OFICINA 10

FUNÇÃO DO 1º GRAU

Meta:

– Introduzir função do 1º grau.

Objetivos:

– Ao término dessa oficina o aluno deverá ser capaz de:

- reconhecer uma função do 1º grau, seja por sua expressão analítica, seja por seu gráfico;
- resolver problemas que envolvam inequação do 1º grau;
- resolver problemas que envolvam função do 1º grau.

Pré-requisito:

– Equação do 1º grau.

Estarão disponíveis na plataforma diversos aplicativos úteis para a realização dessa oficina. Esperamos que acesse-a e confira os recursos que ficarão à sua disposição. Essa oficina particularmente estará sendo complementada como o material da plataforma. Portanto não deixe de consultá-la.

1. Funções

Considere uma partícula, que parte do repouso, e segue se movimentando, de forma acelerada. Medimos os espaços percorridos em intervalos de tempo iguais. Suponhamos que as medições tenham sido feitas, segundo a segundo, e que os resultados encontrados tenham sido os seguintes:

Tempo (s)	0	1	2	3	4	5	...
Espaço (m)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	...

Obviamente, essa simples tabela não é capaz de descrever completamente a regularidade do evento em estudo, entretanto, ela é fornece uma primeira idéia da regularidade envolvida.

Essa tabela consiste em duas sucessões de números: a dos tempos, cujos valores pertencem ao conjunto dos tempos possíveis a serem considerados, que representaremos por t, e a dos espaços, cujos valores pertencem ao conjunto dos possíveis espaços percorridos, que representaremos por s. Temos então duas grandezas postas em correspondência uma com a outra, tempo e espaço, correspondência essa da qual podemos afirmar que é unívoca, no sentido de t para s $(t \to s)$, visto que não podemos conceber um deslocamento retilíneo que, no fim de um certo tempo, a mesma partícula tenha percorrido dois espaços diferentes. Qual é a relação entre essas duas grandezas? Há alguma lei que as relaciona? Se queremos estudar leis quantitativas, temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de duas grandezas (de dois conjuntos).

Esse instrumento consiste na correspondência de dois conjuntos de números. Vamos buscar uma representação simbólica para os dois conjuntos de números, de forma a torná-los facilmente manipuláveis; do contrário teríamos sempre que estar utilizando tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente.

Para essa representação simbólica introduziremos o conceito de variável, o que se faz da seguinte forma: Seja M um conjunto qualquer de números. Convencionaremos representar qualquer de seus elementos por um símbolo, por exemplo: x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto M, chamamos *variável*. Assim a variável associada a um conjunto, sem coincidir individualmente com nenhum dos números que constituem esse conjunto, é suscetível de os representar a todos. Enfim, a variável de um conjunto é a essência coletiva do conjunto, essência essa que se baseia na essência de cada elemento específico do conjunto, mas não se reduz a ela.

Retomemos nosso exemplo da partícula em movimento. Seja t a variável do conjunto dos tempos e s a variável do conjunto dos espaços. A lei que procuramos consiste na existência de uma correspondência entre t e s, que já sabemos ser unívoca no sentido de t para s. Diremos que a variável s é função da variável t, e escreveremos simbolicamente $s = f(t)$; à variável t, antecedente da correspondência, chamaremos variável *independente*; à variável s chamaremos de variável *dependente*.

Note que quando dizemos que $s = f(t)$, dizemos mais do que está contido na tabela acima. Naquela estão registrados alguns pares de valores da correspondência, ao passo que na afirmação $s = f(t)$, está implicado que a qualquer valor de *t* corresponde um (e somente um) valor de *s*.

Definição: Sejam *x* e *y* duas variáveis representativas de dois conjuntos de números; diz-se que *y* é função de *x* e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \to y$. À *x* denomina-se variável independente e à *y*, variável dependente.

Como se estabelece a correspondência da variável independente com a variável dependente? Há basicamente duas maneiras de estabelecer essa correspondência: através da definição analítica e da definição gráfica.

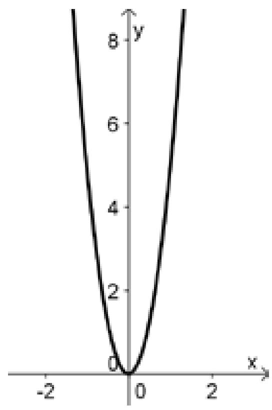
A definição analítica consiste em fornecer um conjunto de operações a serem executadas sobre cada valor *a* da variável independente *x*, de modo a fazer corresponder um valor *b* da variável dependente *y*.

