Governo do Estado do Espírito Santo
Secretaria da Educação
Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE *Matemática* PARA O ENSINO FUNDAMENTAL



Governo do Estado do Espírito Santo
Secretaria de Estado da Educação
Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo

Vitor Amorim de Angelo
Secretário de Estado da Educação

Subsecretaria de Educação Básica e Profissional

Andrea Guzzo Pereira
Subsecretária de Estado de Educação Básica e Profissional

Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental - Geief

Rafaela Teixeira Possato de Barros
Gerente

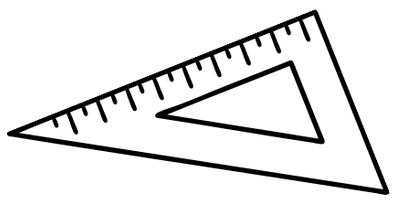
Débora Aparecida Furieri Matos
Subgerente

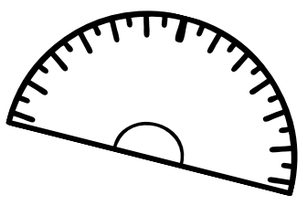
Alex Almeida Rosa
Jéssica Monteiro Falquetto
Stevão Carneiro de Sousa
Equipe responsável

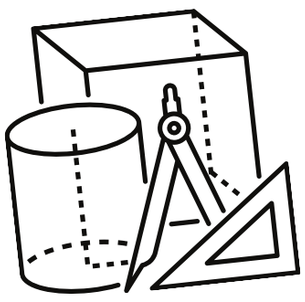
Adriana Lisboa Chaves Rezende
Antonio da Silva Pereira Neto
Eulessia Costa Silva
Ivana Lima Brito
Jéssica Monteiro Falquetto
Júlio César Campos
Luara Zucolotto Afonso
Monalisa Di Paula Silva de Albuquerque
Roque Alves da Silva Júnior
Simone Maria Oliveira Gonçalves
Tatiana Gomes dos Santos Peterle
Equipe Técnica da Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

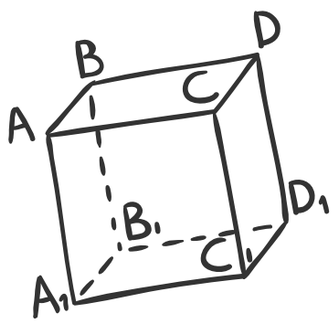
Adalzira Ribeiro da Hora
Sandra Mara Moura Machado
Equipe de Apoio da Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

APRESENTAÇÃO

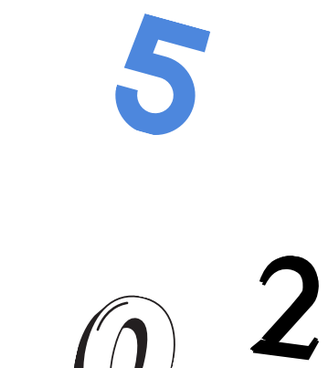


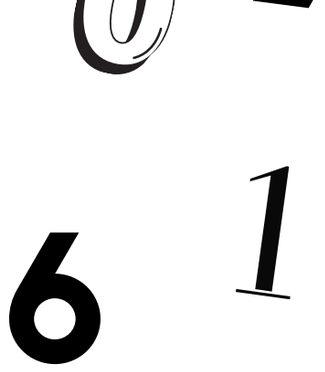












Prezado(a) professor(a),

A educação contemporânea tem sido profundamente marcada por desafios relacionados ao letramento matemático, contexto em que a experimentação matemática emerge como um imperativo educacional e se constitui fator essencial à vivência escolar e cidadã e à intervenção no mundo.

Pensando nisso, com vistas a subsidiar o desenvolvimento da experimentação matemática do 5º ao 9º ano, a Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental - Geief elaborou o documento *Práticas Experimentais de Matemática no Ensino Fundamental.*

O objetivo é que, a partir deste material, os(as) professores de Matemática disponham de mais um subsídio para desenvolver as aprendizagens dos(as) estudantes de forma contextualizada e significativa.

Assim, abarcando diferentes metodologias de ensino e considerando as distintas formas de aprender dos(as) estudantes, propomos o desenvolvimento de práticas que contribuam para a ampliação e o aprofundamento de importantes conhecimentos matemáticos do 5º ao 9º ano do ensino fundamental.

Desse modo, professor(a), desejamos que estas práticas fomentem a sua práxis pedagógica voltada à abordagem crítica e reflexiva dos conhecimentos matemáticos, contando, para isso, com a sua preciosa contribuição, elemento essencial para o sucesso educacional pelo qual almejamos.

Bom trabalho!

Por que promover práticas experimentais de Matemática?

Professor(a), o dinamismo que marca a sociedade contemporânea exige práticas de ensino cada vez mais diversificadas, que atendam às diferentes expectativas e necessidades de aprendizagem dos(as) estudantes. Desse modo, concebemos que o trabalho com práticas experimentais de Matemática pode fomentar o(a):

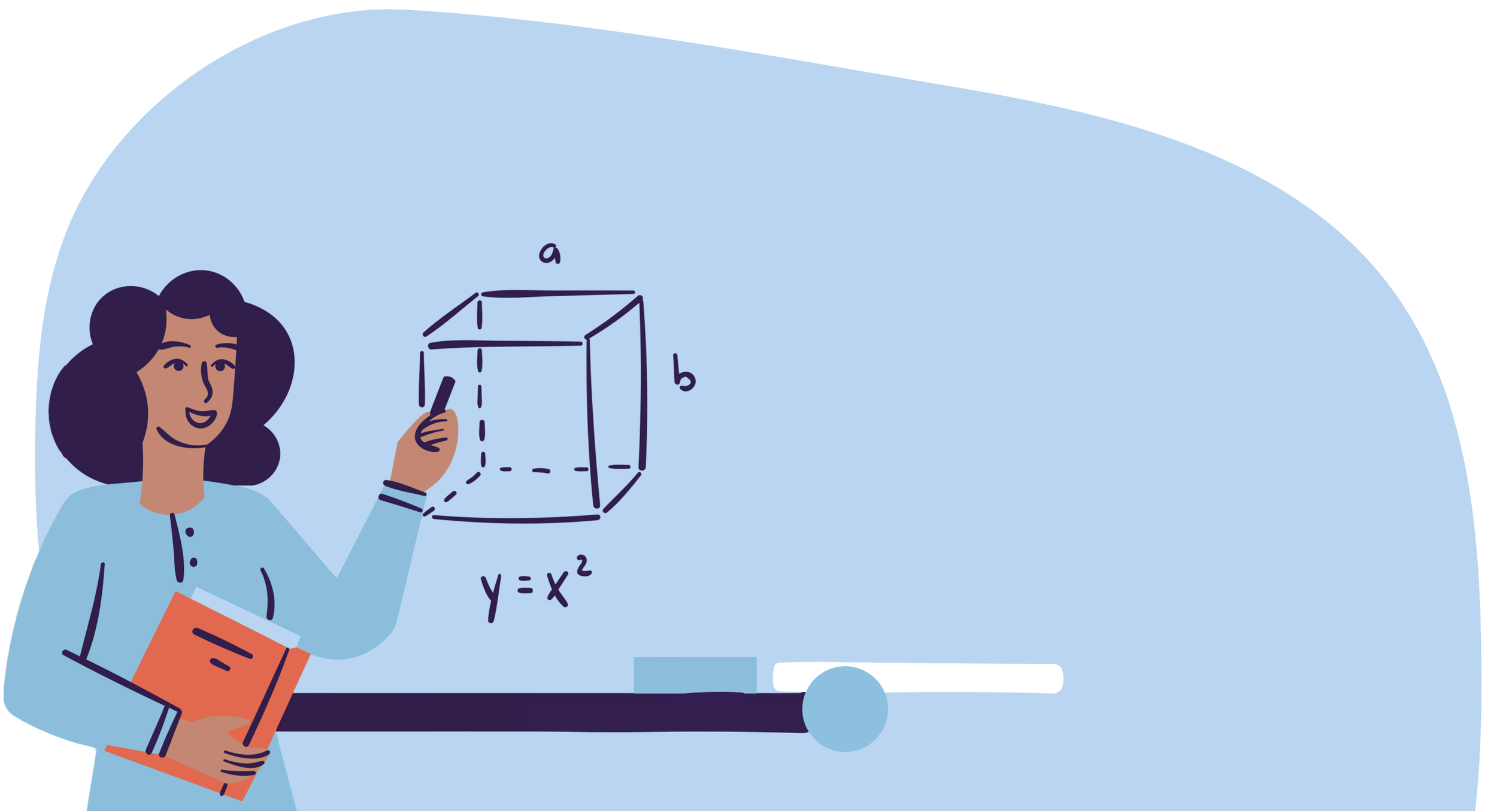
Desenvolvimento e consolidação de habilidades: a realização de experimentos contribui para o desenvolvimento de habilidades essenciais, sobretudo aquelas cujos resultados estão fragilizados no ensino fundamental anos finais. A abordagem prática, aliada à ludicidade, ajuda a ilustrar conceitos, evidenciando sua aplicabilidade em situações concretas, o que amplia as possibilidades de aprendizagem dos(as) estudantes.

Pensamento crítico: a experimentação matemática instiga o pensamento crítico, uma vez que, por meio de experiências, os(as) estudantes aprendem a formular perguntas e a levantar hipóteses, tendo a oportunidade de refletir, a partir da mediação do(a) professor(a), sobre a própria construção de conhecimentos.

Compreensão e aplicação da lógica matemática: os diferentes conhecimentos que compõem a vida cotidiana são fundamentalmente perpassados pela lógica matemática, o que torna imprescindível sua compreensão e aplicação pelos(as) estudantes.

Engajamento: A vivência com práticas experimentais pode motivar os(as) estudantes ao promover um contato mais dinâmico e lúdico com os diferentes conhecimentos, constituindo um contexto mais propício ao estreitamento do vínculo dos(as) estudantes com os seus estudos.

Combate ao estigma de que a matemática é difícil e inacessível: a cultura de que a matemática é difícil e inacessível se configura como um obstáculo ao processo educacional que urge ser mitigado. Ao vivenciar experiências com a matemática, intencionamos que os(as) estudantes percebam que é possível aprendê-la (e de diferentes formas).



As práticas experimentais de matemática estão estruturadas nas seguintes seções:



APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

Nesta seção, apresentamos a fundamentação teórica que embasa a prática proposta.



OBJETIVO DA AULA

Nesta seção, detalhamos o objetivo da aula, com vistas a contribuir para a orientação do trabalho docente.



DESENVOLVIMENTO

Nesta seção, detalhamos os procedimentos metodológicos necessários à realização da prática, indicando as etapas de execução da prática experimental.



CONSIDERAÇÕES FINAIS E AVALIAÇÃO

Aqui, dispomos os pontos de diálogo necessários ao encerramento da execução da prática, com reflexões e possíveis conclusões que devem ser pensadas com os(as) estudantes.



JOGOS MATEMÁTICOS

Pensando na utilização de jogos analógicos e digitais como ferramentas de promoção da aprendizagem lúdica, as práticas experimentais são complementadas com jogos que versam sobre as temáticas das práticas propostas.

SUMÁRIO

CLIQUE NAS AULAS PARA ACESSÁ-LAS

PRÁTICA 1: EXPLORANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE FRAÇÕES POR MEIO DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS 2

PRÁTICA 2: IDENTIFICANDO O ALGORITMO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E DESENHANDO SUA ESPIRA**L**.....17



...

Habilidade: EF07MA12/ES Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Descritores Saeb:

- 9N1.5 – Calcular o resultado de adições, subtrações, multiplicações ou divisões envolvendo números reais.
- 9N2.1 – Resolver problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números reais, inclusive notação científica.

Descritor Paebes:

- D024_M Resolver problema com números racionais, envolvendo diferentes significados das operações.

Objeto de conhecimento:

- Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.

Expectativas de aprendizagem:

- Modelar e resolver problemas envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Materiais necessários:

- Folhas de papel sulfite (A4)
- Copos descartáveis

APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

Professor(a), esta prática tem como objetivo levar os estudantes a compreenderem a fração a partir da ideia de inteiro, utilizando a folha como referência. A proposta busca favorecer a construção dos significados de fração como partes de um todo, medida, quociente e operador, por meio de ações de partição, comparação e transformação do inteiro.

A partir do momento em que o(a) estudante associa a folha à ideia de inteiro, os significados atribuídos a esse objeto passam a se conectar aos objetos matemáticos, possibilitando a construção de noções de medida, partes de um todo, fração como quociente e fração como operador.

A ideia de partes de um todo se evidencia quando consideramos a folha como um inteiro e realizamos ações de partição em porções iguais. Já para o entendimento da fração como medida, faz-se necessária uma mediação intencional do(a) professor(a), de modo que os(as) estudantes possam relacionar as frações às medidas. Nessa prática, surgem oportunidades de trabalhar com frações provenientes de divisões exatas, como, por exemplo, um quarto mais um quarto da metade do inteiro, evidenciando que são necessárias duas metades para compor um inteiro.

Quando o(a) estudante aplica a ideia de fração como quociente para determinar uma parte — como calcular um quinto da folha —, realiza uma redução do tamanho original até alcançar a dimensão correspondente a um quinto. Nesse processo, do ponto de vista geométrico, observa-se um exemplo de fração como operador.

Por fim, convidamos o(a) professor(a) a não se fixar tão somente na execução da prática, mas de ir além explorando as oportunidades didáticas no decorrer da prática em si, pois tornará as aulas mais ricas em produção de significados para os estudantes, considerando que a habilidade EF07MA12/ES é um bom ponto de partida para estudantes que estão retornando do período de férias.

OBJETIVO DA AULA

- Compreender os diferentes significados das frações — partes de um todo, medida, quociente e operador — a partir da divisão e transformação de um inteiro.

1. Retomada inicial

Professor(a), inicie a aula retomando conhecimentos previamente estudados, com o objetivo de ativar os saberes dos(as) estudantes e contextualizar a prática. Para isso, conduza a discussão por meio de questionamentos como:

- O que é uma fração para vocês?
- Quando dizemos “um meio” ou “um quarto”, do que estamos falando exatamente?
- Uma fração sempre representa uma parte de alguma coisa? De quê?
- É possível ter frações diferentes que representem a mesma quantidade?
- Quando eu aplico uma fração sobre um inteiro, o que acontece com ele?

Registre no quadro as contribuições dos(as) estudantes, organizando as ideias principais e retomando, quando necessário, noções relacionados a frações.

Professor(a), nesta prática optamos por trabalhar duas situações-problemas, a primeira envolvendo multiplicação e a segunda divisão de frações. Se não achar necessário trabalhar as duas situações, escolha a que mais atenda a necessidade das turmas.

2. Prática a partir de um problema:

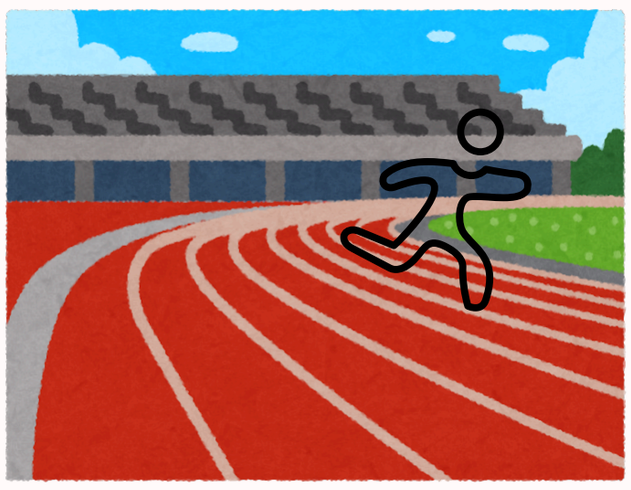
Professor(a), se possível leia o problema com a turma e faça questionamentos se for necessário. Após a leitura, sugerimos que organize a turma em grupos para que haja discussões durante a resolução da atividade. Caso necessário, estimule a interação entre os/as estudantes.

1ª situação problema: Multiplicação de frações

Meu primo passou no teste objetivo para o concurso dos bombeiros, durante a seleção existe a avaliação física, ele está treinando para obter condicionamento físico mínimo para aprovação, no caso 2,4km no tempo máximo de 12 minutos com o objetivo de se acostumar a velocidade mínima para aprovação no concurso, quando se cansa para e vai embora.

- No primeiro dia, ele percorreu 2/5 da distância total do circuito (2,4 km).
- No segundo dia, ele percorreu 3/4 da distância que havia corrido no primeiro dia.

Qual foi a distância total percorrida por ele ao termino de dois dias de treino?



Professor(a), explore a interpretação do problema, verifique com os estudantes o entendimento do problema, o tempo e a velocidade são elementos no texto em que possuem caráter contextual, sendo assim, verifique se os estudantes efetivamente entenderam que no primeiro dia, foi percorrido **dois quintos** de 2,4km e que no segundo dia, percorreu **três quartos do dia anterior,** sendo assim é necessário que eles percebam a necessidade de calcular a fração de uma fração.

Após a organização dos grupos, dê tempo para que os(as) estudantes explorem diferentes métodos resolutivos, é possível que tentem resolver algebricamente, por etapas ou mesmo via algoritmo, deixe que apresentem diferentes possibilidades. É provável que emerjam dos grupos um caminho resolutivo no qual os cálculos ocorrem em duas etapas, 2/5 de 2,4km que resulta 0,96km posteriormente ¾ de 0,96km resultando em 0,72km. Se houver grupos que não tenham elaborado nenhuma resposta, trataremos do problema geometricamente.



Se preferir podemos revisar essa etapa resolutiva agora, mas recapitularemos à resolução no final do problema.

DETERMINANDO DOIS QUINTOS DE 2,4KM

$$\frac{2}{5} \ de \ 2,4 \ km$$

$$\frac{2}{5} \times 2,4$$

$$\frac{(2 \times 2,4)}{5}$$

$$\frac{(4,8)}{5} = 0,96 \, \text{km}$$

Durante o calculo, o “de” se torna multiplicação, e o traço de fração indica divisão sendo assim, multiplicamos a parte de cima e dividimos o resultado pelo denominador.



