OFICINA 14 SEMELHANÇA E O TEOREMA DE TALES

Esta oficina trabalha as seguintes habilidades da matriz:

D5 – Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em aplicação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

D7 – Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou que não se alteram.

O descritor D5 avalia a habilidade de o aluno, usando figuras planas desenhadas em uma malha quadriculada, reconhecer um polígono em que cada lado é ampliado (ou reduzido) por um fator k, e, dessa forma, o perímetro é multiplicado por k e a área é multiplicada por k^2.

Essa habilidade é avaliada por meio de situações-problema contextualizadas, nas quais o aluno é solicitado a ampliar e reduzir figuras planas desenhadas em uma malha quadriculada.

O descritor D7 verifica a habilidade de o aluno reconhecer homotetias entre figuras poligonais planas e, a partir daí, identificar propriedades que se alteram e propriedades que não se alteram nessas figuras.

É importante lembrar que homotetia é uma transformação que amplia ou reduz uma figura ou um gráfico, afastando-a ou aproximando-a de um referencial fixo (construção da noção de semelhança). Nessa etapa do conhecimento, são tratadas apenas as figuras poligonais.

Em um mapa, por exemplo, o contorno de uma região, como um Estado da Federação, é uma redução do contorno real, e se o mapa for muito pequenino podemos ampliá-lo com respeito, por exemplo, ao centro da menor circunferência que contorne toda a região, e assim, toda a linha que contorna a região será afastada (ou aproximada) desse centro de um mesmo fator constante.

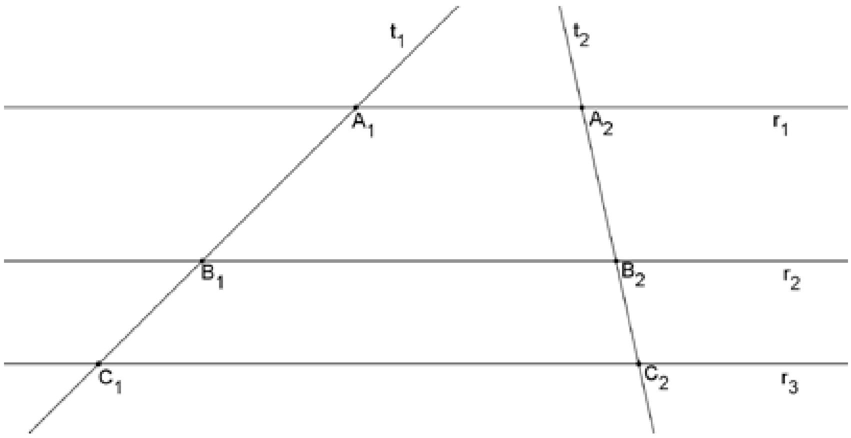
Essa habilidade é avaliada por meio de situações-problema contextualizadas, onde o aluno verifique que multiplicar os lados de uma poligonal por uma mesma constante acarreta uma multiplicação do perímetro da poligonal por essa constante, e acarreta uma multiplicação pelo quadrado da constante no caso do cálculo da área.

Nessa oficina trataremos do Teorema de Tales, de semelhança de triângulos e de homotetia. A semelhança entre figuras planas e a homotetia são importantes ferramentas em várias áreas, como Arquitetura e Engenharia, por exemplo. Plantas, mapas e maquetes são exemplos de aplicações das ideias de semelhança. Já o Teorema de Tales é um importante resultado de geometria, bastante explorado em problemas geométricos.

1. Teorema de Tales

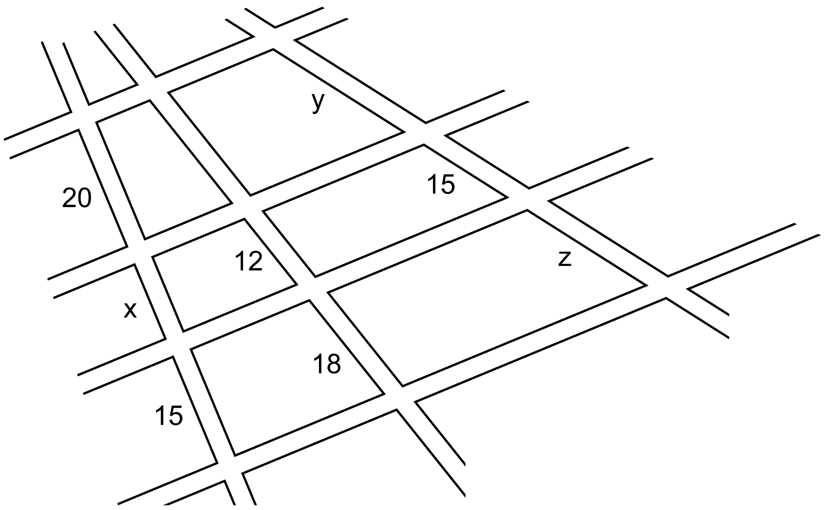
Quando duas retas são transversais a um conjunto de retas paralelas, essas paralelas determinam sobre as transversais vários segmentos.

