.
- O gráfico intercepta o eixo *x* no ponto (1, 0), ou seja, para *x* = *1*, o valor da função é 0.
- Quando *x* = 9, o valor da função é *y* = 2, ou seja, *f(9)* = 2. Com base nas opções apresentadas, podemos concluir que a função logarítmica que atende a essa condição é $f(x) = log_3 x$, pois, para *x* = 9, temos $f(9) = log_3 9 = 2$.

Portanto, a lei de formação que define esta função é $f(x) = log_3 x$ onde a base do logaritmo é 3, o que a define completamente. A alternativa correta é a **LETRA C**.

ATIVIDADE 5

Vamos analisar cada uma das afirmações com base nas representações gráficas e nas leis de formação das funções fornecidas:

a) **Falso (F)**. Embora ambas as funções tenham base maior que 1, isso não significa que possuam a mesma taxa de crescimento. Funções logarítmicas com *a* > *1* e bases diferentes apresentam taxas de crescimento distintas: quanto menor a base, mais rápida é a taxa de crescimento. Como a base de *f(x)* é menor que a base de *g(x)* , a função *f(x)* cresce mais rápido que *g(x)*.

b) **Verdadeiro (V).**

c) **Verdadeiro (V).** A função *h(x)* tem uma assíntota vertical em *x* = 2, porque o logaritmo só é definido para valores *x* > 2.

d) **Falso (F).** A função *h(x)* **não** intercepta o eixo *x* no ponto de coordenadas (1, 0), mas sim no ponto (3, 0). Já as funções *f(x)* e *g(x)* interceptam o eixo *x* no ponto de coordenadas (1, 0).

e) **Verdadeiro (V).**

f) **Verdadeiro (V).**

g) **Verdadeiro (V).**

h) **Verdadeiro (V).**

Professor(a), *nesta atividade 5, é importante discutir os motivos que tornam cada frase verdadeira ou falsa. Assim, se por questões de tempo não puder abordar todas elas, selecione algumas e realize coletivamente com a turma.*

i) **Falso (F)**. A função $f(x) = log_{1,5}(x)$ não está definida para x = 0, pois o logaritmo de 0 não existe. Portanto, o valor de f(0) não pode ser −6 (nem pode ser definido).

ATIVIDADE 6

Analisando a função $f(x) = log_{\frac{1}{4}}(x-1)$, é possível identificar que:

- É uma função logarítmica com base $a = \frac{1}{4}$, portanto é um número que está entre 0 e 1, logo é uma função decrescente. Isso significa que à medida que *x* aumenta, o valor de *f(x)* diminui.
- A função tem um deslocamento horizontal devido ao termo (x − 1), o que faz com que a função tenha uma assíntota vertical em *x* = 1, pois a função tem domínio para *x* > 1.
- A função intercepta o eixo *x* quando *f(x)* = 0. Para encontrar esse ponto, basta resolver $log_{\frac{1}{4}}(x-1) = 0$, ou seja: $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = x - 1 \Rightarrow 1 = x - 1 \therefore x = 1 + 1 = 2$

  Portanto, a função intercepta o eixo *x* no ponto (2, 0).
- Quando *x* = 5, a imagem da função é - 1 , ou seja, ao substituir a variável *x por 5* na função logarítmica, teremos: $f(5) = log_{\frac{1}{4}}(5-1) \Rightarrow f(5) = log_{\frac{1}{4}}(4) = -1$

Portanto, a representação gráfica apresentada no item B satisfaz todas essas condições. Alternativa correta é a **LETRA B**.

ATIVIDADE 7

A função que descreve a temperatura *T* do forno em função do tempo *t* é dada por:

$$T = 30 \cdot log_2(3t+1) + 25$$

a) Substituímos *t* = 0 na equação: $T = 30 \cdot log_2(3 \cdot 0 + 1) + 25 \Rightarrow T = 30 \cdot log_2 1 + 25$

$T = 30 \cdot 0 + 25 \Rightarrow T = 0 + 25 \Rightarrow T = 25\ ^0\text{C}$

b) Substituímos *t* = 5 na equação: $T = 30 \cdot log_2(3 \cdot 5 + 1) + 25 \Rightarrow T = 30 + log_2(16) + 25$

$T = 30 \cdot 4 + 25 \Rightarrow T = 120 + 25 = 145\ ^0\text{C}$

c) Qual é o valor de *t* (em minutos) para que *T* = 205 °C? Para encontrar esse valor, substituímos *T* = 205 na equação:

$205 = 30 \cdot log_2(3t+1) + 25 \Rightarrow 205 - 25 = 30 \cdot log_2(3t+1) \Rightarrow \frac{180}{30} = log_2(3t+1)$

$6 = log_2(3t+1) \therefore log_2(3t+1) = 6$

Agora, sabemos que $log_2(3t+1) = 6$ equivale a $2^6 = (3t+1)$, logo:

$(3t+1) = 2^6 \Rightarrow 3t + 1 = 64 \Rightarrow 3t = 64 - 1 \therefore t = \frac{63}{3} = 21$

Portanto, a temperatura atingirá 205 °C após **21 minutos**.