Por exemplo, considere a igualdade $y = 4,9x^2$. Efetuando as operações efetuadas no segundo membro, vemos que esta igualdade faz corresponder, a cada valor de x, um valor de y, por exemplo: a $x = 1 \to y = 4,9$, a $x = 2 \to y = 19,6$, a $x = 3 \to y = 44,1$, a $x = 0,5 \to y = 1,225$, etc. Portanto a expressão analítica fornecida pela igualdade dada acima define uma função $y = f(x)$.

Como se pode observar, essa expressão analítica permite construir a tabela fornecida acima e, além disso, dá a possibilidade de obter o valor de y correspondente a qualquer outro valor real de x. Assim a expressão analítica nos permite extrapolar as informações obtidas na tabela.

A definição gráfica de uma função consiste em fornecer um conjunto de pontos, num plano cartesiano ortogonal, da forma $(x, f(x))$, para todos os valores possíveis da variável independente x.

Por exemplo, para a função cuja a expressão analítica é $y = 4,9x^2$ seu gráfico é dado por:



2. Função do 1º grau

Funções do 1º grau são, dentre as funções básicas, as mais simples. Servem para modelar fenômenos de variação linear.

Uma função *f* é dita uma função do 1º grau quando for da forma

$$\begin{gathered} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) = ax + b \end{gathered}$$

onde *a* e *b* são constantes reais e $a \neq 0$.

Note que, quando $a = 0$, a expressão analítica da função acima se reduz a:

$$\begin{gathered} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) = b \end{gathered}$$

que é o que chamamos de função constante. Este tipo de função associa a todos os valores da variável *x*, um único valor: *b*.

As constantes *a* e *b* presentes na definição de uma função do 1º grau são os coeficientes da função e recebem denominações específicas:

- *a* é chamado de *coeficiente angular*, *inclinação* ou *declividade* da reta que é gráfico da função;
- *b* é chamado de coeficiente *linear* ou *intercepto vertical* da reta que é gráfico da função.

Uma função do 1º grau pode ser classificada como:

- função linear: é uma função do 1º grau na qual $b = 0$. Portanto é da forma $f(x) = ax$, com $a \neq 0$.
- função afim: é uma função do 1º grau na qual $b \neq 0$. Portanto é da forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

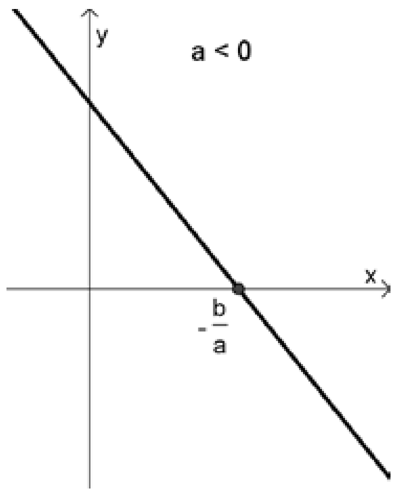
Na plataforma você encontrará aplicativos que ilustrarão essas idéias. Consulte na plataforma os recursos disponíveis que tratam de função do 1º grau.

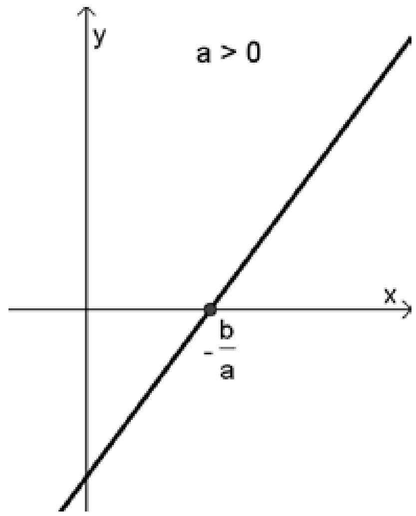
O gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta no plano cartesiano. Mesmo a função constante tem por gráfico uma reta. Porém, no caso da função constante, essa reta será sempre horizontal, paralela ao eixo das abscissas.

Graficamente falando, funções lineares são funções do 1º grau cujo gráfico, que é uma reta, passa pela origem do sistema de coordenadas e, funções afins são funções do 1º grau cujos gráficos, que também são retas, não passa pela origem do sistema de coordenadas.

As raízes de uma função *f* são os valores x_0 para os quais $f(x_0)=0$. No caso de uma função do 1º grau, só há um valor para o qual $f(x_0)=0$, que é a solução da equação do 1º grau $ax+b=0$ que, conforme já foi visto na Oficina 3, é $x_0=-\frac{b}{a}$. Assim, o ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{a},0\right)$ é um ponto do gráfico da função do 1º grau e, por ter ordenada nula, esse ponto é onde o gráfico da função intercepta o eixo das abscissas.