Teorema (Tales): A razão entre os comprimentos de dois quaisquer desses segmentos sobre uma das transversais é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes na outra transversal.



$$r_1 \,||\, r_2 \,||\, r_3 \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2} \;,\; \frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} \text{ e } \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{A_2C_2} \;.$$

Exemplo 1: Este mapa mostra quatro estradas paralelas que são cortadas por três vias transversais. Algumas das distâncias entre os cruzamentos dessas vias e estradas estão indicadas no mapa (em km), mas as outras precisam ser calculadas. Quais os valores de x, y e z?



Solução: Esse exemplo é uma aplicação direta do Teorema de Tales. Temos que:

$$\frac{15}{z}=\frac{12}{18}\Rightarrow z=\frac{45}{2}=22{,}5\,\text{km}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{20}{15}\Rightarrow y=\frac{20\times z}{15}=\frac{450}{15}=30\,\text{km}$$

$$\frac{x}{15}=\frac{12}{18}\Rightarrow x=\frac{12\times 15}{18}=10\,\text{km}.$$

2. Semelhança

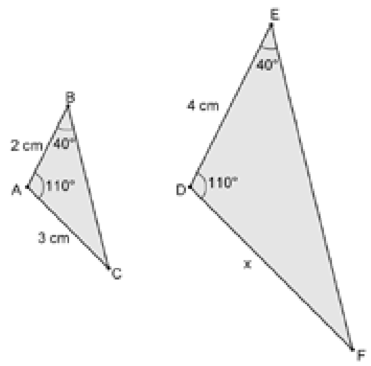
Semelhança é um tema difícil para os alunos. Em geral, eles só conseguem visualizar a semelhança entre dois triângulos quando a posição relativa entre eles é bastante favorável. Por isso, deve-se explorar exercícios onde os triângulos sejam apresentados em posições diferenciadas. Mesmo quando a semelhança é percebida, é comum cometer-se erros ao estabelecer a proporcionalidade entre os lados. Para resolver esse problema, propomos um procedimento que, se seguido, ajudará os alunos a lidar com semelhança de forma correta.

Cenário

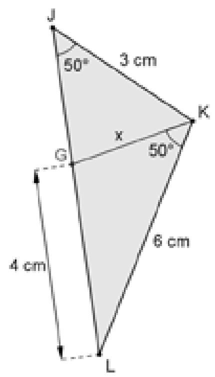
O professor apresenta aos alunos dois problemas com o seguinte enunciado:

Calcule o valor de x em cada uma das figuras abaixo:

a)



b)



a) Nas diversas soluções encontradas observou-se:

$$\frac{x}{3}=\frac{4}{2}\Rightarrow x=\frac{12}{2}\Rightarrow x=6\text{ cm}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{x}\Rightarrow 2x=12\Rightarrow x=\frac{12}{2}\Rightarrow x=6\text{ cm}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{4}\Rightarrow x=\frac{8}{3}\text{ cm}$$

b) A maioria dos alunos não conseguiu resolver essa questão. Os poucos que tentaram resolver apresentaram o seguinte raciocínio:

$$\frac{x}{3}=\frac{6}{4}\Rightarrow x=\frac{18}{4}\Rightarrow x=4{,}5\text{ cm}$$

$$\frac{4}{6}=\frac{x}{3}\Rightarrow \frac{12}{6}=x\Rightarrow x=2\text{ cm}$$

$$\frac{x}{6}=\frac{4}{3}\Rightarrow x=\frac{24}{3}\Rightarrow x=8\text{ cm}$$

Uma pergunta natural é:

“Por que invariavelmente os alunos tendem a acertar o item (a) e errar o item (b)?