ATIVIDADE 8

Professor(a), *você pode levantar algumas discussões sobre o tema tratado e promover um diálogo de conscientização.*

A função fornecida para modelar a diminuição do nível de álcool no sangue ao longo do tempo é: $f(x) = \frac{14 + 10 \cdot log\, x}{3}$

Substituir o valor de *x = 2,5 mg/l* na função e sabendo que : $log(2,5) \approx 0,40$

$$f(2,5) = \frac{14 + 10 \cdot log\,(2,5)}{3} \Rightarrow f(2,5) = \frac{14 + 10 \cdot 0,40}{3} \Rightarrow f(2,5) = \frac{14 + 4}{3}$$

$$f(2,5) = \frac{18}{3} = 6$$

Professor(a), *outra possibilidade é considerar log (2,5) como* $log\left(\frac{25}{10}\right)$ *e, aplicando a propriedade operatória, desenvolver log 25 - log 10.*

Portanto, o tempo necessário para que o motorista atinja o limite mínimo de álcool no sangue, de acordo com o modelo fornecido, é aproximadamente **6 horas**. Isso significa que, após 6 horas de ter interrompido o consumo de bebida alcoólica, ele estará apto a dirigir, de acordo com o modelo matemático fornecido.

ATIVIDADE 9

Para calcular o nível de pressão sonora N em decibéis de um fone de ouvido cuja intensidade sonora é $I = 10^{-3}\, W/m^2$, utilizamos a fórmula da Lei de Weber-Fechner: $N = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ Onde: $I = 10^{-3}\, W/m^2$ é a intensidade sonora; e $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$ é a intensidade de referência.

Substituímos os valores na fórmula: $N = 10 \cdot log\left(\frac{10^{-3}}{10^{-12}}\right) \Rightarrow N = 10 \cdot log(10^{-3-(-12)})$

$$N = 10 \cdot log\,(10^9) \Rightarrow N = 10 \cdot 9\, log\,(10) \Rightarrow N = 10 \cdot 9 \cdot 1 = 90\, dB$$

Portanto, o nível de pressão sonora do fone de ouvido com intensidade $10^{-3}\, W/m^2$ é 90 dB. Alternativa correta **LETRA C**.

ATIVIDADE 10

A função que descreve a altitude *h* em função da pressão atmosférica *p* é dada por:

$$h(p) = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$$

No problema, é fornecido que a pressão atmosférica no instante considerado é *p* = 0,5 atm , e que $log_2 \approx 0,30$

Primeiro, substituímos o valor de p na equação: $h(0,5) = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{1}{0,5}\right)$

Sabemos que $\left(\frac{1}{0,5}\right) = 2$ ou $\left(\frac{1}{0,5}\right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{10}}\right) = \left(\frac{10}{5}\right) = 2$, portanto: $h(0,5) = 20 \cdot log\, 2$

Agora, substituímos : $log_2 \approx 0,30$

$$h(0,5) = 20 \cdot log\, 2 \Rightarrow h(0,5) = 20 \cdot 0,30 \Rightarrow h(0,5) = 6$$

Portanto, a altitude *h* do avião nesse instante é 6 km.
Alternativa correta **LETRA B**

FUNÇÃO LOGARÍTMICA COMO INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

ATIVIDADE 1

Alternativa correta é a **LETRA C.**
A função logarítmica $f(x) = log_8 x$ e a função exponencial $g(x) = 8^x$, são funções relacionadas entre si, pois uma é a função inversa da outra. Pela definição de logaritmo teríamos que: $log_8 x = y \therefore 8^y = x$ logo, para encontrar a função inversa, trocamos as variáveis x e y. Portanto teremos: $y = 8^x \therefore g(x) = 8^x$