Em função do sinal do coeficiente angular de uma função do 1º grau, temos duas possibilidades:





Note que, conhecendo-se a raiz de uma função do 1º grau é possível conhecer o sinal da função:

Sinal do coeficiente angular	Valores para os quais a função é positiva	Valores para os quais a função é negativa
$a<0$	$x<-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$a>0$	$x>-\frac{b}{a}$	$x<-\frac{b}{a}$

Exemplo 1: Resolva a inequação $\frac{2x}{x+1} \geq 1$.

Solução:

Sempre que for resolver uma inequação (desigualdade), é necessário deixar um dos membros igual a zero pois, comparar alguma coisa com zero é o mesmo que estudar o seu sinal. Assim, nossa primeira preocupação será transformar essa desigualdade numa desigualdade correspondente a essa, só que com o segundo membro nulo:

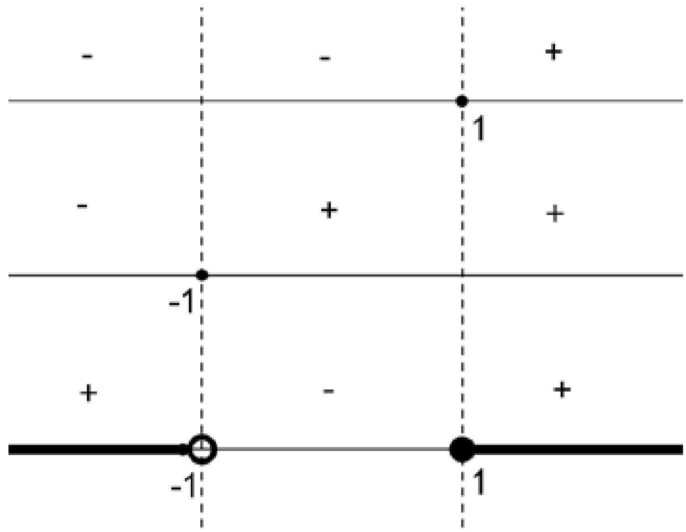
$$\frac{2x}{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{2x}{x+1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x - x - 1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 0$$

Resolver essa última desigualdade é o mesmo que informar quais valores de x tornam a expressão $\frac{x-1}{x+1}$ positiva ou nula. Como essa expressa é uma fração, para conhecer o seu sinal basta conhecermos o sinal do numerador e do denominador.

Mas o numerador e o denominador são formados por expressões do 1º grau. Então é fácil, vamos estudar o sinal de cada expressão separadamente:

Numerador: $x - 1$. Raiz: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Coeficiente angular: $a = 1 > 0$.

Denominador: $x + 1$. Raiz: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Coeficiente angular: $a = 1 > 0$.



Nesse ponto observe que a raiz da expressão que forma o denominador da expressão jamais pode ser incluído, pois não se pode permitir que o denominador de uma fração se anule já que não há divisão por zero. Daí a "bola aberta" em -1, no esquema acima. Já a raiz do denominador será ou não incluída dependendo se a desigualdade é estrita ou não. No exemplo em questão temos uma desigualdade do tipo $\geq$, logo nos interessa o caso em que a expressão se anula. Como uma fração é nula quando seu numerador é nulo, segue que nesse exemplo nos interessa a raiz do numerador, no caso o 1(daí a "bola fechada" em 1, no esquema acima).

Logo, a solução da inequação fornecida é o conjunto de todos os valores reais de x, tais que $x < -1$ ou $x \geq 1$. Em forma de intervalo ficaria: $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