É claro que uma resposta a essa pergunta seria:

“Porque o item (b) é mais difícil do que o item (a)!”

Será que essa explicação é suficiente para esclarecer o que está ocorrendo?

De fato o item (b) se apresenta como mais difícil para os alunos. Mas a questão a ser compreendida é a razão pela qual isso ocorre.

Para lançar luz sobre essa polêmica, vamos revisitar o conceito de semelhança entre triângulos.

Definição: Dois triângulos são ditos semelhantes se existir uma correspondência entre seus vértices, de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados em correspondência sejam proporcionais.

Dados dois triângulos ABC e DEF, há seis correspondências possíveis entre seus vértices. Listemos todas elas:

$A \leftrightarrow D$	$A \leftrightarrow D$	$A \leftrightarrow F$	$A \leftrightarrow F$	$A \leftrightarrow E$	$A \leftrightarrow E$
$B \leftrightarrow E$	$B \leftrightarrow F$	$B \leftrightarrow E$	$B \leftrightarrow D$	$B \leftrightarrow F$	$B \leftrightarrow D$
$C \leftrightarrow F$	$C \leftrightarrow E$	$C \leftrightarrow D$	$C \leftrightarrow E$	$C \leftrightarrow D$	$C \leftrightarrow F$

A questão então é verificar se alguma dessas seis correspondências tem as propriedades apresentadas nas definições que são:

- possuir os ângulos em correspondência congruentes;
- possuir os lados em correspondência proporcionais.

Consideremos que uma dessas seis correspondências entre seus vértices,

- $A \leftrightarrow D$
- $B \leftrightarrow E$
- $C \leftrightarrow F$

seja tal que os ângulos em correspondência sejam congruentes, ou seja:

- $\hat{A} \equiv \hat{D}$
- $\hat{B} \equiv \hat{E}$
- $\hat{C} \equiv \hat{F}$

Nesse caso os triângulos ABC e DEF têm a chance de serem semelhantes. Por definição, o que determinará se são semelhantes é se os lados em correspondência forem proporcionais, isto é, se

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}.$$

Quando dois triângulos são semelhantes, eles não são necessariamente "iguaizinhos". Eles têm sim a mesma forma (já que possuem os ângulos correspondentes congruentes), mas não possuem necessariamente o mesmo tamanho (pois nesse caso exige-se somente que os lados correspondentes sejam proporcionais). Assim, triângulos semelhantes são iguais na forma, mas não necessariamente no tamanho.

Intuitivamente: *dois triângulos podem ser completamente diferentes na forma e no tamanho. Porém, se forem iguais na forma (são as medidas dos ângulos que caracterizam a forma do triângulo) eles são ditos triângulos semelhantes. Se além de iguais na forma forem também iguais no tamanho eles são ditos congruentes.*

Portanto, dados dois triângulos, deveríamos verificar, dentre as seis possíveis correspondências entre seus vértices, se alguma delas permite concluir a semelhança entre esses triângulos. Para tal, deveríamos verificar a ocorrência de três congruências, entre os três pares de ângulos e, também, a proporcionalidade entre os pares de lados dos dois triângulos. Assim verificar a semelhança entre dois triângulos pela definição é algo bastante trabalhoso. É aí que entram os casos de semelhança para nos socorrer.

Casos de semelhança entre triângulos.

Caso (AA): Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$ então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.
(Aqui é necessário e suficiente que se tenha dois pares de ângulos congruentes).

Caso (LAL): Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.
(Aqui é necessário e suficiente que se tenha um par de ângulos congruentes e os dois pares de lados, adjacentes a esse par de ângulos congruentes, proporcionais).

Caso (LLL): Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.
(Aqui é necessário e suficiente que se tenha os três pares de lados proporcionais).

Perceba que utilizar os casos de semelhança entre triângulos é bem mais simples e mais rápido que aplicar a definição de semelhança. Assim, os casos de semelhança servem para facilitar o nosso trabalho. Em qualquer um dos casos, basta verificarmos uma quantidade menor de condições do que as descritas na definição de semelhança. É bem mais econômico, não acha?

Voltemos agora aos problemas originalmente propostos no cenário 1.