DETERMINANDO TRÊS QUARTOS DE 0,96KM

$$\frac{3}{4} \ de \ 0,96 \ km$$

$$\frac{3}{4} \times 0,96$$

$$\frac{(3 \times 0,96)}{4}$$

$$\frac{(2,88)}{4} = 0,72 \, \text{km}$$

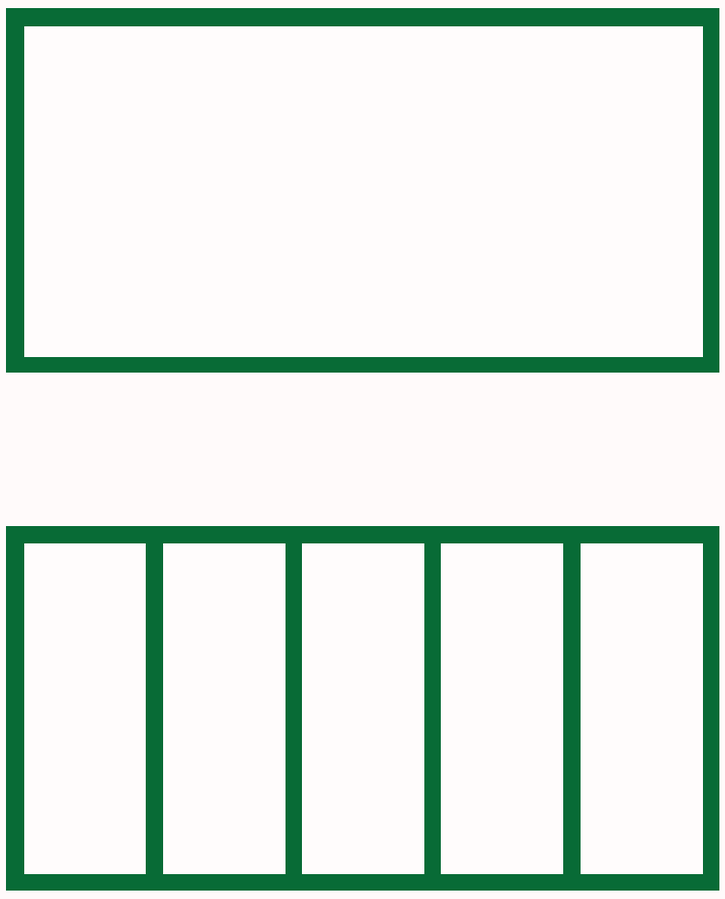
DETERMINANDO A RESPOSTA FINAL:

1º DIA DE TREINO + 2º DIA DE TREINO

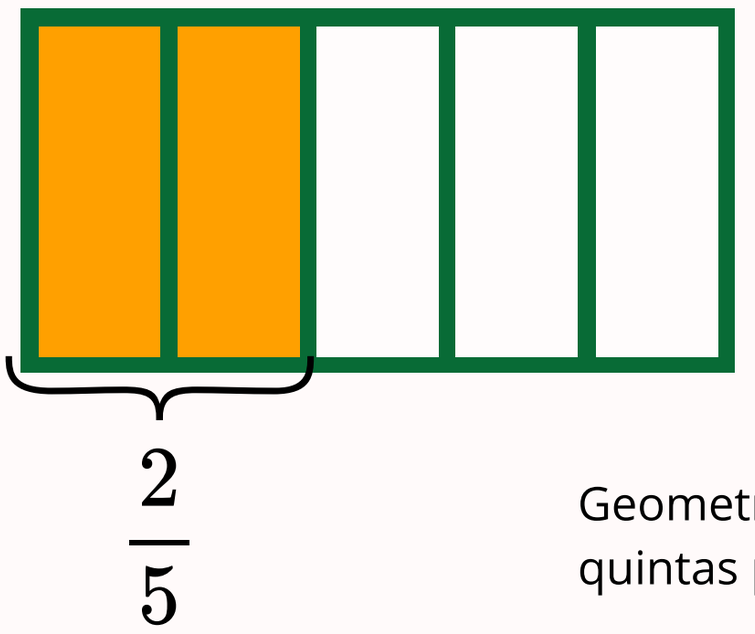
$$0,96 + 0,72 = 1,68 km$$

Explorando geometricamente o problema proposto

Pergunte aos estudantes como poderíamos utilizar essa folha para resolver o problema. É interessante instigar os/as estudantes que proponham soluções ao considerar a folha como um inteiro e, questionando quantos km a folha representa.



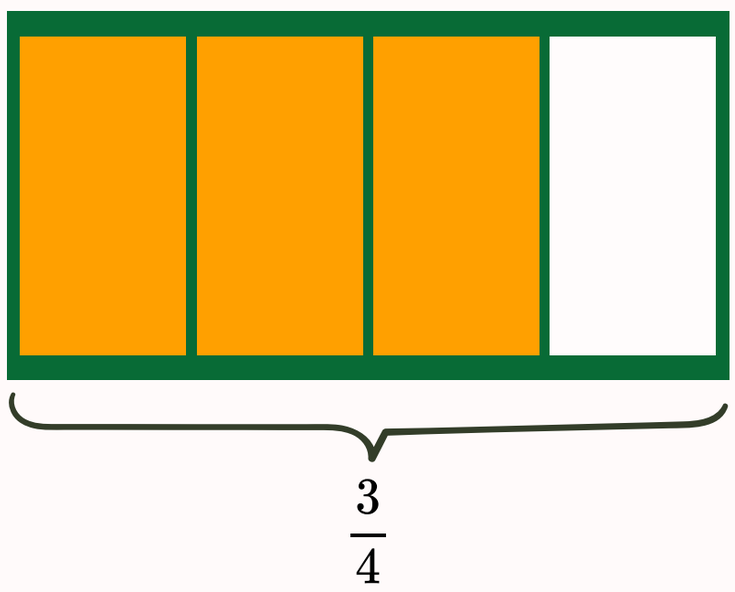
Peça que os estudantes representem dois quintos na folha.



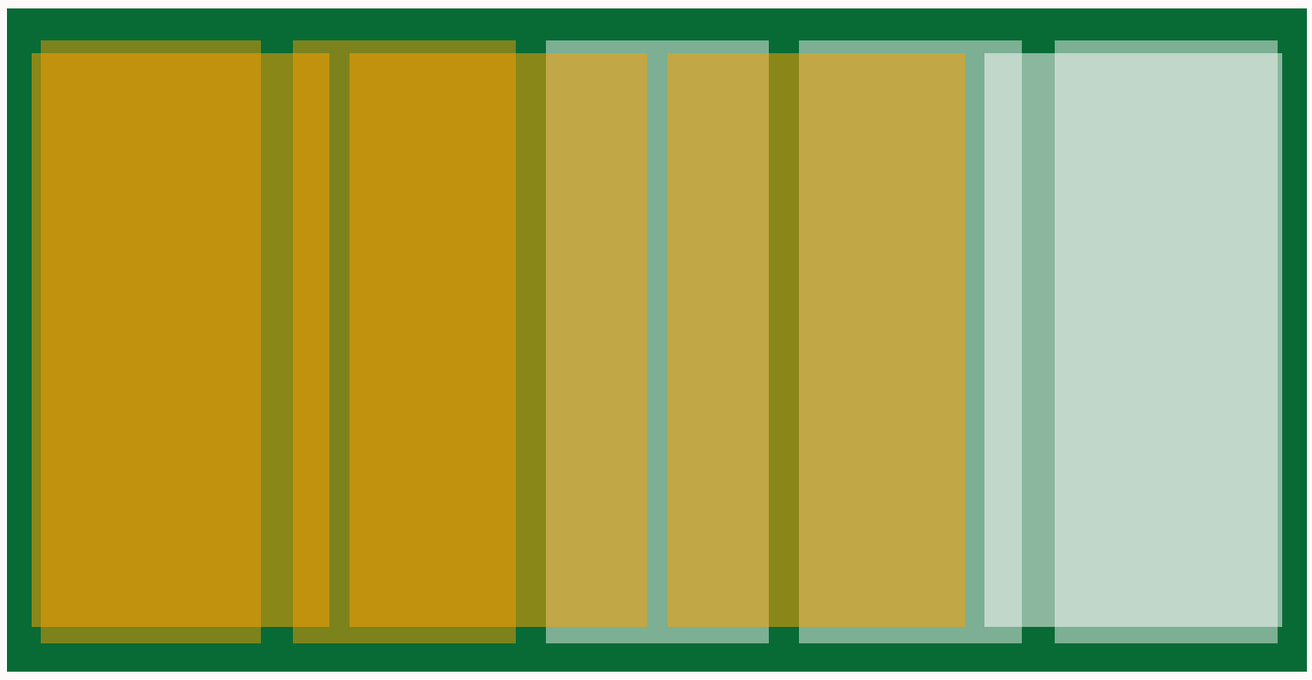
Se julgar necessário peça que escrevam, um quinto em cada parte do inteiro, folha.

Geometricamente, essa porção da folha representa duas quintas parte do percurso (2/5).

Deixe que os estudantes tentem representar o segundo dia. Caso algum grupo tente representar em outra folha deixe que tente, não diga nem que está certo ou errado, mas oportunizem que a intuição deles seja evidenciada.



Mas, o problema diz que no segundo dia, ele correu ¾ da pista.



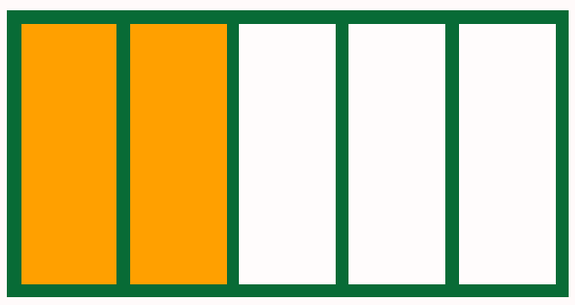
Por qualquer que seja o motivo, nosso estudante pode tentar representar as frações ¾ sobre a folha 2/5, em outras palavras entender que o inteiro é o mesmo inicial.

O que diz o problema sobre o segundo dia, é um contexto de calcular ¾ de 2/5?

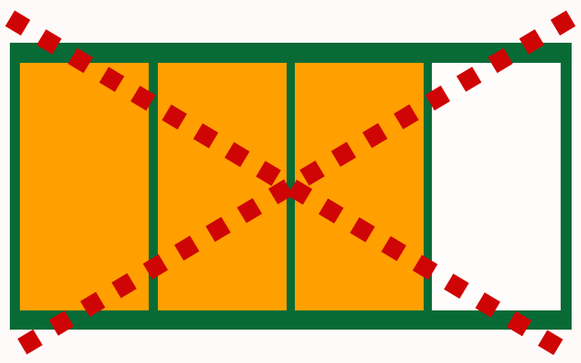
Se é necessário calcular 3/4 de 2/5, qual operação deve ser realizada entre essas frações, adição, subtração, divisão ou multiplicação? Por quê?

Professor(a), verifique se os estudantes conseguem identificar qual operação com números racionais é necessária para desenvolver a situação proposta.

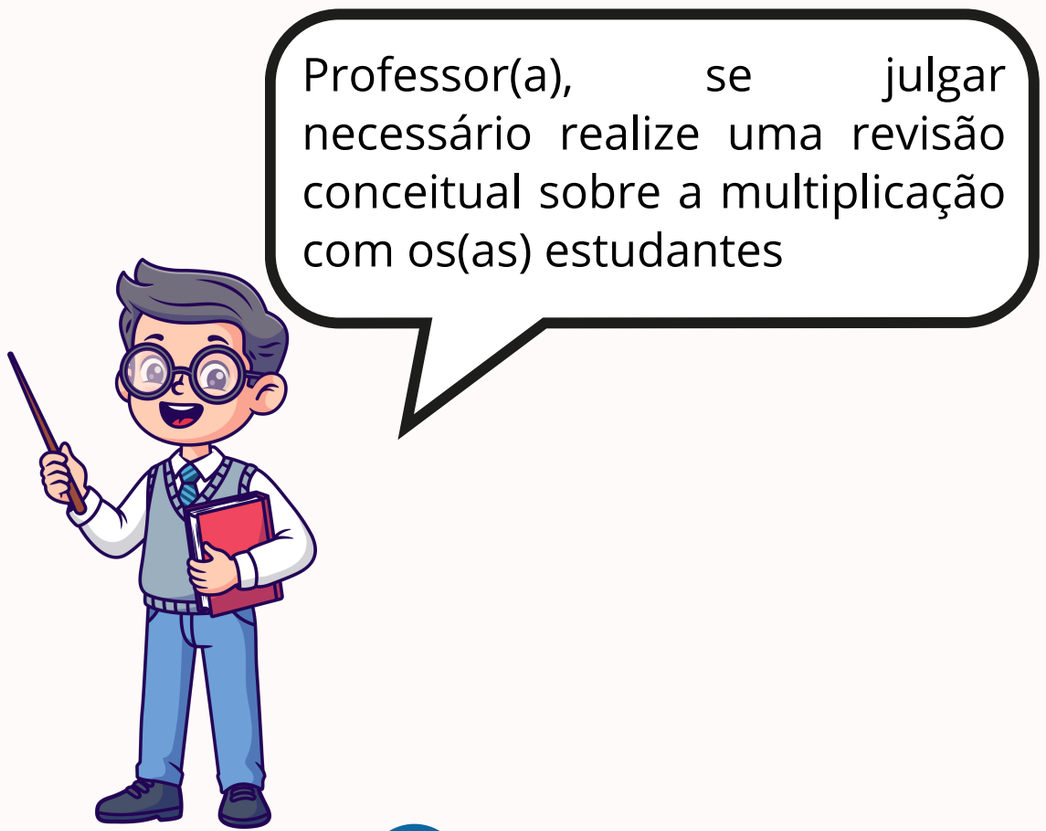
Como multiplicar geometricamente duas frações?



O inteiro dessa fração corresponde ao percurso todo, em que está representado pela folha.

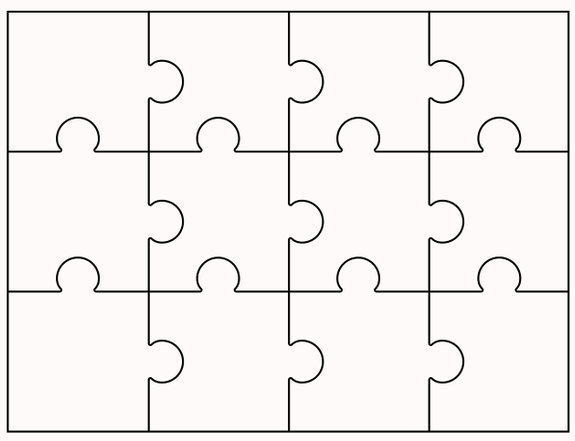


A referência desta fração como o parte inteira, é uma porção do terreno todo, neste caso é o 2/5 do percurso, ou seja 2/5 do percurso original é a referencia “inteira para a partir do 2/5 calcular de 3/4.



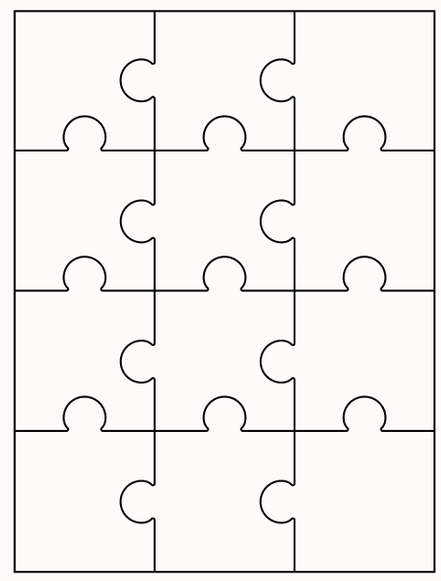
Você consegue explicar a multiplicação de números naturais como 3x4?