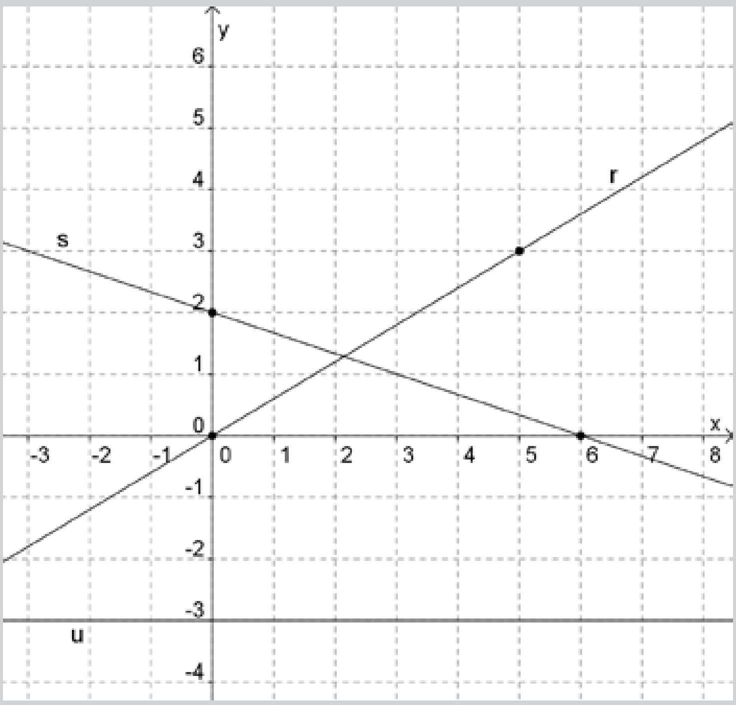
■

É muito comum o aluno “resolver” esse tipo de inequação da seguinte forma:

$$\frac{2x}{x+1} \geq 1 \Rightarrow 2x \geq x + 1 \Rightarrow x \geq 1.$$

Chame a atenção do aluno para a impossibilidade de se proceder dessa maneira pois, ao multiplicar ambos os membros por $x + 1$, que é uma expressão cujo sinal depende do valor de x, fica impossível se saber como ficará a desigualdade.

Exemplo 2: Determine a expressão analítica de cada uma das funções cujos gráficos são as retas que se encontram representadas no plano cartesiano abaixo.



Solução:

A reta u é uma reta paralela ao eixo das abscissas. Com isso a reta u representa uma função constante. Como essa reta intercepta o eixo das ordenadas na altura -3, segue que a expressão analítica da função que tem por gráfico a reta u é: $y = -3$.

A reta r passa pelos pontos (0, 0) e (5, 3). Trata-se então de uma função linear, cuja expressão analítica é da forma $y = ax$. Como passa pelo ponto (5, 3) tem-se que, ao fazermos $x = 5$ deveremos ter $y=3$. Assim: $3 = a \times 5$, donde $a = \frac{3}{5}$. Com isso a expressão analítica da função que tem por gráfico a reta r é: $y = \frac{3}{5}x$.

A reta s passa intercepta os eixos coordenados nos pontos pelos pontos (6, 0) e (0, 2). Trata-se então de uma função afim, cuja expressão analítica é da forma $y = ax + b$. Como passa pelo ponto (6, 0) tem-se que, ao fazermos $x = 6$ deveremos ter $y = 0$ e, como passa pelo ponto (0, 2) tem-se que, ao fazermos $x = 0$ deveremos ter $y = 2$.

Assim:

$$\begin{aligned} 0 &= a(6)+b \Rightarrow 6a+b=0 \\ 2 &= a(0)+b \Rightarrow b=2 \end{aligned}$$

Substituindo $b=2$ em $6a+b=0$ obtém-se: $6a+2=0$, ou seja, $a=-\dfrac{1}{3}$.

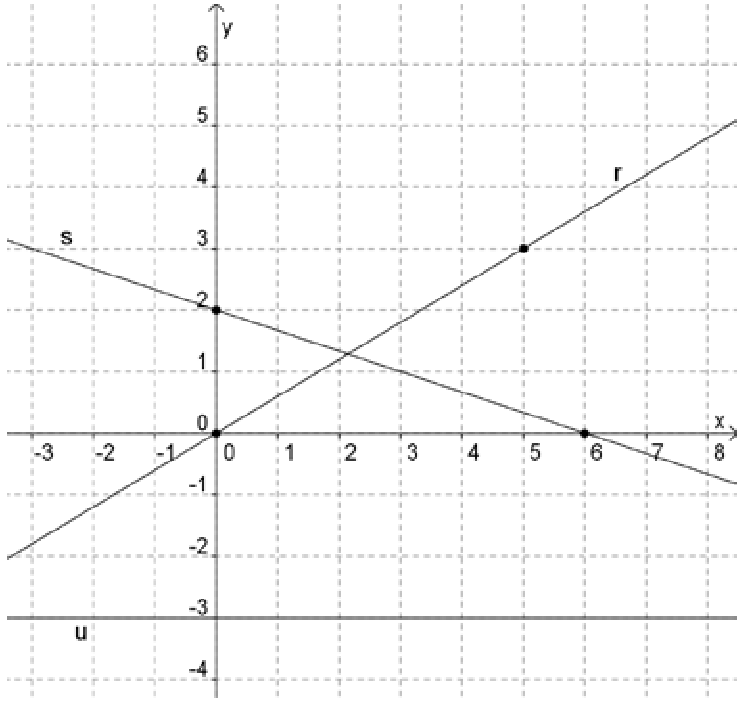
Com isso a expressão analítica da função que tem por gráfico a reta s é: $y=-\dfrac{1}{3}x+2$.