ATIVIDADE 2

Alternativa correta é a **LETRA B**.
Sabemos que o termo $f^{-1}(x)$, representa a função inversa de *f(x)*. Agora seguiremos o passo a passo para determinar a função inversa:

- A função original é: $f(x) = 3^x$
- Substituímos *f(x)* por *y* para facilitar a manipulação: $y = 3^x$
- Para encontrar a função inversa, trocamos as variáveis x e y. Isso nos dá: $x = 3^y$
- Agora, precisamos isolar *y* em termos de *x*. Para isso, aplicamos a definição de logaritmo, onde $log_a b = c$, é igual a $a^c = b$. Desta forma teremos:

$$log_3 x = y \ \therefore \ y = log_3 x$$

Assim, a função inversa de $f(x) = 3^x \ e \ f^{-1}(x) = log_3 x$

ATIVIDADE 3

Alternativa incorreta é a **LETRA E**.
Analisando as informações nos gráficos 1 e 2, podemos concluir que o gráfico 1 representa a função exponencial $f(x) = 10^x$. Assim, sua função inversa, mostrada no gráfico 2, é dada por $g(x) = log_{10} x$, ou seja, com base 10, e não $g(x) = log_{\frac{1}{10}} x$, como foi apresentado na alternativa E, estando incorreta a resposta.

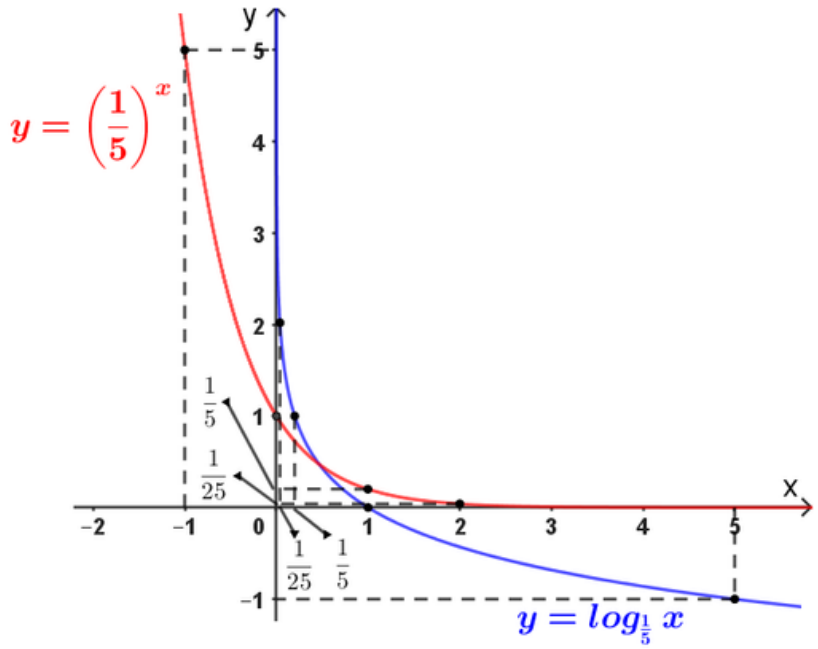
ATIVIDADE 4

a) Para ajudar Lucas a completar a Tabela 1, basta realizar os cálculos pendentes com base na função: $y = f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Agora, para auxiliar João em sua tarefa de preencher a Tabela 2 com os valores correspondentes de *x* e *y*, devemos observar que esses valores representam a função inversa de *f(x)*, ou seja, uma função logarítmica. Portanto, basta trocar as variáveis *x* e *y* da Tabela 1.

Tabela 1		
x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	***(x, y)***
-1	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5^1 = 5$	(-1, 5)
0	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$	(0, 1)
1	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$	$\left(1, \frac{1}{5}\right)$
2	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$	$\left(2, \frac{1}{25}\right)$

Tabela 2	
x	$y = log_{\frac{1}{5}} x$
5	-1
1	0
$\frac{1}{5}$	1
$\frac{1}{25}$	2

b) Após preencher as Tabelas 1 e 2 com os valores correspondentes de x e y, basta representar os pares ordenados no plano cartesiano, utilizando as coordenadas x e y da função *f(x)* e sua inversa $f^{-1}(x)$.



c) Indicando o domínio e o conjunto imagem para as funções *f(x)* e $f^{-1}(x)$, teremos:

- Para a função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, o domínio de *f(x)*: x ∈ $\mathbb{R}$ (todos os números reais). Conjunto Imagem de *f(x)*: y > 0. Assim: D(f) = $\mathbb{R}$; Im (f) = $\mathbb{R}_+^*$.