De modo mais rudimentar, a multiplicação nada mais é do que uma soma com parcelas iguais, neste caso seria algo como 3+3+3+3 ou 4+4+4, geometricamente seria a **área de um retângulo** com **lados 3 e 4 unidades de cumprimento.**



3+3+3+3+3
(4x3)

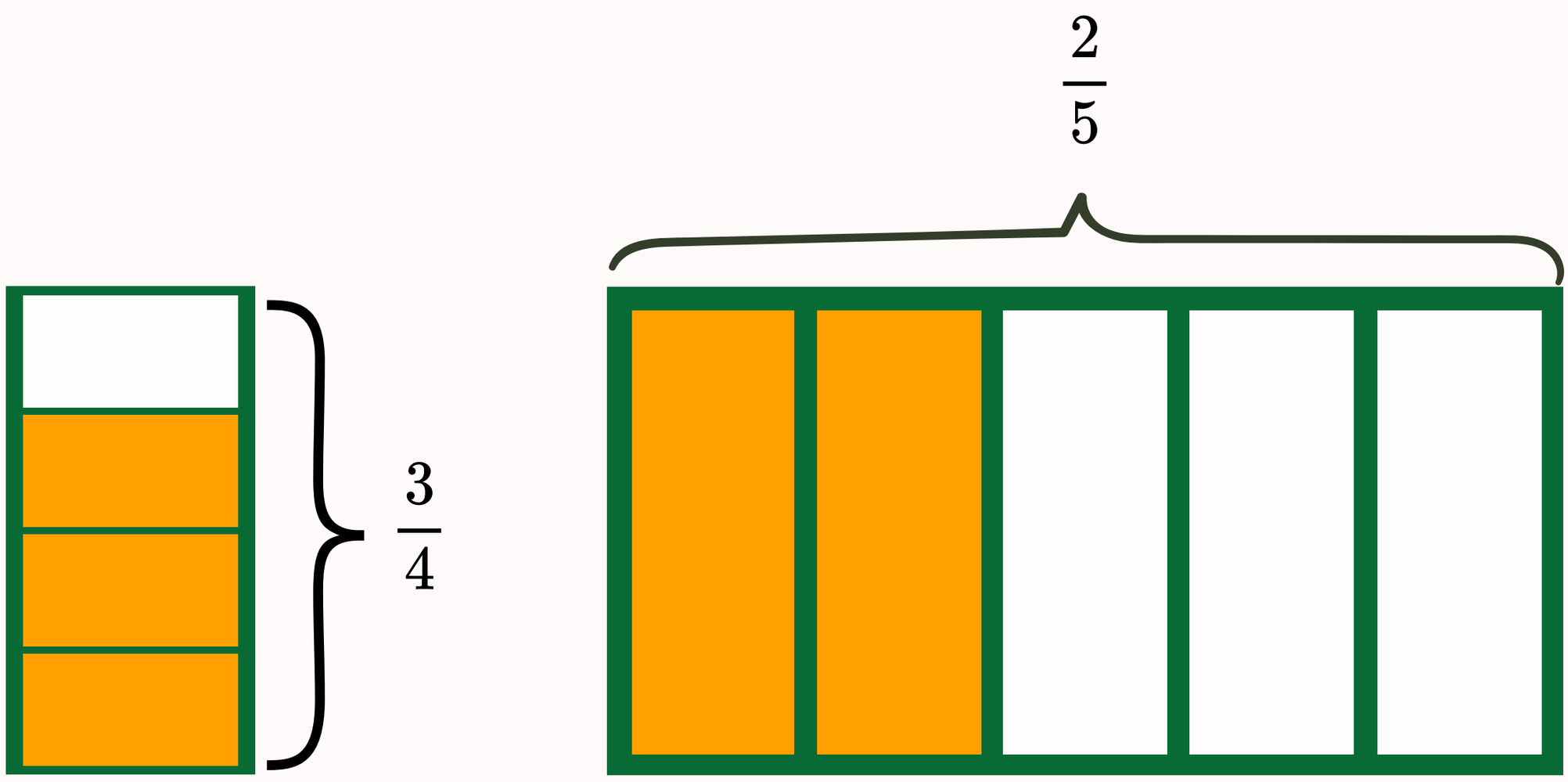
Seria o mesmo retângulo na disposição em pé com 12 unidades de área.



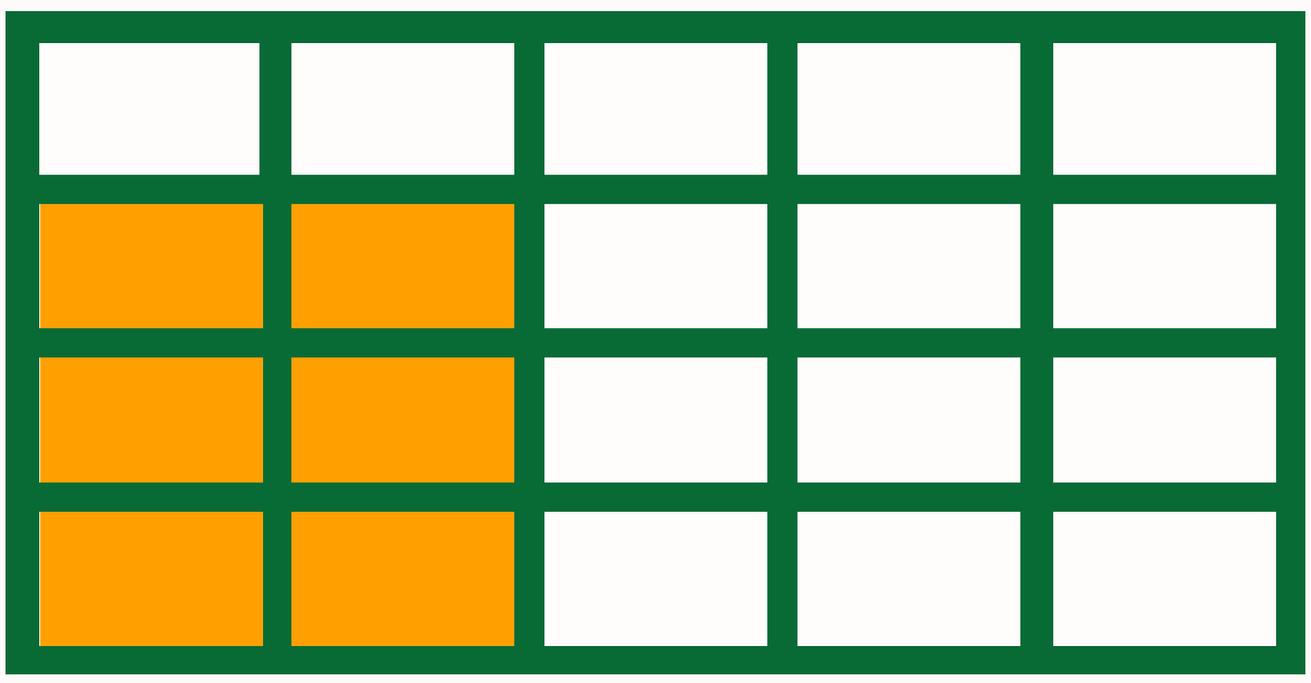
4+4+4
(3x4)

Retornando a dinâmica do problema associado aos significados geométricos

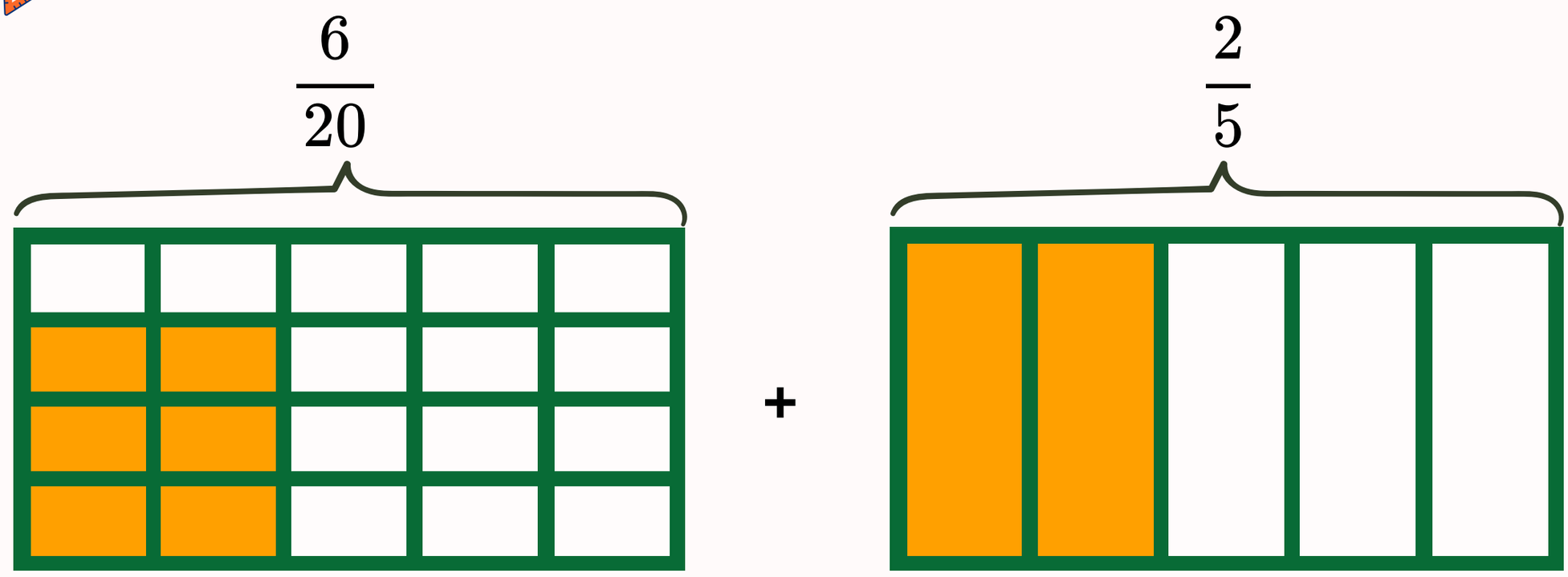
Professor(a), de um tempo para que os estudantes pensem numa estrategia para determinar três quartos de dois quintos a partir da mesma folha, caso eles não consiga, apresente o caminho.



Ao dobrarmos a fração 2/5 horizontalmente ao meio, teremos duas partes, se dobrarmos essa metade novamente teremos metade da metade, ou seja ¼ na perspectiva horizontal, abra novamente e teremos essa figura.



A fração 6/20 é a fração resultante da multiplicação das frações anteriores.



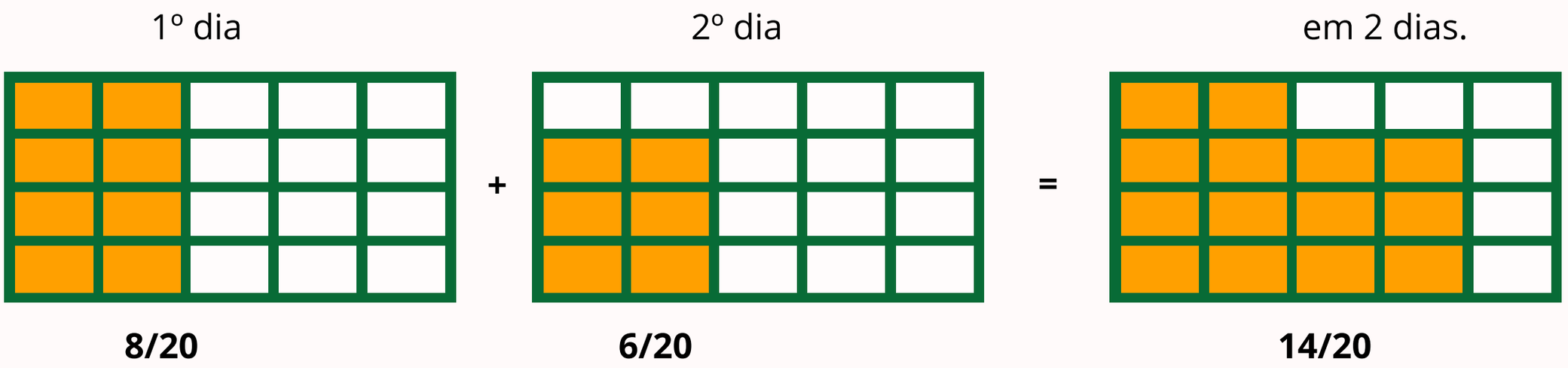
Soma de frações com denominadores diferentes, vocês lembram como somar?

Professor(a), deixe que os estudantes apresentem uma solução para essa etapa, é possivel que alguns grupos apresentem uma solução algébrica neste caso não é problema, outros podem apresentar uma solução geométrica, mas carecendo de uma generalização, sendo assim, é necessário exercer mediação para que eles consigam produzir significados geométricos e algébricos mas não como algo isolado, mas numa dinâmica de um significado complementar ao outro. A seguir apresentaremos 03 possibilidades de respostas que os grupos podem trazer para essa pergunta (6/20 + 2/5), no entanto, nada impede de ao termino deste **problema inicial**, já pule para formalização da operações de multiplicação e da soma de frações com denominadores distintos, apresentaremos essa discussão nas considerações finais.

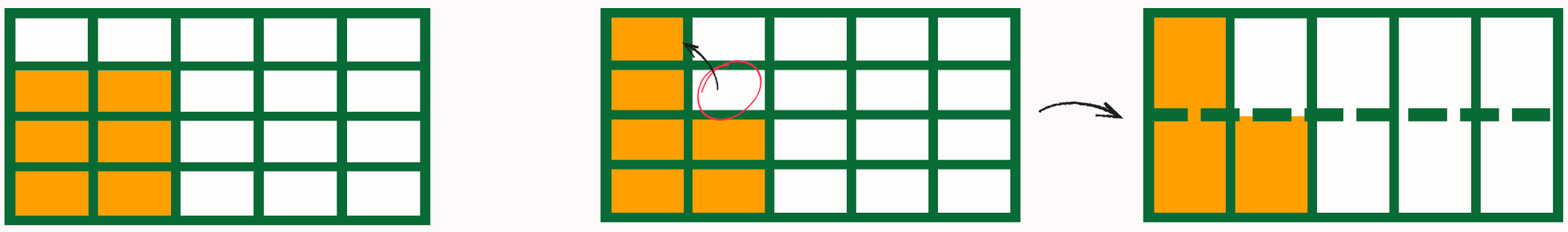
As 03 maneiras de realizar essas somas, perpassam trabalhar com frações de denominadores iguais.

1-Cada listra amarela da fração, 2/5 equivale a 4 retângulos da fração 8/20.

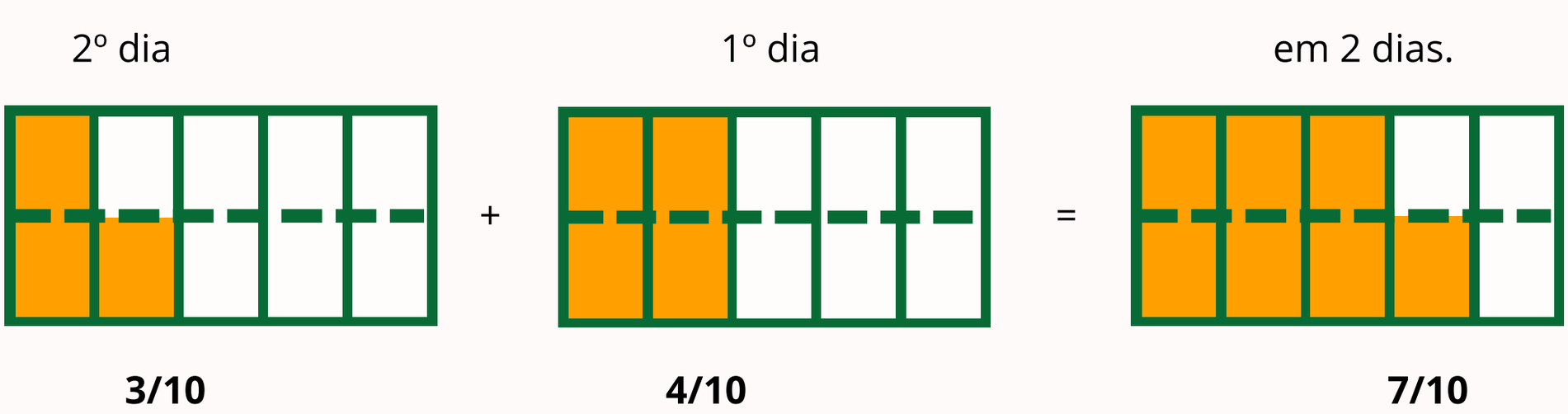




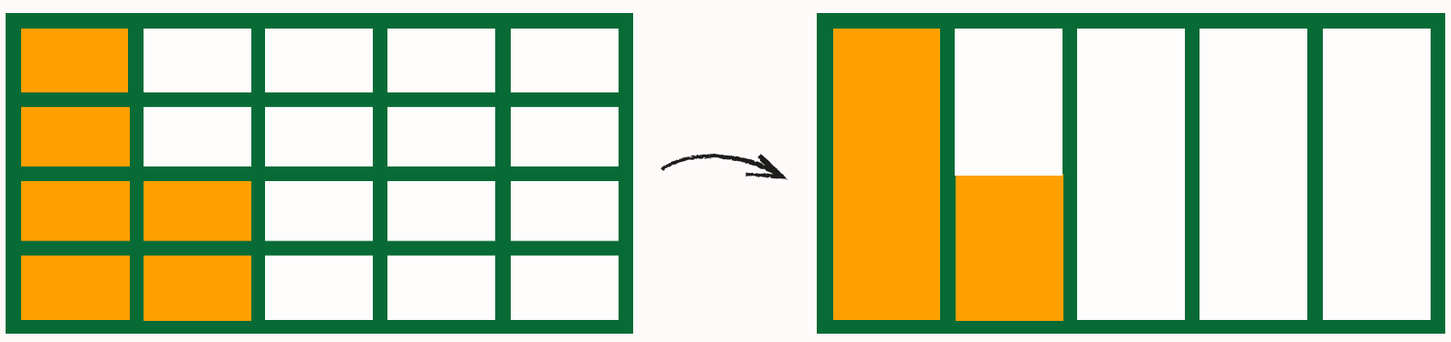
2-Cada dois retângulos amarelos da fração 6/20, equivale a 1 retângulos da fração 3/10.

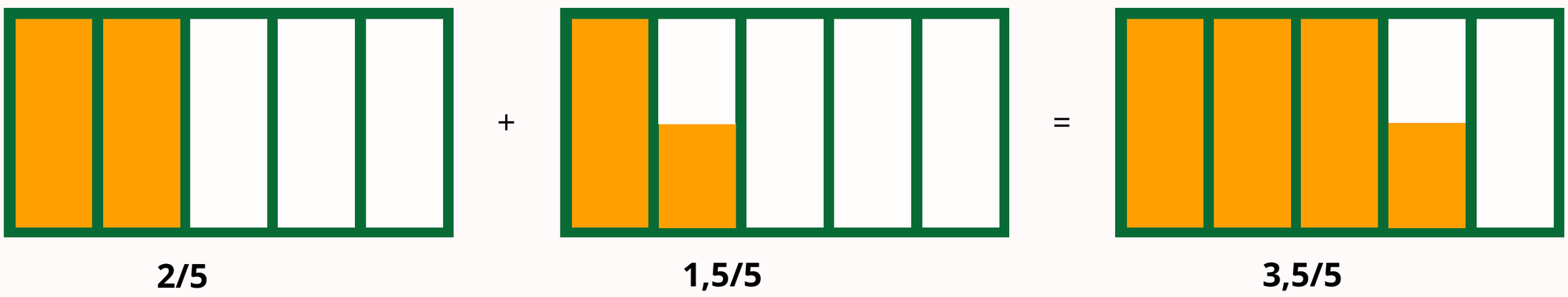


Reposicionando o retângulo inicial, sugere a ideia de uma coluna e meia.