Em geral, quando os dois triângulos são apresentados numa mesma posição, facilita bastante o reconhecimento da semelhança, bem como a montagem da proporção entre os lados. É o caso da letra (a), onde facilmente se percebe que os triângulos ABC e DEF possuem dois pares de ângulos congruentes, medindo 40º e 110º o que, pelo 1º caso de semelhança (AA), garante a semelhança entre esses triângulos. Pelos ângulos congruentes é possível saber quais são os vértices em correspondência:

$A \leftrightarrow D$ (pois ambos medem 110°)

$B \leftrightarrow E$ (pois ambos medem 40°)

$C \leftrightarrow F$ (que são os que restaram)

Daí fica fácil estabelecer quais lados se encontram em correspondência

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$$
$$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$$
$$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$$

para, em seguida, estabelecer a proporção correta entre as medidas dos lados:

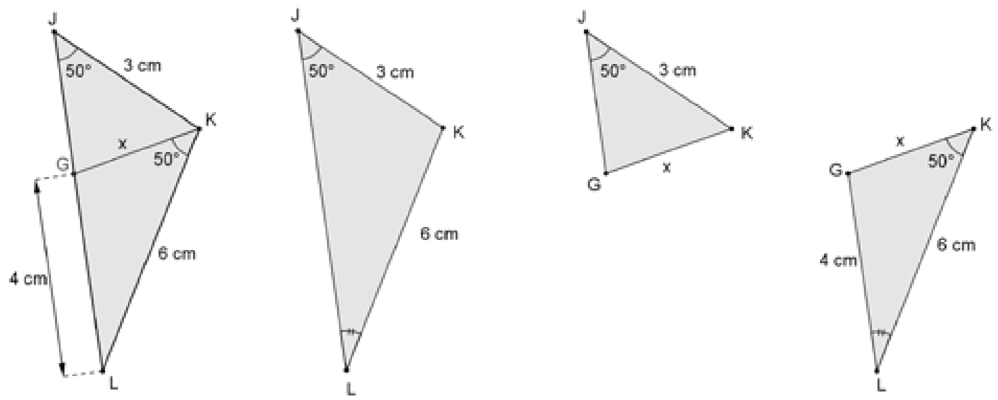
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Pelos dados do problema, é fácil observar que basta utilizarmos a proporção $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, pois ela relaciona os dados conhecidos e a medida a ser calculada:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{4 \cdot 3}{2} \Leftrightarrow x = 6 \text{ cm}.$$

E no caso (b)?

Bem, aí é importante conseguir identificar quais triângulos são semelhantes. Para isso, vale desenhar separadamente os triângulos envolvidos na figura, que nesse caso são três, e marcar nesses triângulos todas as informações que se sabe sobre cada um deles.



Note que do triângulo JGK só se tem informação sobre um de seus ângulos. Já dos triângulos JKL e GKL é possível identificar dois pares de ângulos congruentes, pois há uma par de ângulos medindo 50º e um outro par de ângulos congruentes, por se tratar de um ângulo comum aos dois triângulos. Portanto, pelo caso de semelhança (AA) podemos afirmar que os triângulos JKL e GKL são semelhantes.

A correspondência entre os vértices é a seguinte:

$J \leftrightarrow K$ (pois ambos medem 50^o)
$L \leftrightarrow L$ (pois se trata de um ângulo comum aos dois triângulos)
K $\leftrightarrow$ G (que são os que restaram)

Daí, pode-se montar a proporcionalidade entre os lados do triângulo da seguinte forma:

$$\frac{JL}{KL}=\frac{JK}{KG}=\frac{LK}{LG}$$

Como conhecemos $JK = 3$ cm, $LK = 6$ cm, $LG = 4$ cm e queremos achar $KG = x$, devemos utilizar a última igualdade da proporção acima:

$$\frac{JK}{KG}=\frac{LK}{LG} \Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{6}{4} \Leftrightarrow x=\frac{3\cdot 4}{6} \Leftrightarrow x = 2\text{ cm}.$$

Razão de semelhança

No caso dos triângulos ABC e DEF serem semelhantes e a correspondência entre os vértices for $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$, teremos, consequentemente, $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$. Nesse caso seja k o valor comum dessas três razões, ou seja,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=k.$$

Dizemos que k é a razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo DEF. Perceba, por consequência, que $\frac{1}{k}$ será a razão de semelhança do triângulo DEF para o triângulo ABC, pois

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{AD}{DF}=\frac{1}{k}.$$

Se os triângulos ABC e DEF forem semelhantes e a razão de semelhança entre eles for k, então:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=k \Rightarrow \frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}=\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=k\text{, ou seja, }\frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}=k.$$

Logo, a razão entre os perímetros desses triângulos também é k.