- Para a função Logarítmica $f^{-}1(x) = log_{\frac{1}{5}}\, x$, o domínio de $f^{-1}(x)$: x > 0. Conjunto Imagem $f^{-1}(x)$: y ∈ $\mathbb{R}$ (todos os números reais). Assim: D(f) = $\mathbb{R}_+^*$; Im(f) = $\mathbb{R}$.

Observe que o conjunto imagem de $f^{-1}(x)$ corresponde ao domínio de *f(x)*.

d) Observando os dados de x e y nas Tabelas 1 e 2, bem como as representações gráficas das funções *f(x)* e sua inversa $f^{-1}(x)$, é possível afirmar que ambas as funções são **decrescentes**. Isso ocorre porque, por definição, a base *a* das funções é $\frac{1}{5}$, ou seja, 0 < a < 1, o que caracteriza tanto as funções exponenciais quanto as logarítmicas como **decrescentes**.

Além disso, observa-se que tanto para a função *f(x)* quanto para sua inversa $f^{-1}(x)$, à medida que *x* aumenta, o valor das funções (y) diminui. No entanto, o decrescimento de *f(x)* ocorre de maneira mais acentuada, enquanto $f^{-1}(x)$ decresce de forma mais lenta e gradual.

ATIVIDADE 5

Considere a função logarítmica *f(x)* dada por $f(x) = log_6\, x$, teremos:

$a)\ f(216) = log_6\, 216 = 3$

$b)\ D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$c)\ Im(f) = \mathbb{R}$

$d) f(x) = 2 \Rightarrow log_6\, x = 2$

$6^2 = x\ \therefore\ x = 36$

$e) f^{-1}(x) = 6^x$

$f) f^{-1}(1) = 6^1 = 6$

Obtendo a função inversa de *f(x)*.

Para encontrar a função inversa, trocamos as variáveis x e y. Isso nos dá:

$$f(x) = y \Rightarrow y = log_6\, x\ \therefore\ x = log_6\, y$$

Agora, precisamos isolar *y* em termos de *x*. Para isso, aplicamos a definição de logaritmo obtendo a equação:

$$6^x = y\ \therefore\ f^{-1}(x) = 6^x$$

ATIVIDADE 6

Analisando o enunciado e as funções inversas podemos dizer que:
a) A função $N(t) = N_0 \cdot e^{0,15 \cdot t}$ descreve o crescimento exponencial do número de usuários do aplicativo ao longo do tempo. Isso significa que **à medida que o tempo *t* aumenta, o número de usuários *N(t)* cresce rapidamente**, **com a taxa de crescimento sendo proporcional ao número de usuários presentes a cada momento**.
Domínio da função é t ≥ 0, ou seja, $D(f) = \{t \epsilon \mathbb{R} / t \geq 0\}$ **.** Embora o domínio da função exponencial seja definido para todos os números reais, neste caso a variável independente *t* representa o tempo, medido em meses desde o lançamento. Como o tempo não pode ser negativo, o domínio é restrito a $t \geq 0$.
A imagem da função é *N(t)* ≥ N_0, sendo que, **$N_0 > 0$**. A imagem representa todos os valores possíveis para *N(t)*, ou seja, o número de usuários que sempre será maior ou igual ao número inicial, e nunca será negativo ou nulo, pois a função exponencial nunca atinge zero.
b) A função logarítmica $t = \frac{log_e\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{0,15}$ representa o tempo necessário para atingir um número específico de usuários *N(t)*. Em outras palavras, **a função indica quanto tempo *t* é necessário para que o número de usuários cresça de N_0 para *N(t)*, e devido a natureza logarítmica da função, o crescimento do tempo é lento.** O valor de *t* aumenta à medida que o número de usuários *N(t)* cresce, uma vez que, para um maior número de usuários, o tempo necessário também aumenta.
O domínio da função logarítmica é *N(t)* > N_0, sendo que, $N_0 > 0$. O número de usuários deve ser maior que o número inicial, pois estamos interessados no tempo necessário para aumentar a base de usuários. Como *N(t)* cresce exponencialmente, o domínio é restrito a $N(t)/N_0 > 0$, ou seja, o número de usuários N_0 e *N(t)* deve ser maior que zero para que a função logarítmica tenha um valor definido.