3- A Cada 4 retângulos da fração 6/20, equivale a 1 retângulos da fração 1/5, então 2 amarelos ocupam o espaço de meio retângulo amarelo.





Professor(a), considerando que a folha completa representa os 2,4 km do percurso total, a fração preenchida (7/10, 14/20 ou 3,5/5) é uma representação geométrica da distância percorrida. Para adequar a resposta ao formato de uma prova objetiva, que exige um valor numérico em km, é necessário converter a fração em seu equivalente decimal.
Assim, o cálculo a ser realizado é o seguinte:

$$\frac{7}{10} \ de \ 2,4 \ km$$

$$\frac{7}{10} \times 2,4$$

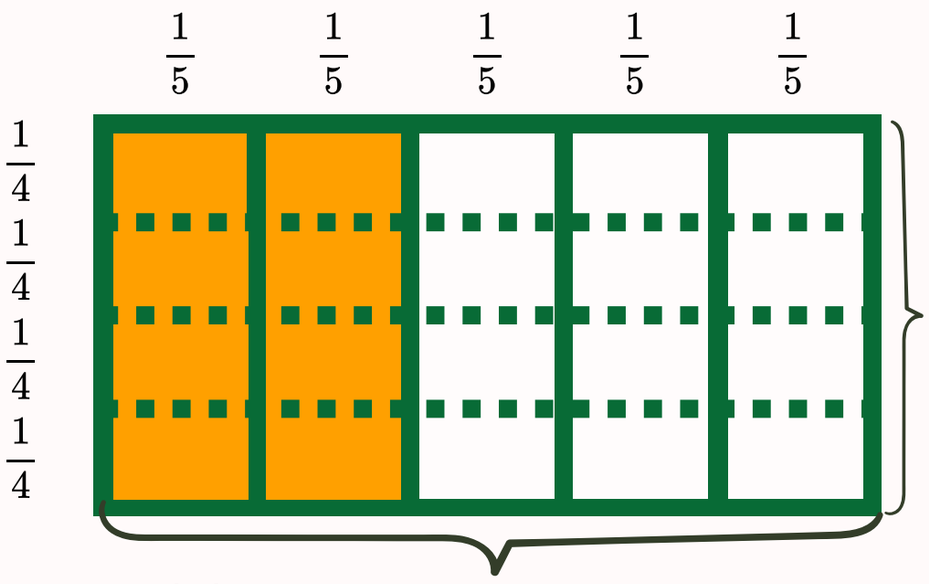
$$\frac{(7 \times 2,4)}{10}$$

$$\frac{(16,8)}{10} = 1,68 \, \text{km}$$

Dessa forma, a resposta definitiva e mensurável é 1,68 km. Vale ressaltar que esse resultado é o mesmo, independentemente da fração equivalente utilizada no cálculo, seja 14/20 ou 3,5/5, pois todas representam a mesma proporção do todo (mesma região na folha).

Formalização da etapa de multiplicação.

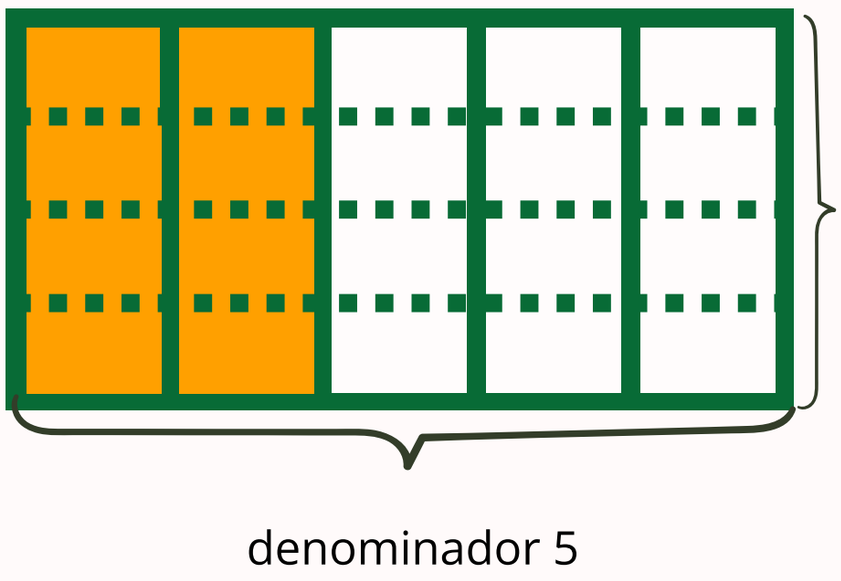
Tínhamos a fração inicialmente 2/5 que para multiplicar pela fração 3/4, realizamos dobras horizontais, o inteiro tinha 5 partes iguais e passou a ter 20 iguais.



As dobras horizontais, são provinientes do denominador da fração 3/4

As dobras verticais, são provenientes do denominador da fração 2/5.

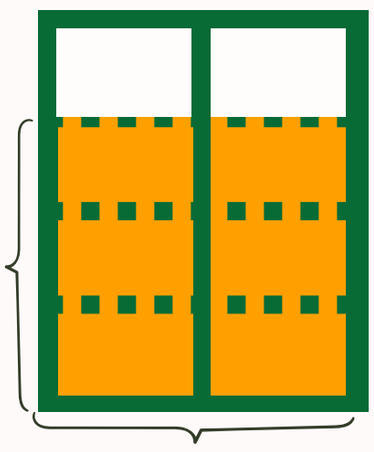
Oque podemos dizer dos denominadores das frações que se estão se multiplicando?



denominador 4

4 x 5 = 20.

denominador 5



numerador 3

3 x 2 = 6.

numerador 2

seleção horizontal

seleção vertical

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{6}{20}$$

marcações horizontais

marcações verticais



2ª situação problema: Divisão de frações

A turma do 8º ano vai fazer um lanche coletivo e você ficou responsável por preparar o suco. A receita indica que um quarto (1/4) da quantidade de polpa de fruta é necessário para produzir uma jarra de suco.

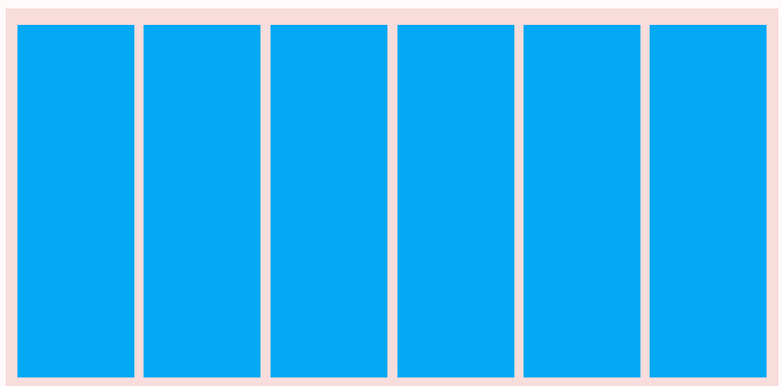
A turma conseguiu reunir apenas cinco sextos (5/6) da quantidade total de polpa originalmente prevista para o passeio.

- Quantas jarras de suco completas podem ser produzidas com a polpa disponível?
- Após preparar essas jarras, quanto de polpa de fruta restará em relação ao que era pra ter arrecado inicialmente?

Professor(a), você pode distribuir folhas para que cada grupo possa resolver essa situação geometricamente ou da maneira que preferirem. Sugerimos que discuta com cada grupo o raciocínio utilizado e caso ache necessário faça um diálogo com toda a turma para apresentar as diferentes soluções encontradas.

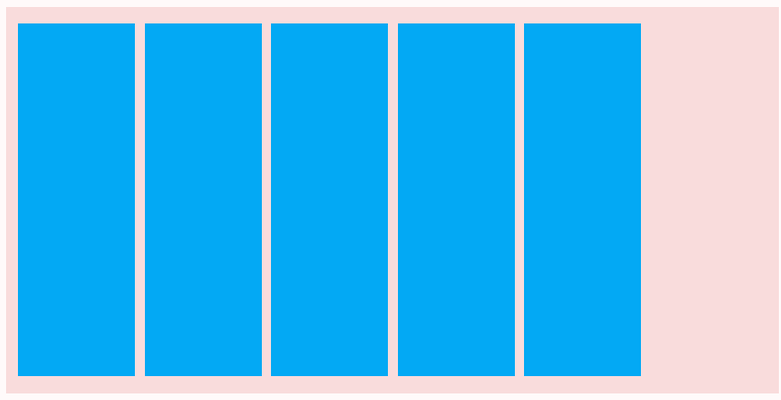
1ª estratégia: Vamos analisar geometricamente

Professor(a), entregue folhas A4 sulfite para cada grupo. Os(as) estudantes podem dividir a folha em 6 partes iguais e depois representar 5/6. Em outra folha, eles podem dividir em 4/4 partes e representar 1/4.



Imagine que a quantidade total representaria 6/6, certo?

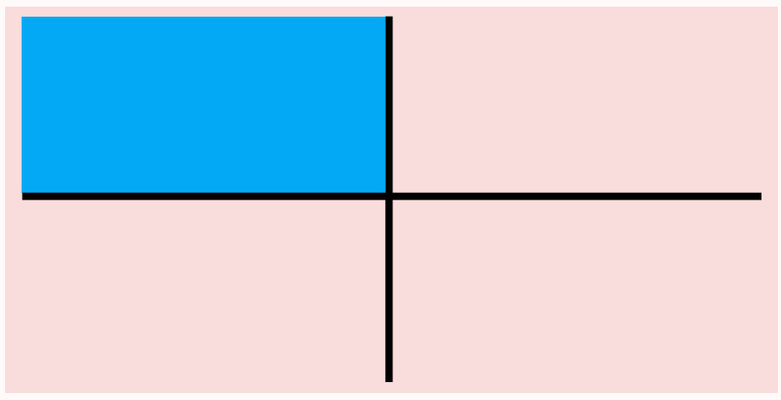
Como seriam de acordo com o problema a quantidade de polpa obtida?



A quantidade obtida de polpa seria 5/6 do retângulo



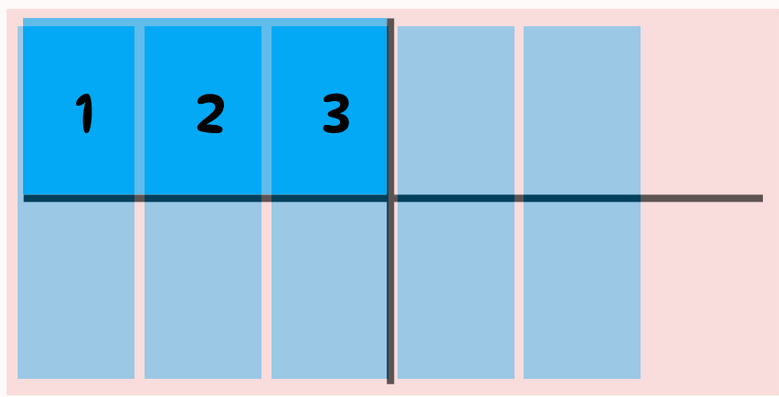
A quantidade de poupa para produzir uma jarra seria de quanto?



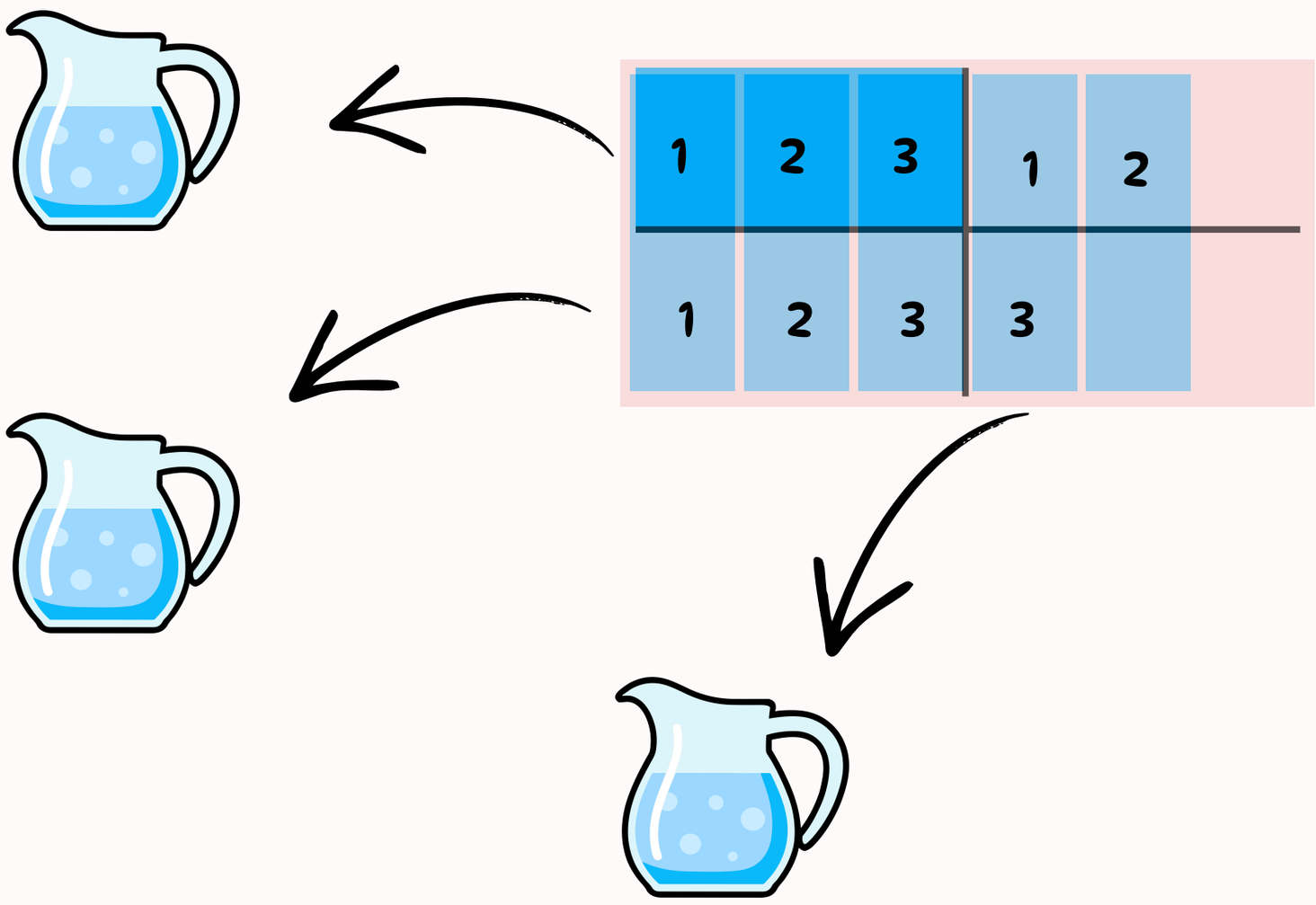
Para se produzir uma jarra de suco seria necessário ¼ de polpa. Quantos ¼ cabem dentro dentro de 5/6?

Da pra exercer um padrão para dividir?

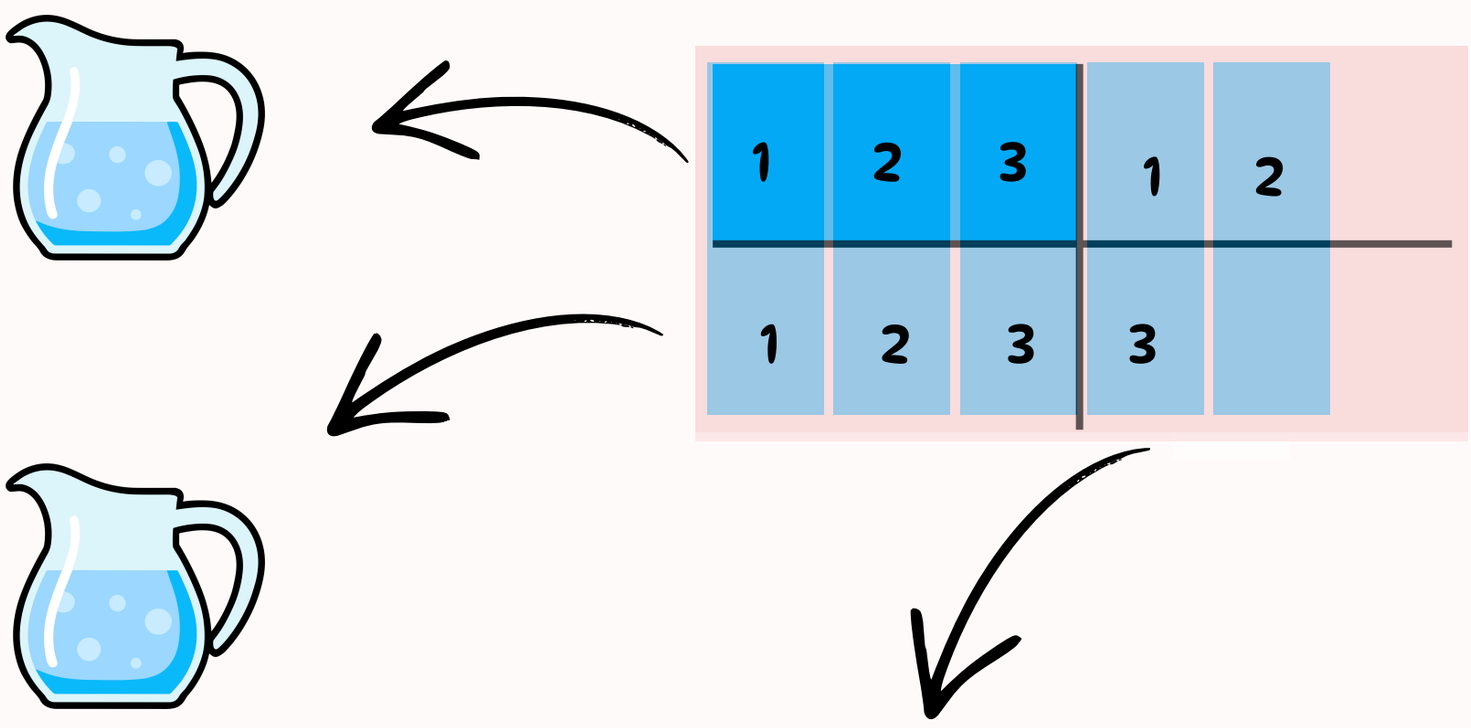
Sobrepondo o retângulo representando 5/6 e ¼ temos



Visualizando a sobreposição verificamos que agora temos 10 partes sendo divididas em 3, logo, representa 10/3. Considerando que a cada ¼ de polpa se faz um jarro de suco, chega-se a conclusão que a cada 3 partes podemos fazer uma jarra. Se temos um total de 10 partes (3 + 3 +3 +1), daria três jarras e sobraria um pouco de suco.