Quaisquer dois segmentos correspondentes nesses triângulos são tais que a medida de um é k vezes a medida do outro.

No caso das áreas desses triângulos temos:

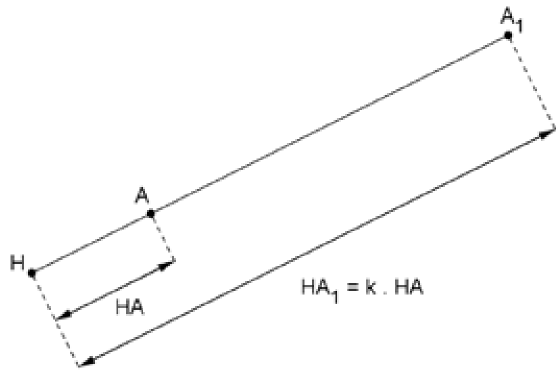
$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{\dfrac{base_{ABC} \times altura_{ABC}}{2}}{\dfrac{base_{DEF} \times altura_{DEF}}{2}} = \frac{base_{ABC} \times altura_{ABC}}{2} \times \frac{2}{base_{DEF} \times altura_{DEF}}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{base_{ABC} \times altura_{ABC}}{base_{DEF} \times altura_{DEF}} = \frac{k \cdot base_{DEF} \times k \cdot altura_{DEF}}{base_{DEF} \times altura_{DEF}} = k^2$$

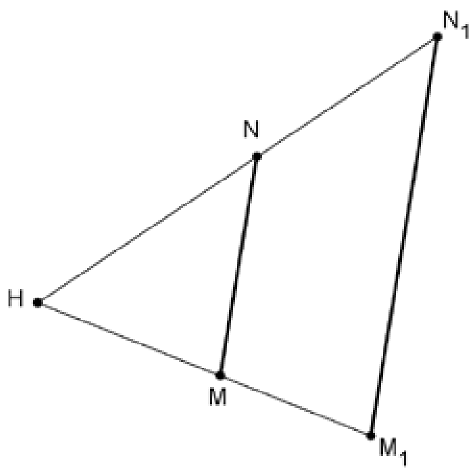
Logo, se a razão de semelhança entre dois triângulos é k, então a razão entre suas áreas é k^2.

3. Transformação homotética

Fixado um ponto H do plano e um número real $k \neq 0$, a homotetia de centro H e razão k é a transformação que a cada ponto A do plano associa o ponto A_1 tal que $HA_1 = k \cdot HA$



Resultado básico de homotetia.



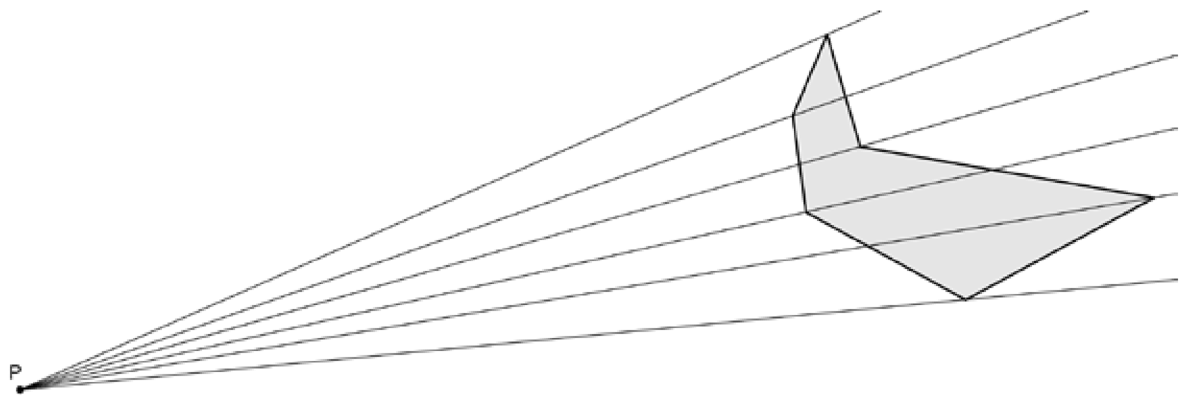
Se $HM_1 = k.HM$ e $HN_1 = k.HN$ então $M_1N_1 = k.MN$

Consequência: Figuras homotéticas são semelhantes.