■

Resolva as atividades propostas abaixo.

Atividade 1: Resolva a inequação $\dfrac{2x}{x+1} \geq 1$.

Atividade 2: Determine a expressão analítica de cada uma das funções cujos gráficos encontram-se representados no plano cartesiano abaixo.



Atividade 3: O custo *C*, em reais, para José produzir picolés é dado por $C(x) = 300 + 1{,}2x$, onde *x* representa o número de unidades produzidas. A receita, em reais, que ele obtém com a venda desses picolés, em função do número *x* de unidades vendidas, é dada por $R(x) = 2x$. Considere que José vende tudo que produz. Quantos picolés devem ser vendidos para se obter um lucro de R$ 1300,00?

Atividade 4: Resolva a inequação $\dfrac{1}{2x+1} < \dfrac{1}{1-x}$.

Atividade 5: Na cidade de João e Maria, haverá shows em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.

<u>Pacote 1:</u> taxa de R$ 40,00 por show.
<u>Pacote 2:</u> taxa de R$ 80,00 mais R$ 10,00 por show.
<u>Pacote 3:</u> taxa de R$ 60,00 para 4 shows e R$ 15,00 por cada show a mais.

João assistirá a 7 shows e Maria, a 4. Quais são as melhores opções para João e Maria?

Atividade 6: Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água e medir o nível da água nesse copo. O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Número x de bolas	Nível y da água
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

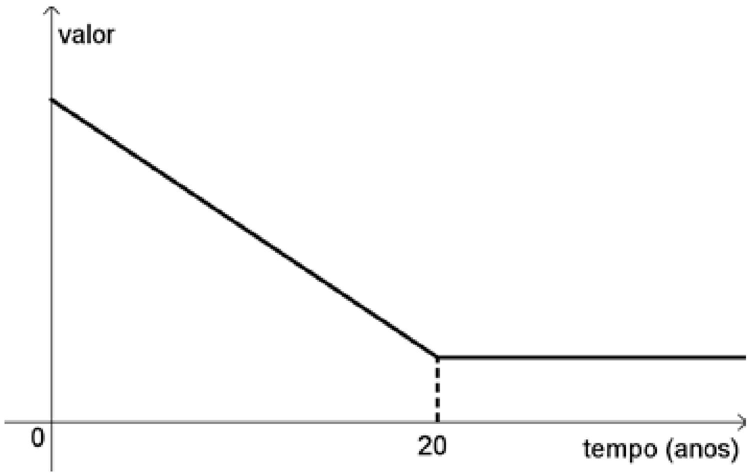
Qual é a expressão da função que fornece a grandeza y em função da grandeza x?

Atividade 7: O cálculo do Imposto de Renda na Fonte (IRF) é feito de acordo com a tabela seguinte (fevereiro/2008)

Base de Cálculo	Alíquota (%)	Parcela a deduzir
Até R$ 1.372,81	Isento	----
De R$ 1.372,81 até R$ 2.743,25	15%	R$ 205,92
Acima de R$ 2.743,25	27,5%	R$ 548,82

Baseado na tabela acima, construa o gráfico do imposto a pagar em função do rendimento e dê a expressão analítica da função imposto a pagar.

Atividade 8: Um veículo de transporte de passageiros tem seu valor comercial depreciado linearmente, isto é, seu valor comercial sobre desvalorização constante por ano. Veja o gráfico abaixo.



Esse veículo foi vendido pelo seu primeiro dono, após 5 anos de uso, por R$ 24.000,00. Sabendo-se que o valor comercial do veículo atinge seu valor mínimo após 20 anos de uso e que esse valor mínimo corresponde a 20% do valor que tinha quando era novo, então qual é esse valor mínimo?

Atividade 9: Os gráficos das funções de 1º grau cujas expressões analíticas são dadas por $y = -x + 5$ e $y = x - 3$ se interceptam no ponto A. Os pontos onde essas retas interceptam o eixo das abscissas são B e C. Qual a medida da área do triângulo ABC?

Atividade 10: Um supermercado está fazendo uma promoção na venda de alcatra: um desconto de 10% é dado nos quilos que excederem a 3. Sabendo que o preço do quilo de alcatra é de R$ 10,00, pede-se:

a) o gráfico do total pago em função da quantidade comprada.

b) o gráfico do preço médio por quilo em função da quantidade comprada.

c) a determinação de quantos quilos foram comprados por um consumidor que pagou R$ 45,00 na compra de alcatra.