Para responder a segunda pergunta “Quanto de polpa sobra?”, devemos analisar a figura a seguir:



Se considerarmos o total geral de partes, sobraria 1 parte de 12, ou seja 1/12 de polpa.



Segunda maneira de resolver essa situação problema:

A turma do 8º ano vai fazer um lanche coletivo e você ficou responsável por preparar o suco. A receita indica que um quarto (1/4) da quantidade de polpa de fruta é necessário para produzir uma jarra de suco.

A turma conseguiu reunir apenas cinco sextos (5/6) da quantidade total de polpa originalmente prevista para o passeio.

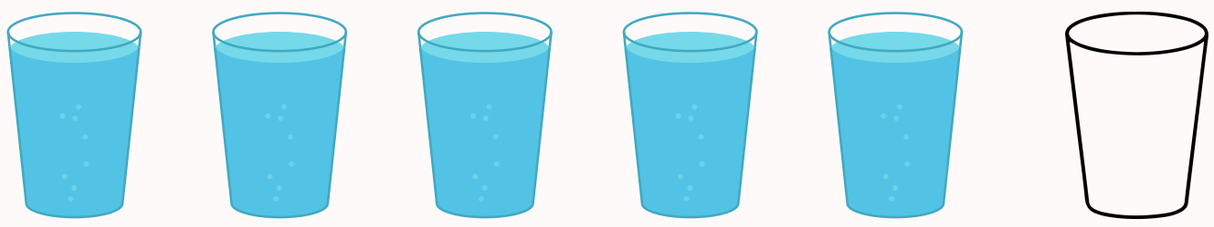
- Quantas jarras de suco completas podem ser produzidas com a polpa disponível?
- Após preparar essas jarras, quanto de polpa de fruta restará em relação ao que era pra ter arrecado inicialmente?

A receita indica que um quarto (1/4) da quantidade total de polpa de fruta é necessário para produzir uma jarra de suco.

A turma conseguiu reunir apenas cinco sextos (5/6) da quantidade total de polpa originalmente prevista para o passeio.

Professor(a), vamos abordar esse problema de uma maneira diferente, desta vez vamos utilizar copos descartáveis, organize as turmas em grupos, cada grupo vai precisar de 10 copos de plástico, você pode entregar 6 inicialmente ou entregar os 12 nesse momento, mas em outro momento os estudantes precisarão dos outros 4 copos para fazer a divisão de 5/6 por 3/4.

De qualquer forma, solicite aos estudantes que representem a fração 5/6 com os copos e agua, se preferir pode usar alguma coloração para o experimento ficar mais marcado, mas é opcional.



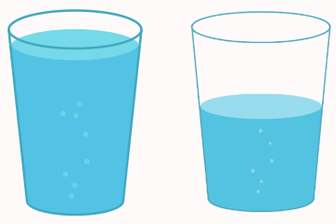
Uma informação muito importante é que para fazer uma jarra de suco, são necessárias ¼ do total da poupa de fruta, a pergunta é ¼ de 5 ou ¼ de 6? Deixe que os estudantes respondam, justificando a resposta.

Após compreenderem que o problema envolve o cálculo de ¼ de 6, a partir da quantidade total apresentada, incentive os(as) estudantes a representar essa fração utilizando os copos. Disponibilize um copo extra com água, favorecendo a exploração da redistribuição em meios copos. Durante a atividade, conduza a reflexão para que percebam que não é necessário utilizar todos os copos, uma vez que o resultado equivale a um copo e meio.



$\frac{1}{4}\ de\ 6$ ⟶ quarta parte de 6

```
 6 | 4
-4   1,5
 20
-20
  0
```

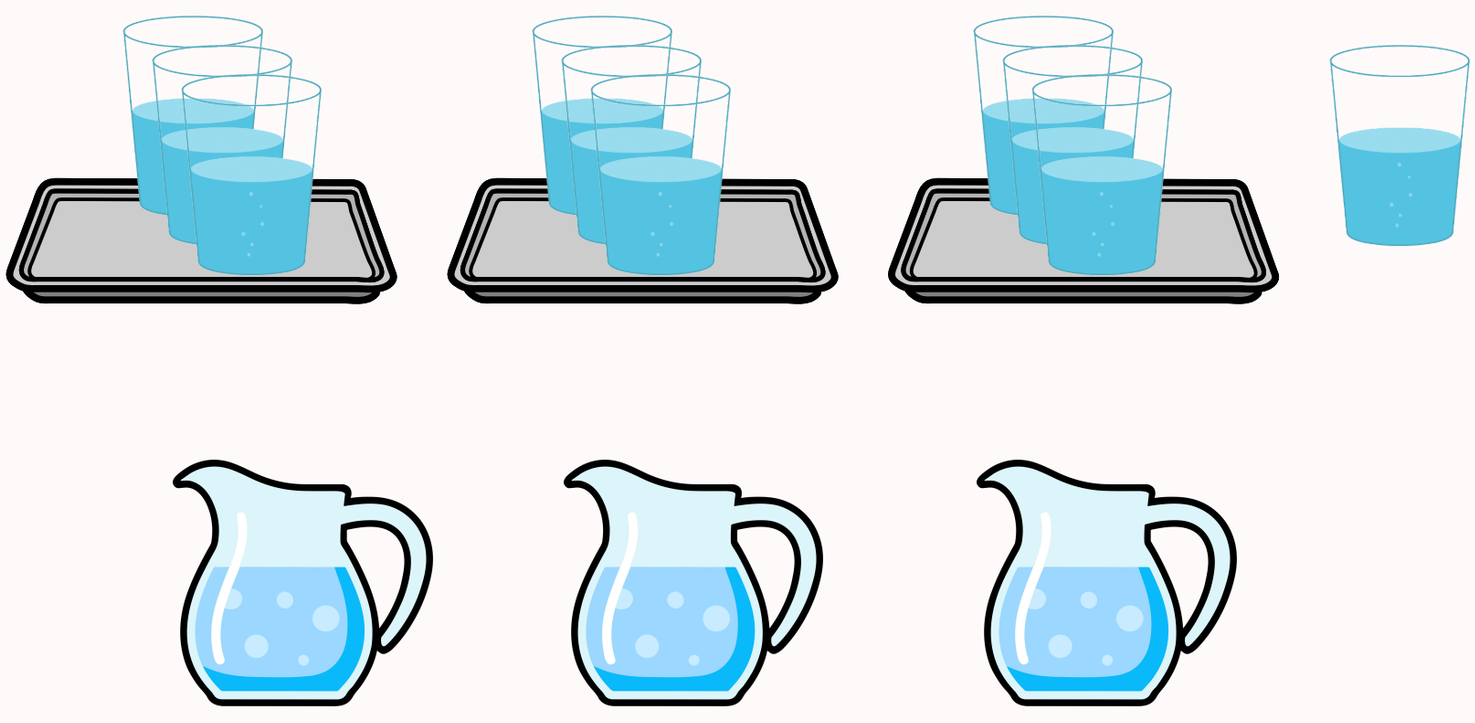


Retomando a idea do problema como dividir 5 por 1 e meio?

A ideia mais básica é dividir pensar em 1,5 como sendo 3 metades de 1 copo, sendo assim, 5 copos seriam 10 metades,



com a mesma referencia, meio copo, o problema se torna tão somente dividir 10 por 3, resulta em 3...



3 jarras de suco e sobra um copo

Isso já responde a pergunta “Quanto sobra de polpa?”, 1 metade de um copo, de um total máximo de 12 metades de copos, logo, 1/12.



Terceira maneira de resolver essa situação problema:

A turma do 8º ano vai fazer um lanche coletivo e você ficou responsável por preparar o suco. A receita indica que um quarto (1/4) da quantidade de polpa de fruta é necessário para produzir uma jarra de suco.

A turma conseguiu reunir apenas cinco sextos (5/6) da quantidade total de polpa originalmente prevista para o passeio.

- Quantas jarras de suco completas podem ser produzidas com a polpa disponível?
- Após preparar essas jarras, quanto de polpa de fruta restará em relação ao que era pra ter arrecado inicialmente?

Professor(a), vamos finalizar as possibilidades de resolução utilizando a linguagem algébrica com o intuito de formalizar qualquer uma das etapas anteriores utilizadas.

Vamos considerar que a polpa total prevista = 1 (uma unidade).

Polpa disponível: $\frac{5}{6}$

Polpa necessária para 1 jarra: $\frac{1}{4}$

Agora, dividimos a polpa disponível pela quantidade usada em cada jarra:

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{4} = \frac{5}{6} \times 4 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

Isso significa 3 jarras completas, pois:

$$\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

Polpa usada nas 3 jarras:

$$3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Polpa que sobra:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$$

Calculando o mínimo múltiplo comum (MMC) entre 6 e 4, temos MMC (4,6) = 12

$$\frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

Sobra 1/12 da polpa total prevista originalmente.





Formalizando a operação de divisão:

Resumidamente o inicio do problema se destaca por calcular, 5/6 de poupa dividido ¼ para determinar a quantidade de jarras de suco, divisão nada mais é do que contar quantos do divisor (¼) cabem dentro do dividendo (5/6). Como estrategia resolutiva optamos por quantificar ¼ de 6 para fins didáticos, mas dividir 5/6 por ¼ em termos de resultado tem o mesmo valor que dividir 5 por ¼ de 6. Não iremos demostrar essa afirmação para nossos estudantes, mas para dar segurança ao educador(a), deixamos aqui a demonstração formal.

Seja a,b e c $\in \mathfrak{R}$. Com b e c $\neq$ 0. Então.

$$\frac{a}{b} : \frac{1}{c}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{1}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$$

Logo, a forma final simplificada pode ser escrita:

$$\frac{ac}{b} \quad \text{ou} \quad a \cdot \frac{c}{b}$$

No cálculo anterior o número a multiplica a fração c/b. No entanto podemos pensar na divisão de a pela fração b/c. Observe:

$$a \div \frac{b}{c}$$

Essa forma aparece porque,

$$a \div \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

Resumindo:

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{1}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b} = a \div \frac{b}{c}}$$

primeiro caso (ida):
a/b:1/c
ac/b
a.(c/b)
a:[c/b]-1
a:b/c
a:[(1/c).b]

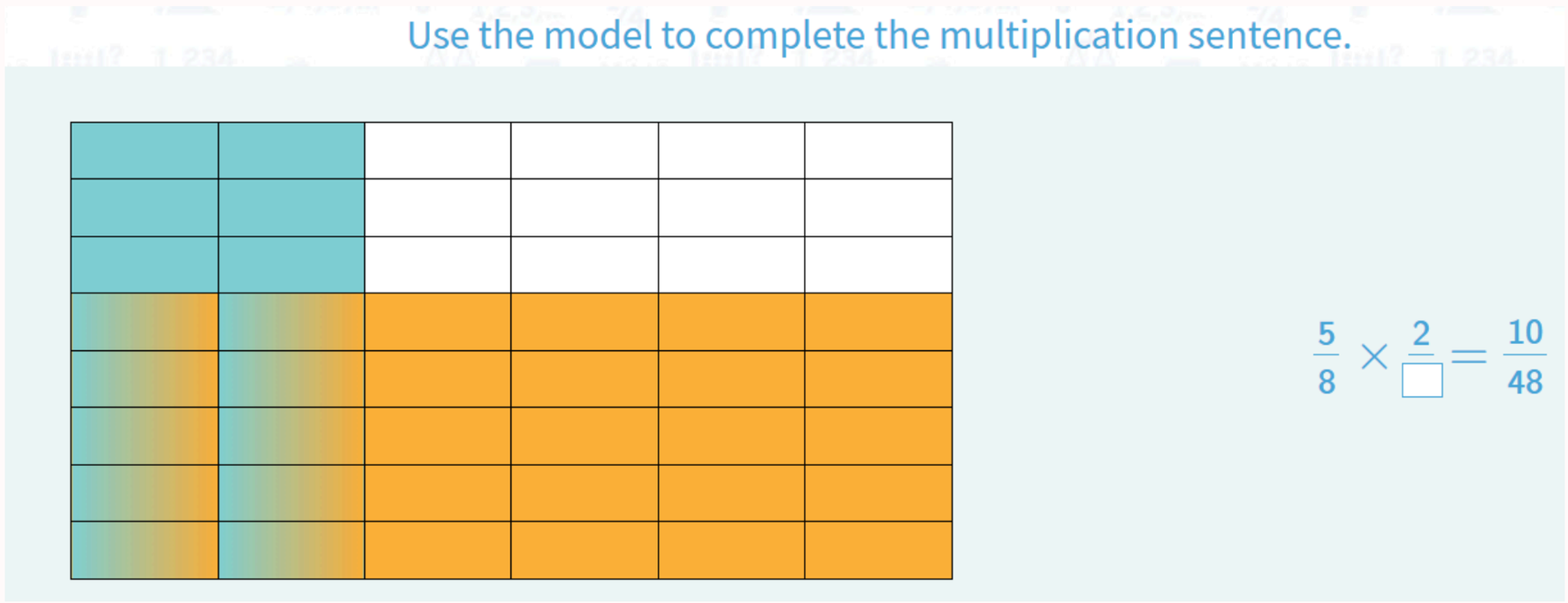
Apresentação anterior

primeiro caso (volta):
a:(1/c).b
a.c/b igual segunda linha.

JOGOS MATEMÁTICOS

O jogo na plataforma a seguir trabalha a ideia de multiplicação de frações por meio de interpretações geométrica. Para ter acesso ao mesmo basta clicar no link a seguir ou acessar o QRcode:

Link: https://www.mathgames.com/skill/7.98-multiply-fractions-with-models



REFERÊNCIAS

https://www.onlinemathlearning.com/geometry-help.html#Circles

https://www.onlinemathlearning.com/area-circle-nys.html

https://youtu.be/-UBLutigNMM?si=LTZFY0imjRUCpaMD



PRÁTICA 2: IDENTIFICANDO O ALGORITMO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E DESENHANDO SUA ESPIRAL.

Habilidade: EF08MA10 - Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

Objeto de conhecimento: Sequências recursivas e não recursivas.

Expectativa de aprendizagem: Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva (ou recorrentes) e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Materiais necessários:

- Computadores (ou dispositivos móveis com acesso a ferramentas de criação de fluxogramas).
- Papel, caneta, régua, lápis e borracha.
- Folhas impressas de papel quadriculado.



APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

Professor(a), é preciso que os(as) estudantes compreendam que uma sequência pode ser definida como um conjunto de objetos (numéricos ou figurais) que podem ser dispostos em uma ordem bem definida. Uma sequencia é chamada de recursiva quando determinados termos podem ser calculados em função de outros termos dessa sequência.

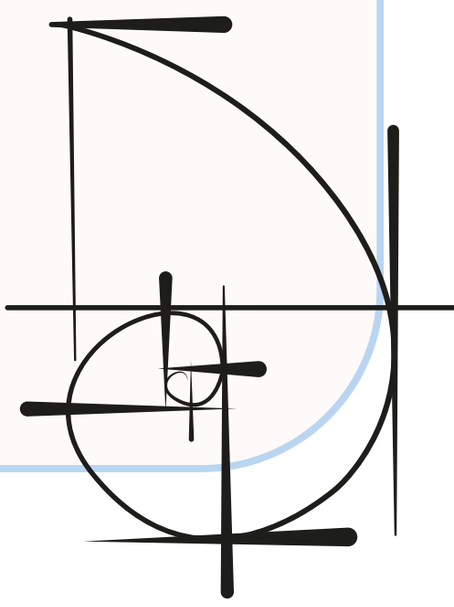
Apresentaremos nesta prática a sequência de Fibonacci, que se trata de uma das séries recursivas numéricas mais conhecidas e fascinantes, descoberta pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci, no século XIII (embora existam indícios de que já era descrita anteriormente por gregos e indianos). Para descrevê-la, ele usou como ilustração o crescimento de uma população de coelhos. Essa sequência é formada somando-se dois números consecutivos para obter o próximo: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...
Além de suas propriedades matemáticas, ela é observada em padrões da natureza, como nas conchas de caracol, na organização das pétalas das flores, nos galhos das árvores e nas sementes de girassóis, usadas por artistas em várias obras de arte, na construção de monumentos etc.

A sequência de Fibonacci começa com os números 1 e 1, e cada número subsequente é a soma dos dois anteriores. Sua fórmula é:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

onde $F(n)$ representa o enésimo termo da sequência.

Vamos explorar também, durante a prática, como essa sequência cria uma forma espiral, usando um algoritmo para construir visualmente esse padrão matemático.





OBJETIVO DA AULA

Investigar a relação entre a sequência de Fibonacci e a construção de espirais, entendendo a regularidade da sequência e aplicando-a a uma representação visual.



DESENVOLVIMENTO

Professor(a), inicie a aula com o famoso problema (adaptado) utilizado por Leonardo Fibonacci em seu livro *Liber Abaci*:

Um casal de filhotes de coelho foi colocado em um campo. Essa espécie de coelhos só se reproduz após o 2º mês de vida. Considere que não existam problemas genéticos e nada que impossibilite a fertilidade do casal e ainda que, a partir do 2º mês de vida, cada casal dê a luz a um novo casal por mês. Considere também que os casais nunca morrerão. O problema é: após 12 meses, quantos casais de coelhos haveria?