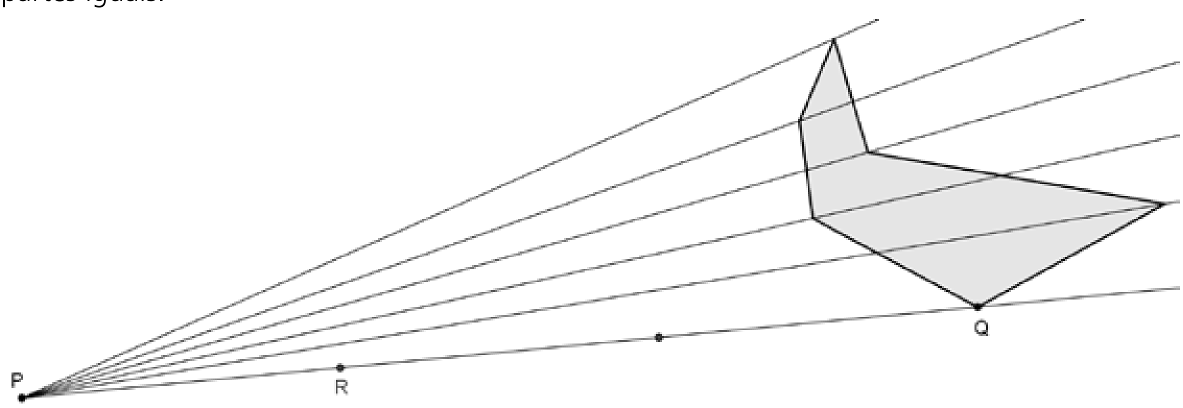
Atividade

Desenhe um polígono semelhante ao polígono da figura abaixo, utilizando uma homotetia de centro P, de modo que a razão de semelhança entre o polígono dado e o polígono a ser desenhado seja igual a 3.

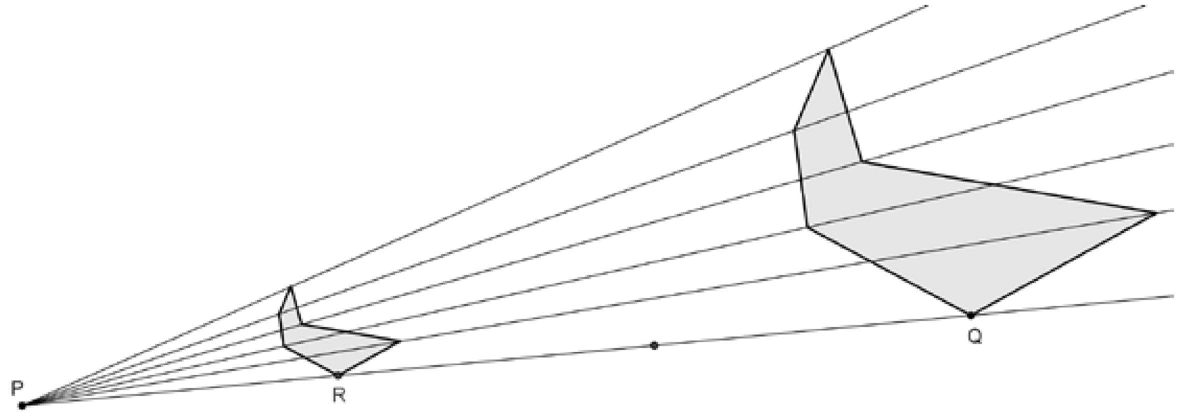
É bastante simples. Inicialmente traçarmos semi-retas a partir do ponto P, passando pelos vértices do polígono dado.



Em seguida dividimos um dos segmentos que unem P a um dos vértices desse polígono, em três partes iguais.