A imagem da função logarítmica é *t* ≥ 0, ou seja, $Im = \{t \epsilon \mathbb{R} / t \geq 0\}$. Embora a imagem da função logarítmica seja definida para todos os números reais, neste caso, a variável dependente *t* representa o tempo, medido em meses desde o lançamento do aplicativo, já que o número de usuários *N(t)* pode crescer indefinidamente a partir desse momento. Como o tempo não pode ser negativo, a imagem é restrita a $t \geq 0$.

Professor(a), a intencionalidade desta atividade 6 é analisar cada função a partir do estudo que realizamos sobre características da função exponencial e sua inversa, destacando que o crescimento de *f(x)* pode ocorrer de forma rápida ou lenta, dependendo do tipo de função. Abordamos o domínio e a imagem das funções, considerando as condições especiais relacionadas ao fato de *t* representar o tempo, em meses.

ATIVIDADE 7

Para resolver a equação exponencial $10^x = 3$ sem usar uma calculadora, o aluno pode reescrever a equação na forma inversa, que é o logaritmo. Assim, a equação pode ser expressa como: $log_{10} 3 = x, logo : x = log 3$
Ou seja, o aluno expressou a solução como o logaritmo de 3 na base 10. Resposta correta **LETRA D.**

ATIVIDADE 8

Queremos saber o valor de $[H^+]$ (a concentração de íons hidrogênio), e se o pH da substância é 10, iremos substituir na equação: $pH = -log\,[H^+] \Rightarrow 10 = -log\,[H^+]$

Agora, sabemos que log esta na base 10, por isso multiplicando ambos os lados da equação por -1 e isolamos o $[H^+]$, eliminando o logaritmo, aplicando a sua função inversa, que é a exponenciação na base 10.

$$pH = -log\,[H^+] \Rightarrow 10 = -log\,[H^+] \Rightarrow -10 = log_{10}\,[H^+] \therefore [H^+] = 10^{-10}$$

Assim, a concentração de íons $[H^+]$ é $10^{-10}\ mol/l$. Alternativa correta é a **LETRA A**.

ATIVIDADE 9

O problema nos pede para calcular a intensidade sonora *I* quando o nível de ruído é de 100 dB, por isso podemos substituímos *R* = 100 na fórmula, obtendo:

$$R = 120+10{\cdot}log\,I \Rightarrow 100 = 120+10{\cdot}log\,I \Rightarrow 100-120 = 10{\cdot}log\,I \Rightarrow \frac{-20}{10} = log\,I \Leftrightarrow log\,I = -2$$

Agora, sabemos que log está na base 10 e para eliminar o logaritmo, aplicamos a função inversa, que é a exponenciação na base 10:

$$log_{10}\,I = -2 \therefore 10^{-2} = I \qquad \text{Logo: } I = 10^{-2}$$

Assim, a intensidade sonora necessária para um som de 100 dB é $I = 10^{-2}\,W/m^2$. Portanto, a alternativa correta é a **LETRA B.**

ATIVIDADE 10

Dado que o paciente ingeriu uma super dose de 500 mg, temos $Q_0 = 500\ mg$. A questão pede para encontrar o tempo *t* em que a quantidade de medicamento no organismo seja igual a 90 mg, ou seja, *Q(t)* = 90 mg. Substituímos esses valores na fórmula:

$$Q(t) = Q_0 \cdot (0,5)^t \Rightarrow 90 = 500 \cdot (0,5)^t \Rightarrow \frac{90}{500} = (0,5)^t \Rightarrow 0,18 = (0,5)^t$$

Agora, sabemos que $0,18 = (0,5)^t$ equivale a $log_{0,5}\, 0,18 = t$ e que podemos aplicar a mudança de base para a base 10, logo obtemos:

$$log_{0,5}\, 0,18 = t \ \therefore\ t = log_{0,5}\,(0,18) \Rightarrow t = \frac{log\, 0,18}{log\, 0,5}$$

Utilizamos o valor log 5 ≈ 0,70 para determinar log 0,5. Utilizamos a propriedade de logaritmo de um quociente:

$$log(0,5) = log\left(\frac{5}{10}\right) = log\, 5 - log\, 10 = 0,70 - 1 = -0,30.$$

Com o valor de log (0,5) ≈ -0,30 e log (0,18) ≈ -0,74, podemos então substituir na equação para calcular o valor de t.

$$t = \frac{log\,(0,18)}{log\,(0,5)} = \frac{-0,74}{-0,30} \approx 2,47$$

Portanto, após aproximadamente 2,47 horas, a quantidade de medicamento no organismo será igual a 90 mg. Alternativa correta é a **LETRA C**.