Separe os(as) estudantes em grupos, de modo a pensarem conjuntamente sobre a solução deste problema. É importante que, após esse momento, cada grupo compartilhe sua resolução com a turma. Discuta com os(as) estudantes os caminhos seguidos por eles na resolução (observe que Fibonacci utilizou esse problema para ilustrar sua sequência. Os dados apresentados no problema não correspondem à realidade).

Sugestão de resolução:

1º MÊS: apenas o casal de 1ª Geração

1ª Geração



1 casal

2º MÊS: o casal de filhotes da 1ª Geração ficou adulto

1ª Geração



1 casal

3º MÊS: o casal adulto da 1ª Geração dá à luz um casal de filhotes.

1ª Geração



2ª Geração



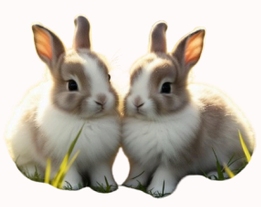
2 casais

4º MÊS: o casal da 1ª Geração dá à luz um casal de filhotes. O casal da 2ª Geração fica adulto.

1ª Geração



3ª Geração



2ª Geração



3 casais



5º MÊS: os casais de 1ª e 2ª Gerações dão à luz um novo casal de filhotes cada. O casal de 3ª Geração fica adulto

1ª Geração



4ª Geração



2ª Geração



4ª Geração



3ª Geração



5 casais

6º MÊS: os casais de 1, 2ª e 3ª Gerações dão à luz a um novo casal de filhotes cada. Os casais de 4ª Geração ficam adultos

1ª Geração



5ª Geração



2ª Geração



5ª Geração



3ª Geração



5ª Geração



4ª Geração



4ª Geração



8 casais



7º MÊS: os casais de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª Gerações dão à luz um novo casal de filhotes cada. Os filhotes de 5ª Geração ficam adultos.

1ª Geração



6ª Geração



2ª Geração



6ª Geração



3ª Geração



6ª Geração



4ª Geração



6ª Geração



4ª Geração



6ª Geração



5ª Geração



5ª Geração



5ª Geração

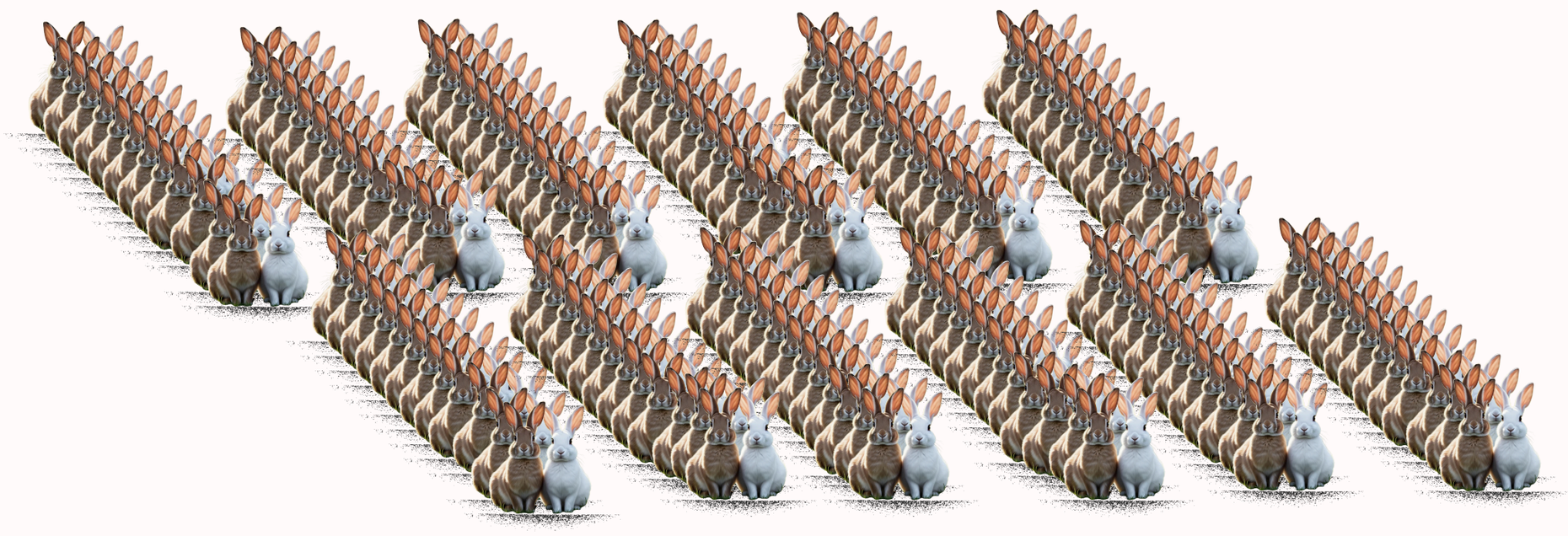


13 casais

Seguindo essa lógica, de que cada casal adulto terá um novo casal de filhotes a cada mês e que os filhotes ficarão adultos, Fibonacci escreveu a seguinte sequência:

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nº de casais	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Portanto, após os 12 meses, teremos 144 casais de coelhos, ou seja, 288 coelhos.





DESENVOLVIMENTO

Professor(a), após essa introdução, apresente novamente a sequência aos(às) estudantes: (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144...) e pergunte o que foi possível observar na formação dela, como algum alguma regra, alguma lógica. Dê um tempo para pensarem e refletirem. Discuta agora com eles(as) suas respostas. Esse é um momento para que eles possam tentar conjecturar suas observações da sequência. Depois que os(as) estudantes expuserem suas conclusões, mostre a regra para formar os próximos termos, a partir do 3º termo, que consiste em somar os dois números anteriores. Mostre também que os dois primeiros são fixos e não se aplica a regra.

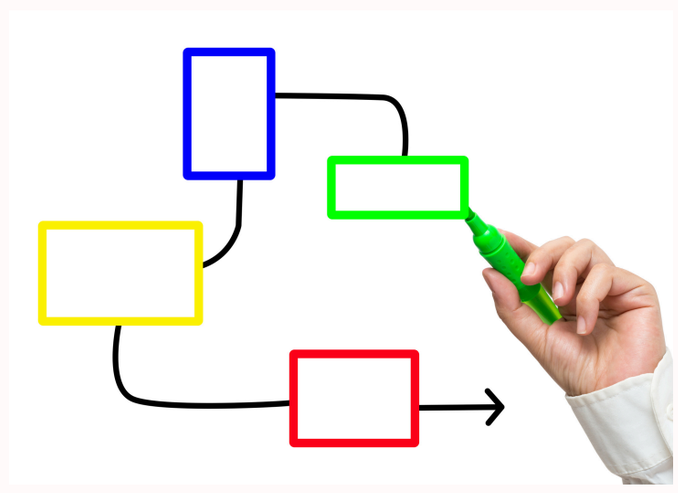
Peça agora para calcularem os 5 próximos termos da sequência, a fim de se familiarizarem com a sequência e ver se entenderam a regra.

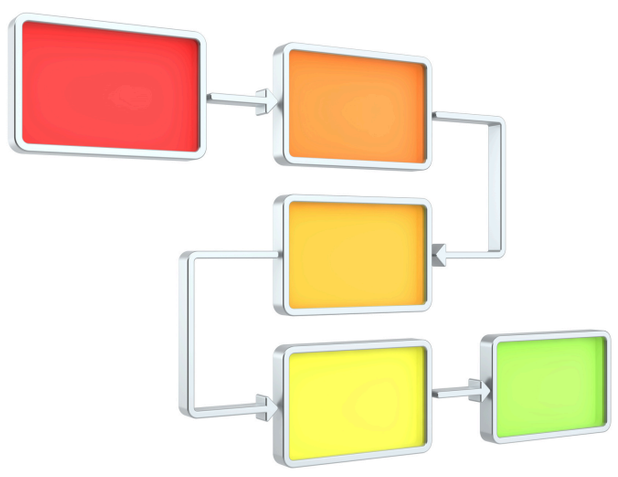
Divida novamente os(as) estudantes em grupos e peça que cada grupo desenvolva um algoritmo básico para calcular o próximo termo da sequência a partir dos dois anteriores.

Oriente os grupos a criarem uma espécie de fluxograma que represente o processo de cálculo:

- **Entrada**: os dois últimos números da sequência.
- **Processamento**: somar esses dois números.
- **Saída**: próximo número da sequência.

Pode ser uma estrutura simples como essa:





1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144...

1 + 1 = 2

1 + 2 = 3

2 + 3 = 5

3 + 5 = 8

5 + 8 = 13

8 + 13 = 21

13 + 21 = 34

21 + 34 = 55

34 + 55 = 89

55 + 89 = 144

Mostre aos(às) estudantes que também podemos utilizar a seguinte fórmula para encontrar o enésimo termo da sequência, a partir de n=3, em que n é a posição ocupada por cada termo e considerando-se que temos aqui uma sequência recorrente, ou seja, neste caso, dependemos dos dois termos anteriores:

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(2) = 1 \\ F(n) = F(n-2) + F(n-1) \end{cases}$$

Exemplos: F(3) = F(3-2) + F(3-1)
F(3) = F(1) + F(2)
F(3) = 1 + 1
F(3) = 2

F(4) = F(4-2) + F(4-1)
F(4) = F(2) + F(3)
F(4) = 1+ 2
F(4) = 3

F(5) = F(5-2) + F(5-1)
F(5) = F(3) + F(4)
F(5) = 2 + 3
F(5) = 5



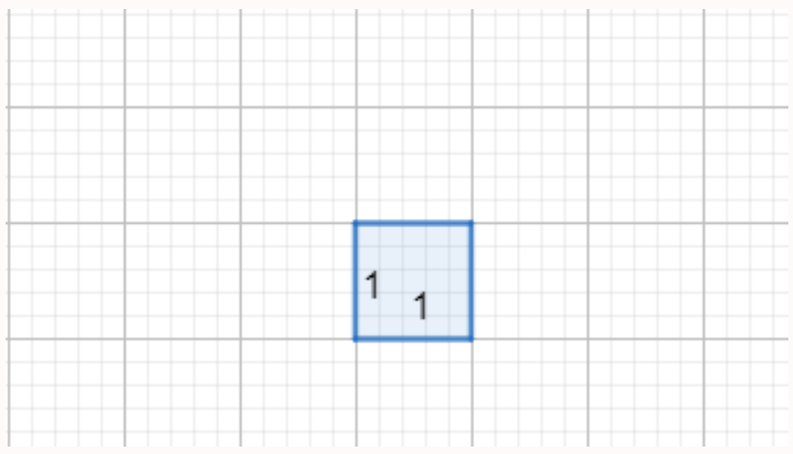
DESENVOLVIMENTO

Professor(a), vamos agora usar a sequência de Fibonacci para construir uma espiral.

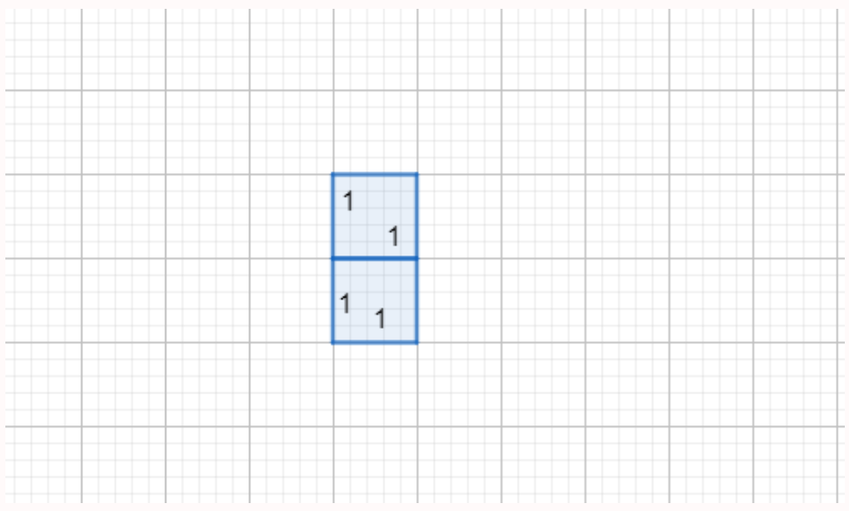
Mostre novamente o início da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8,13,21...) e destaque que, ao representar cada termo como um quadrado, podemos construir uma espiral. Explique que cada quadrado terá lado igual ao termo correspondente da sequência e que a espiral será formada conectando arcos de círculos em cada quadrado.

Distribua papel quadriculado e forneça orientações aos(às) estudantes:

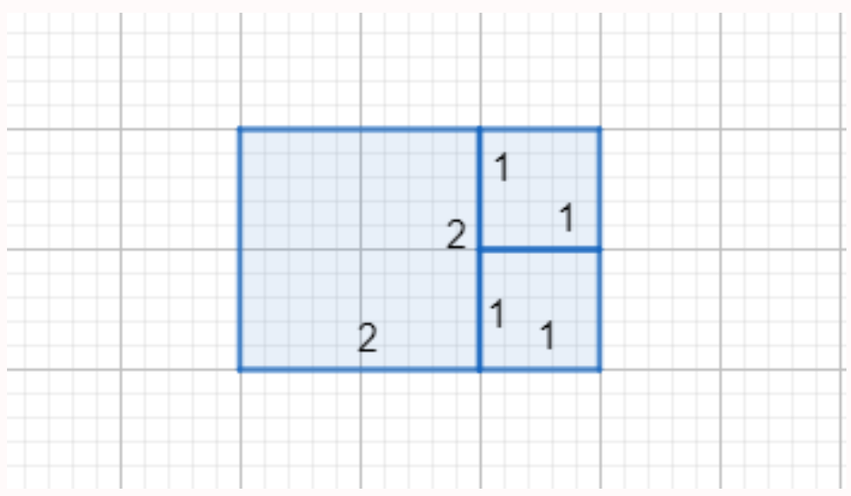
1) Comecem com um quadrado de lado 1.



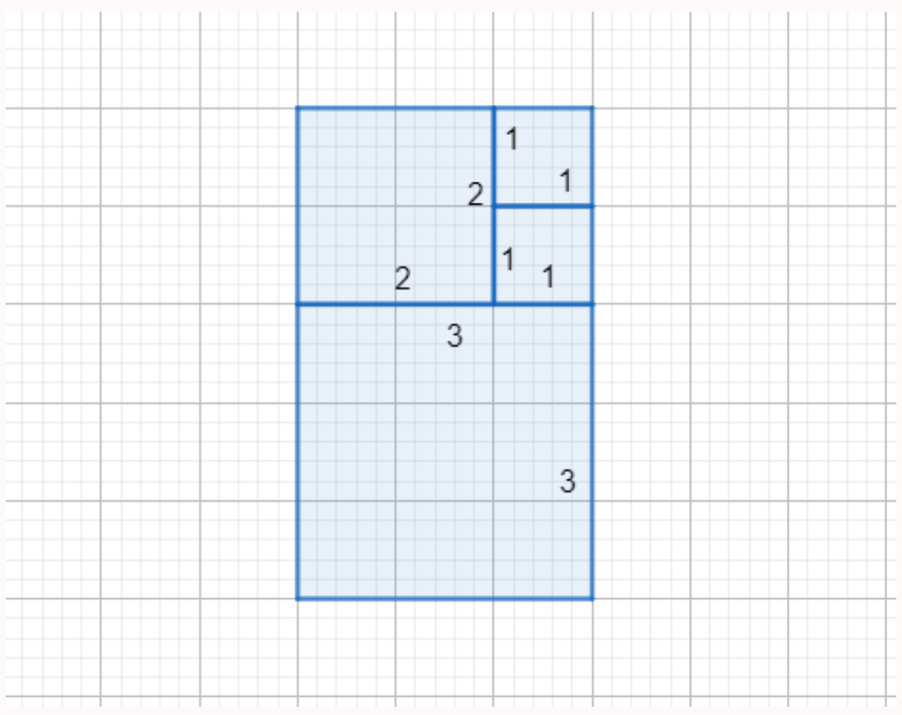
2) Desenhem outro quadrado de lado 1 cima do primeiro.

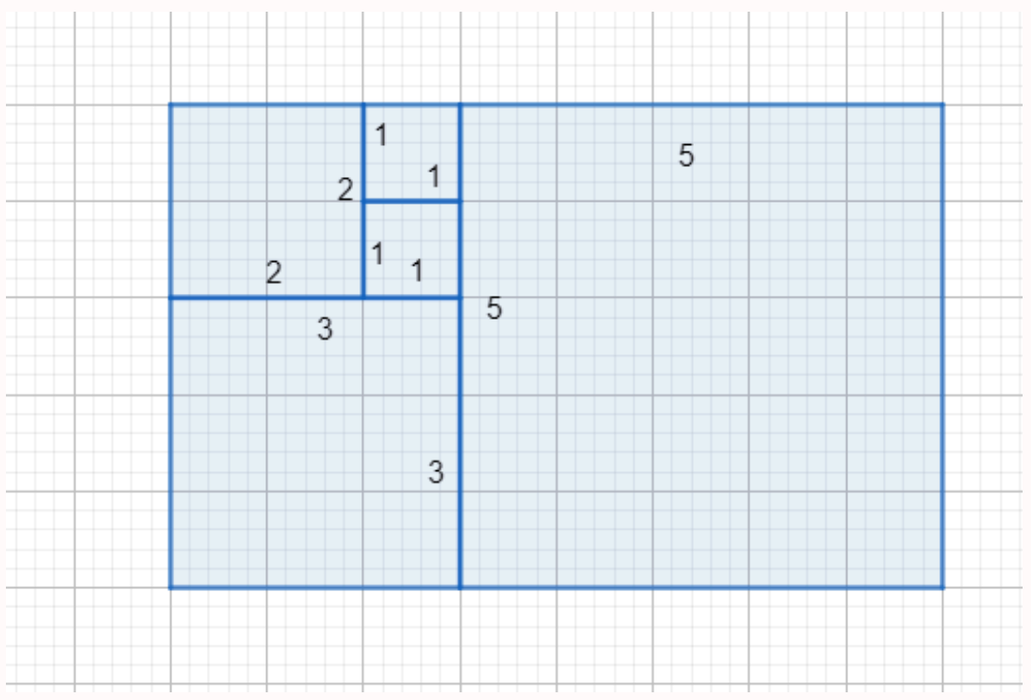


3) Desenhe outro quadrado de lado 2, usando a lateral dos dois quadrados.