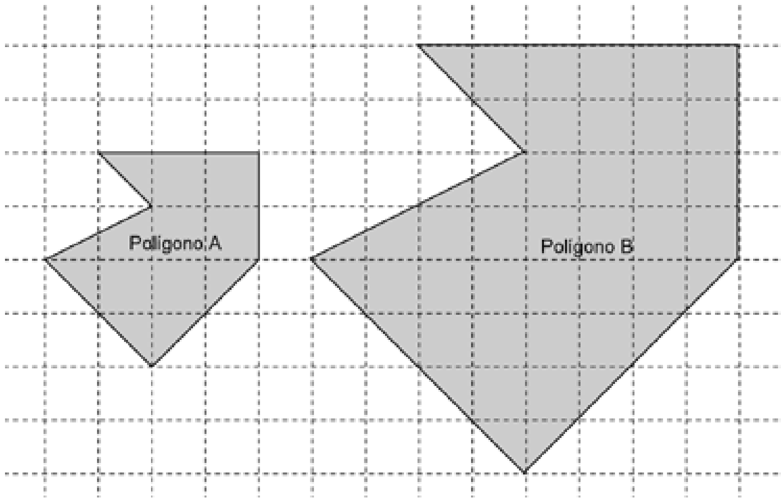
A partir do ponto R, que divide o segmento $\overline{PQ}$ em dois segmentos $\overline{PR}$ e $\overline{RQ}$, que estão entre si na razão 1 para 2, traçamos segmentos paralelos aos segmentos que formam os lados do poligono dado, de forma que os vértices correspondentes estejam sobre a mesma semi-reta.



Construído dessa forma, a razão de semelhança entre o polígono dado e o novo polígono é igual a 3.

Resolva as atividades propostas abaixo.

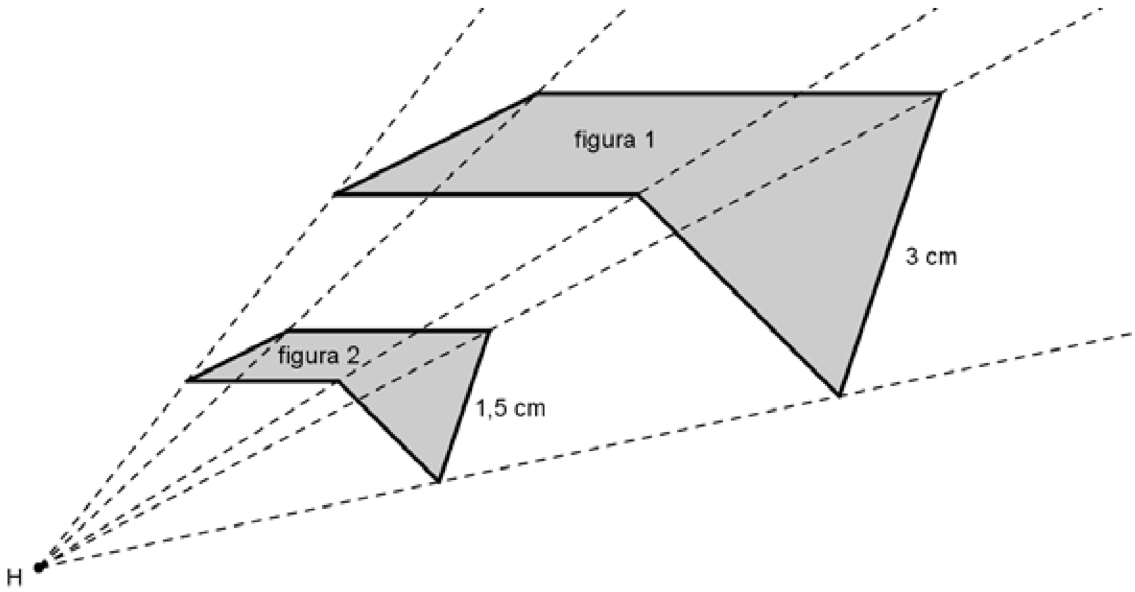
Atividade 1: Na malha quadriculada abaixo, estão representados dois polígonos.