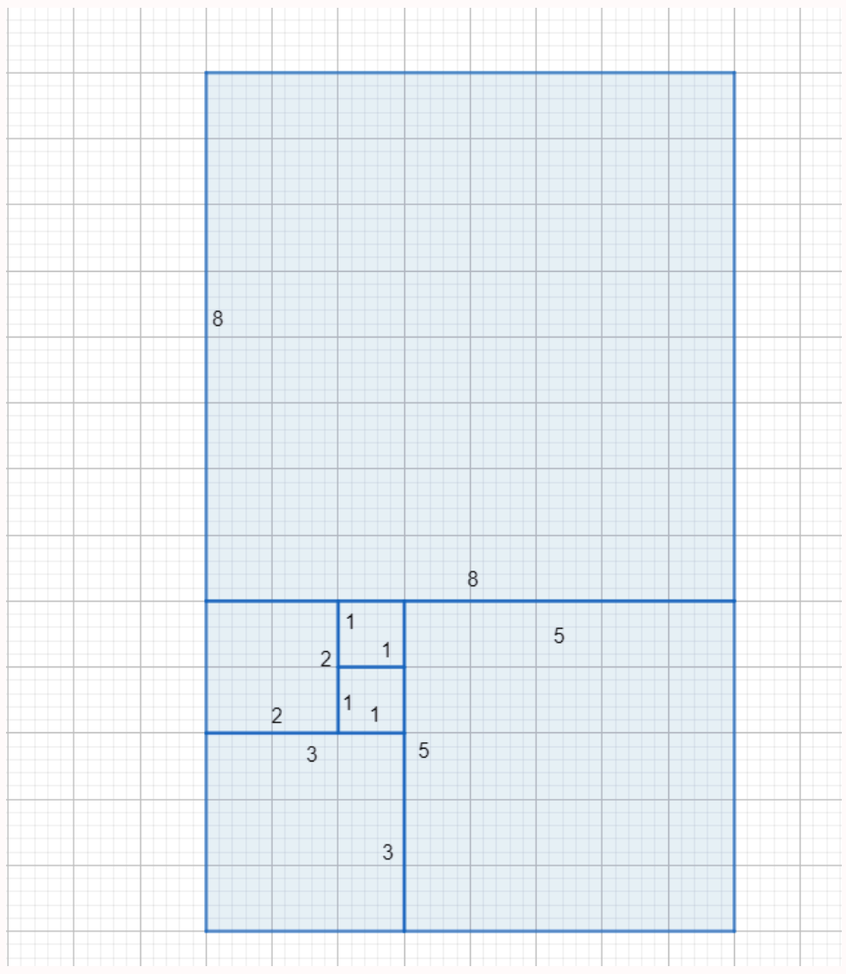
4) Continue adicionando quadrados com lados iguais aos termos da sequência, usando a lateral do retângulo anterior.

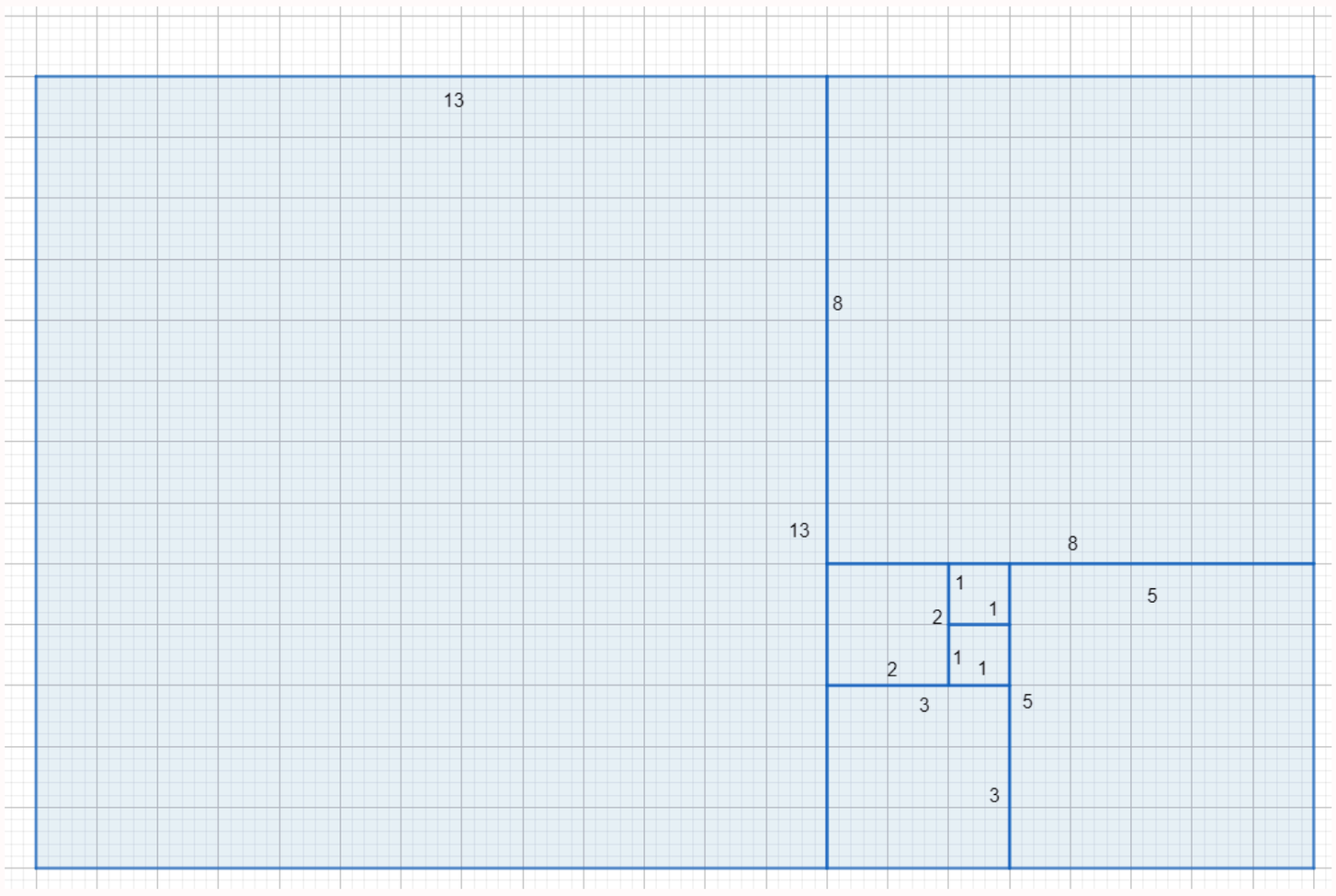




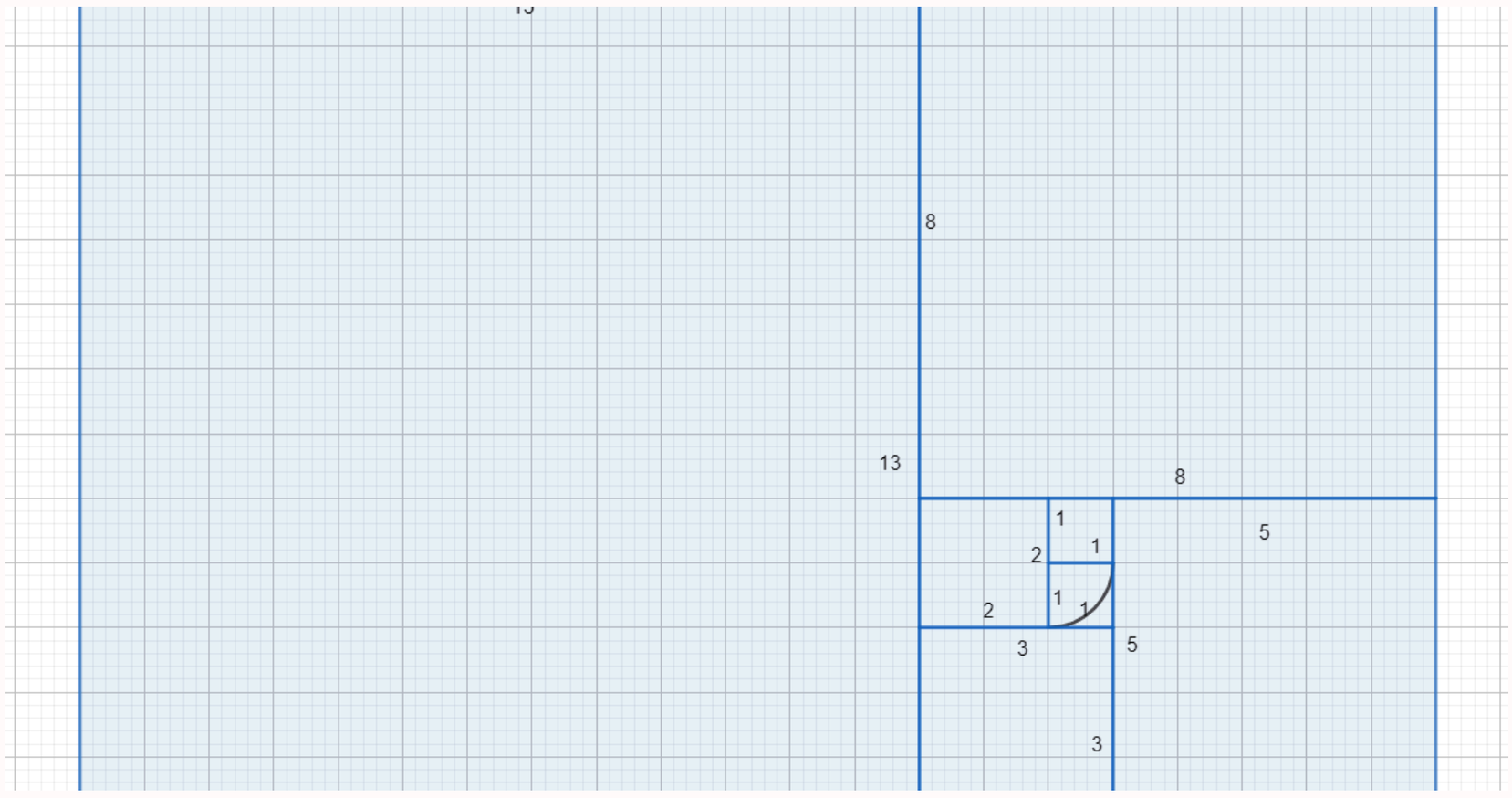


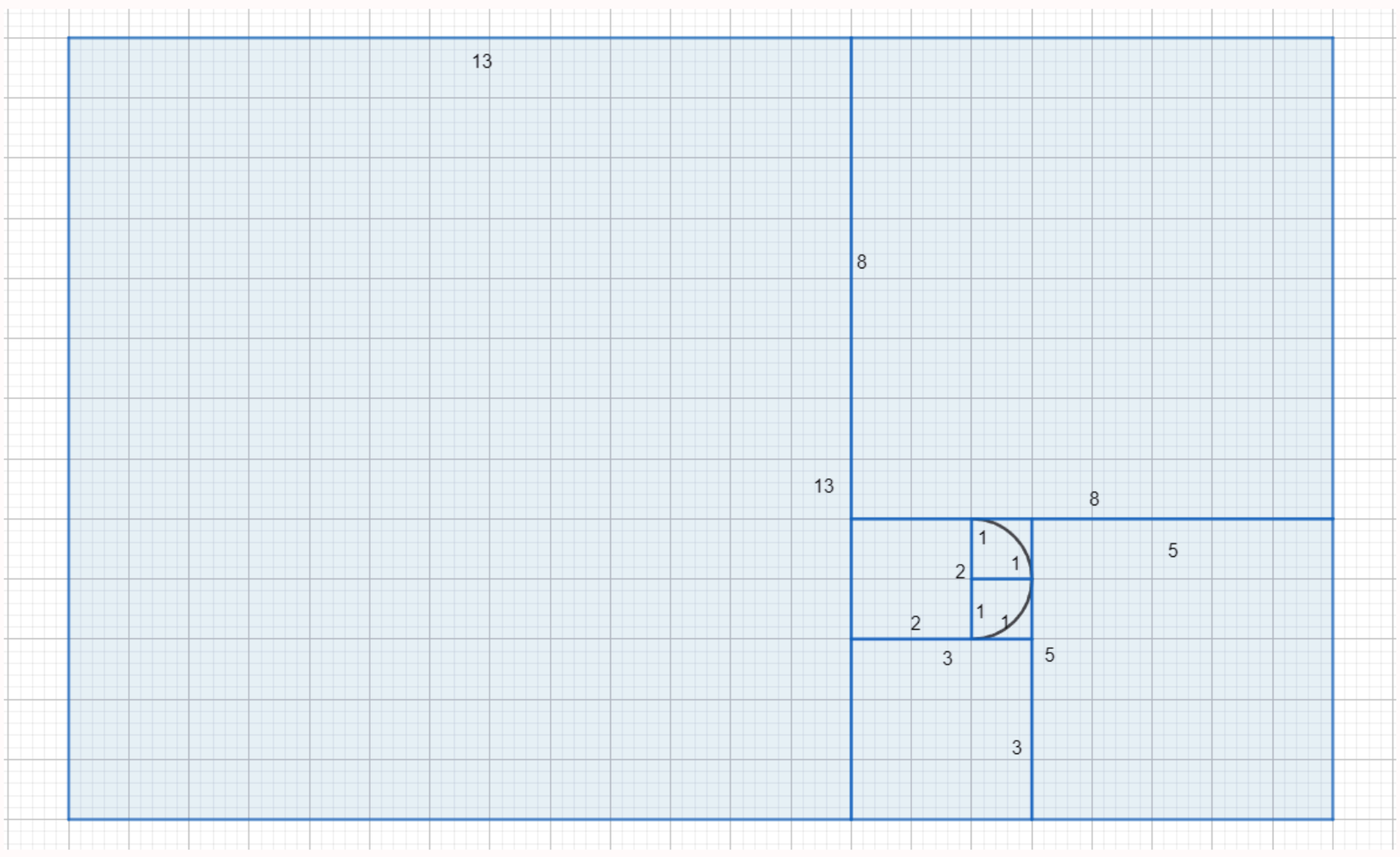
DESENVOLVIMENTO





A espiral será formada conectando-se os arcos de círculos em cada quadrado, usando um compasso, como nas figuras abaixo:

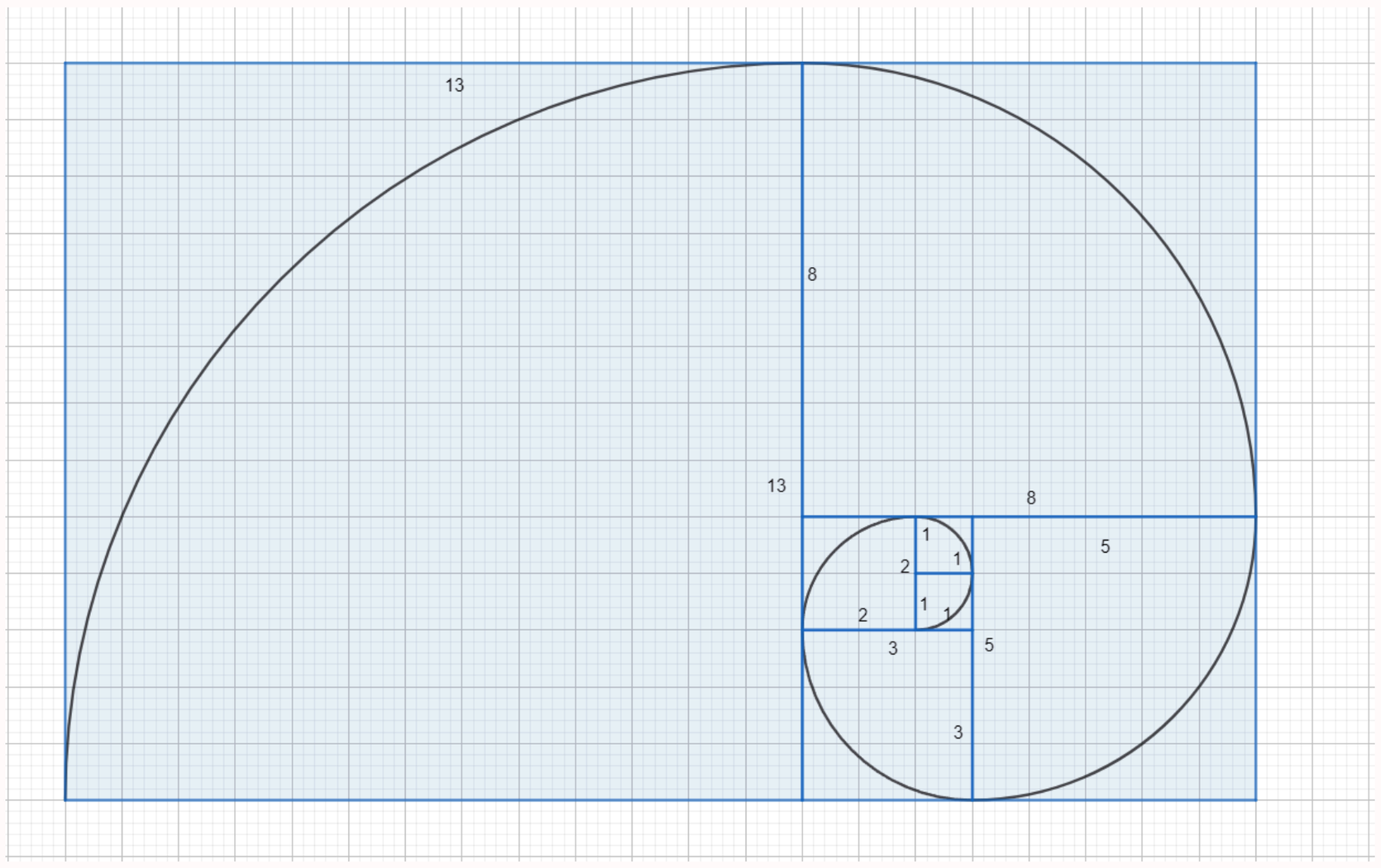






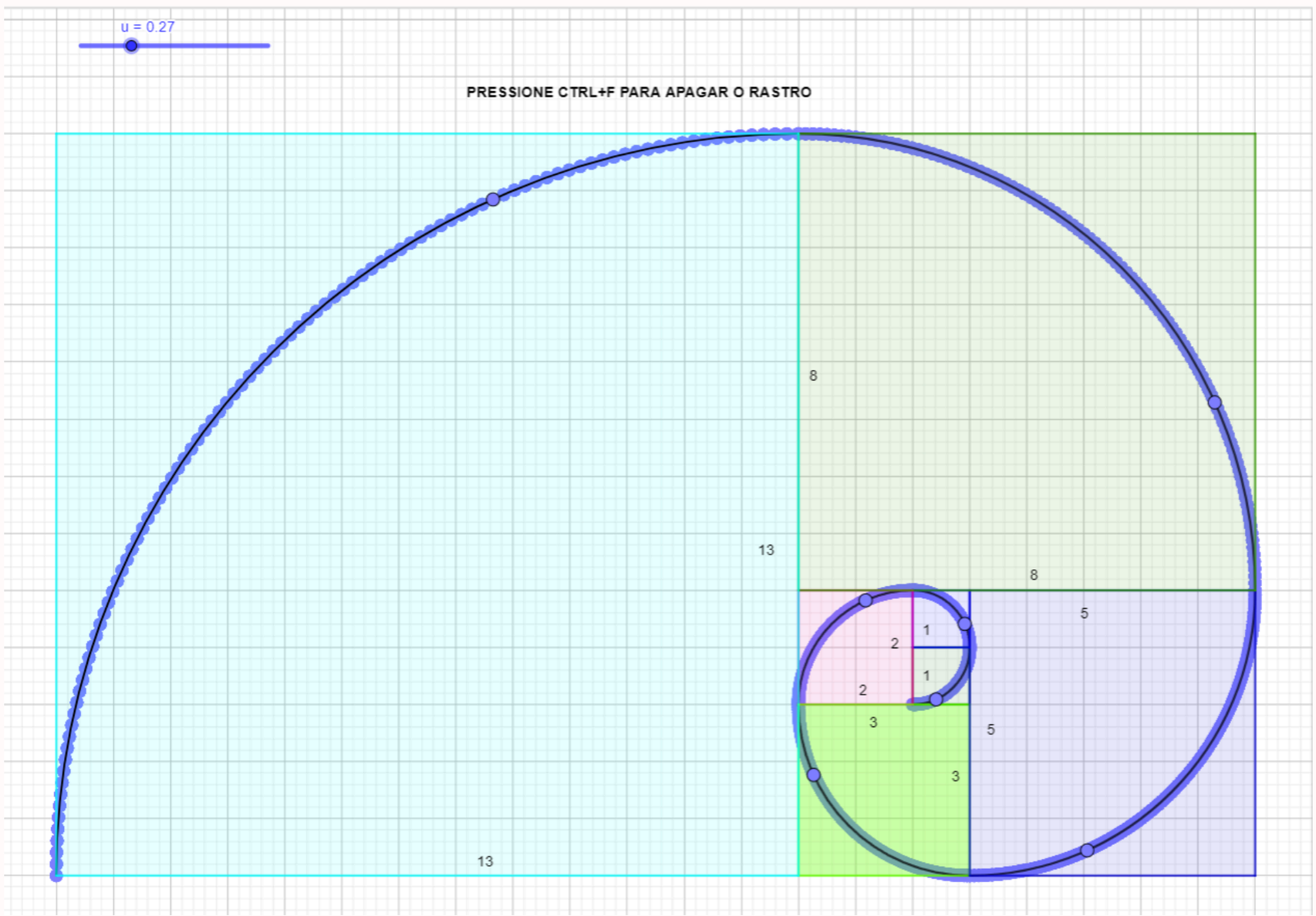
DESENVOLVIMENTO

Peça aos(às) estudantes que continuem conectando os arcos até formar a espiral.



Professor(a), utilize o link abaixo para visualizar com os(as) estudantes uma versão animada e manipulável da Espiral de Fibonacci. Eles(as) poderão interagir ativamente com o objeto:

https://www.geogebra.org/classic/cwmsvqsa



Cumpre ressaltar que a formação da espiral pode variar, a depender da posição em que forem desenhados os quadrados (ex.: talvez, o(a) estudante coloque os dois quadrados iniciais na horizontal, em vez de um em cima do outro).

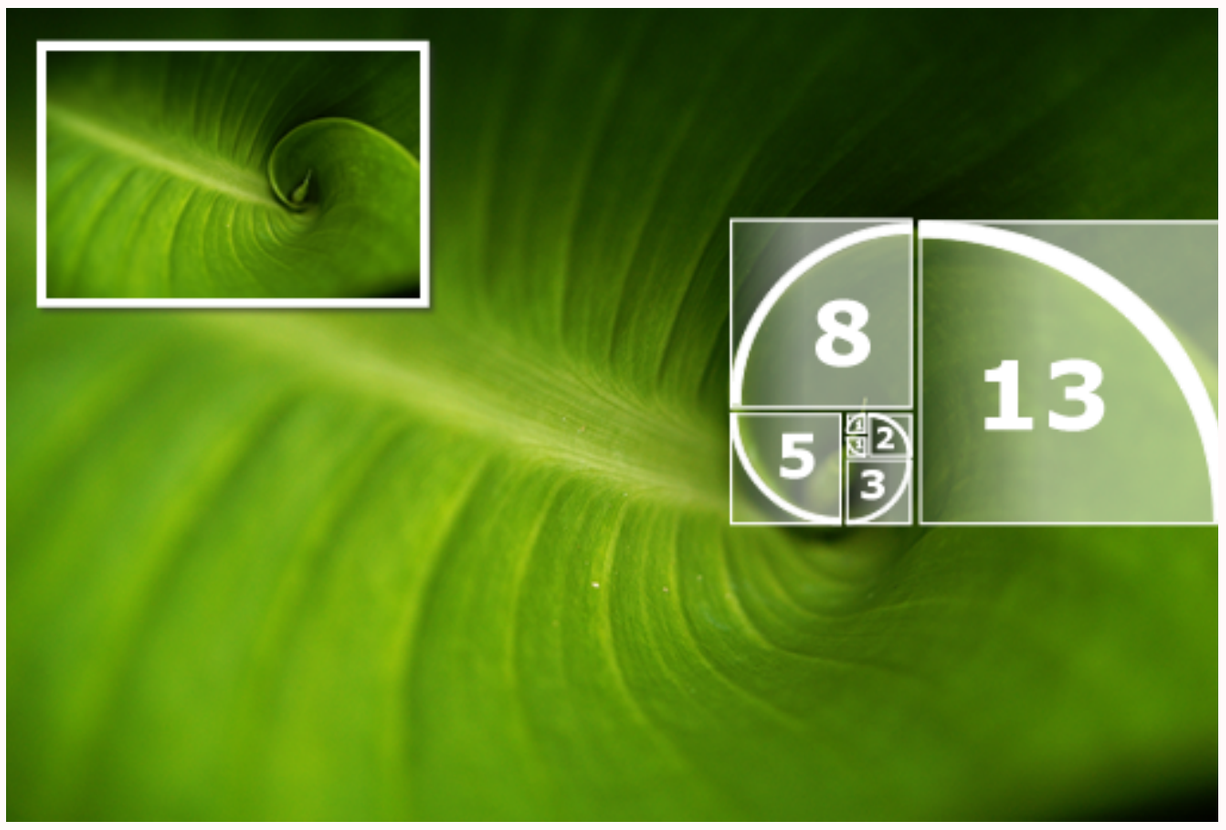


DESENVOLVIMENTO

Professor(a), peça aos(às) estudantes que exibam suas espirais e destaquem, caso haja, as diferentes montagens da espiral. Para finalizar a aula, explique também que a espiral está presente em diversas formas da natureza e que muitos pintores e artistas a utilizaram em suas obras-primas por ser considerada um padrão de beleza. Apresentamos alguns exemplos:







Imagens: https://dobercoateaotumulo.blogspot.com/2014/10/sequencia-de-fibonacci.html



DESENVOLVIMENTO

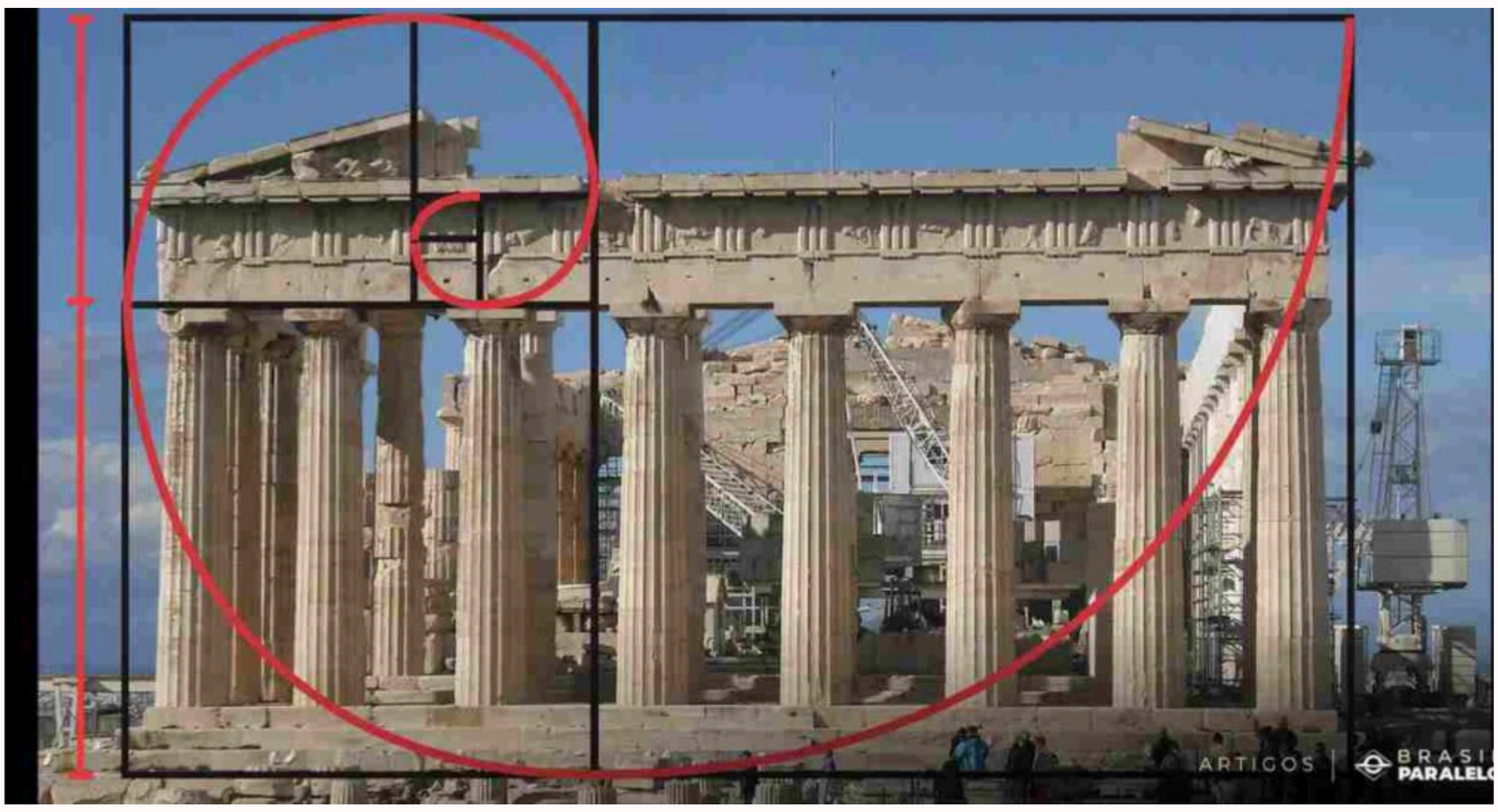


Imagem: https://www.brasilparalelo.com.br/artigos/o-que-e-fibonacci

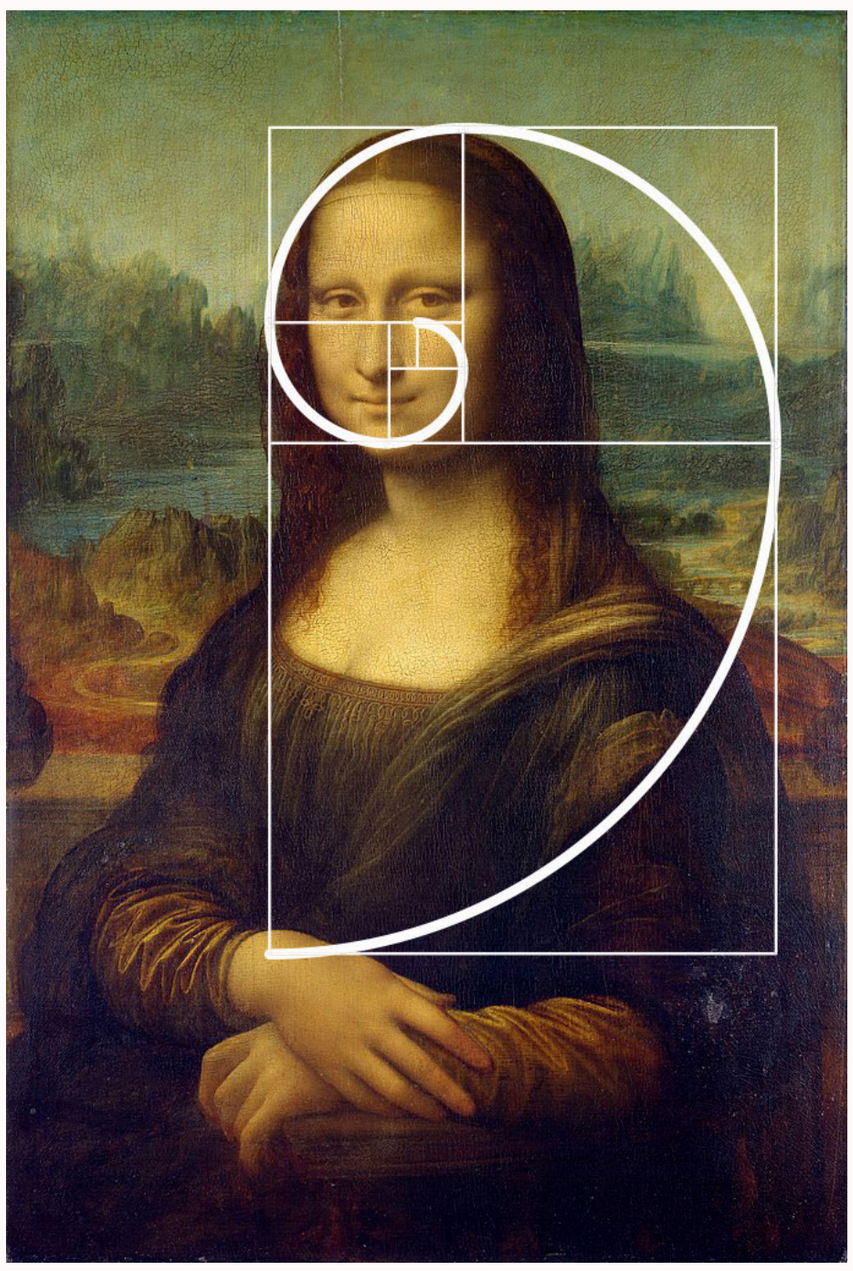


Imagem: https://www.shad.ru/assets/images/content/articles/zolotoe-sechenie-v-dizajne/large-leonardo-da-vinchi-mona-liza.jpg?v=2023-08-17



CONSIDERAÇÕES FINAIS E AVALIAÇÃO

Professor(a), revise com os(as) estudantes o conceito de Sequência Recursiva, dando outros exemplos para ajudar na consolidação das aprendizagens desta aula. A avaliação se dará pela participação e pelo envolvimento na aula.

REFERÊNCIAS

Revisão de sequências. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/pt-8-ano/algebra-sequencia-proporcoes-8ano/sequencia-numerica/a/sequencias#:~:text=Sequ%C3%AAncia%20recursiva%20Uma%20sequ%C3%AAncia%20%C3%A9%20dita%20recursiva%20ou,pode%20ser%20calculado%20em%20fun%C3%A7%C3%A3o%20de%20termos%20antecessores.>. Acesso em: 12 dez 2024.

Sequência de Fibonacci. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/sequencia-fibonacci.htm>. Acesso em: 20 dez. 2024.

Sequência de Fibonacci e os coelhos. Disponível em: <https://blog.wcota.me/fibonacci-parte-1-sequencia-de-fibonacci-e-os-coelhos/>. Acesso em: 20 dez. 2024.

O que é a sequência de Fibonacci e por que é chamada de 'código secreto da natureza'. Disponível em: <https://youtu.be/cHZWZhHQq4g>. Acesso em: 20 dez. 2024.

A Matemática pura é, à sua maneira,
a poesia das ideias lógicas.

Albert Einstein