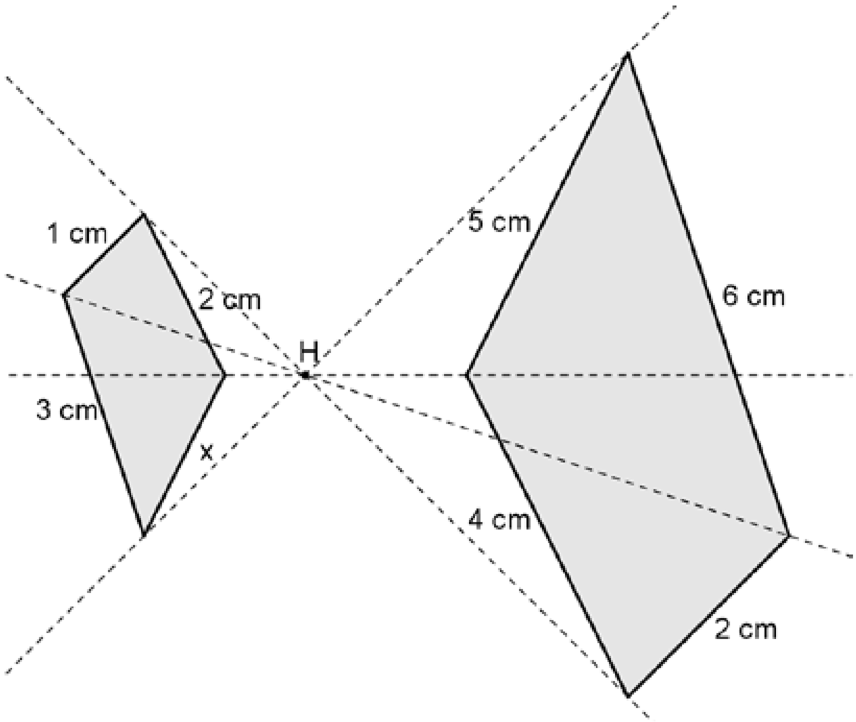
a) Qual a relação entre as medidas dos perímetros desses dois polígonos?

b) Qual a relação entre as medidas das áreas desses dois polígonos?

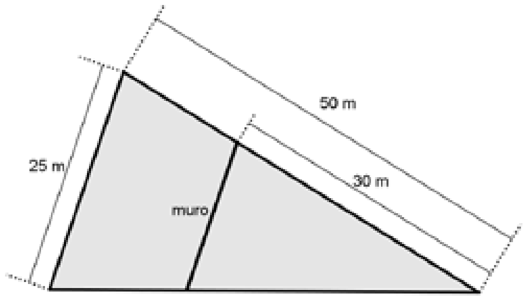
Atividade 2: Determine as medidas do perímetro e da área da figura 2, que foi obtida por uma transformação homotética da figura 1, sabendo que o perímetro da figura 1 mede 17 cm e sua área mede 8 cm^2.



Atividade 3: Qual é a medida do lado indicado por x no quadrilátero menor, sabendo que ele é homotético ao quadrilátero maior?



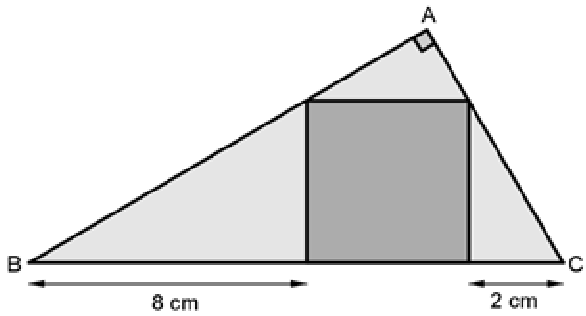
Atividade 4: Um terreno, em forma de triângulo, está repartido em dois lotes, por meio de um muro paralelo a um dos lados do terreno, conforme indicado na figura abaixo. Qual a extensão desse muro?



Atividade 5: Para a realização de uma experiência, uma rampa reta e plana de 2m de comprimento, feita de plástico transparente, foi colocada sobre um terreno plano e horizontal. Quando os raios de sol eram perpendiculares ao terreno, fez-se rolar uma bola desde o ponto mais alto da rampa até o solo, observando-se que a sombra da bola sobre o terreno percorreu uma distância de 1,6 m. Que distância percorreu essa sombra, quando a bola se deslocou 50 cm sobre a rampa?

Atividade 6: Para medir a altura de uma árvore, foi usada uma vassoura de 1,5 m, verificando-se que, no momento em que ambas estavam em posição vertical em relação ao terreno, a vassoura, quando apoiada no chão, projetava uma sombra de 2 m e a árvore, de 16 m. Qual a altura da árvore?

Atividade 7: Na figura abaixo, o quadrado está inscrito no triângulo ABC. Qual a medida do lado desse quadrado?



Atividade 8: Determine o valor de x no triângulo abaixo.