MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

1ª Série | Ensino Médio

Matemática

Números Irracionais: localização na reta numérica.

DESCRITOR PAEBES	D033_M Identificar a localização de números irracionais na reta numérica.
HABILIDADE DO CURRÍCULO RELACIONADA AO DESCRITOR	EF09MA02 Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
HABILIDADE OU CONHECIMENTO PRÉVIO	EF09MA01 - Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

VOCÊ SABIA?

CONTEXTUALIZAÇÃO

Para contextualizar uma aula sobre Números Irracionais, é essencial fornecer aos estudantes uma compreensão sólida do que são Números Irracionais, por que são importantes e como eles se comparam aos Números Racionais.

Uma boa definição de que são os Números Irracionais é que eles são Números Reais que não podem ser expressos como a razão de dois inteiros. Eles são números que não podem ser representados como frações simples. Em vez disso, suas representações decimais são não-terminantes e não-repetitivas.

Características dos Números Irracionais:

Decimais não-terminantes e não-repetitivas: Ao contrário dos Números Racionais, cujas representações decimais são finitas ou repetem padrões, os Números Irracionais têm representações decimais infinitas e não periódicas.

Incomensurabilidade: Números Irracionais surgem frequentemente em contextos onde é impossível expressar uma medida ou relação entre grandezas usando Números Racionais. Por exemplo, a diagonal de um quadrado de lado 1 não é um número racional.

Representações Geométricas: Uma abordagem visual pode ajudar os estudantes a compreender os Números Irracionais. Por exemplo, representar a raiz quadrada de 2 geometricamente como a diagonal de um quadrado unitário pode ilustrar por que é irracional.

Geometria: Números Irracionais são essenciais em Geometria, especialmente quando se trata de medidas de figuras e formas irregulares. Por exemplo, a diagonal de um quadrado com lado de comprimento 1 é $\sqrt{2}$, um número irracional. Essa medida é crucial em diversas aplicações, desde a construção civil até a engenharia de software para representar gráficos.

CONTEXTUALIZAÇÃO

VOCÊ SABIA?

Física: Em Física, os Números Irracionais são frequentemente encontrados em fórmulas que descrevem fenômenos naturais. Por exemplo, a constante **Pi** aparece em muitas equações que descrevem movimento circular, ondas e oscilações. Outro exemplo é a constante de Euler, **e**, que é uma base fundamental em cálculos exponenciais e de crescimento.

Matemática Avançada: Em áreas mais avançadas da Matemática, como Análise Matemática, Teoria dos Números e Geometria Diferencial, os Números Irracionais são estudados em detalhes. Eles são essenciais para compreender os conceitos de limites, continuidade, séries infinitas, curvas e superfícies.

Computação e Ciência da Computação: Embora os computadores geralmente trabalhem com aproximações de Números Irracionais, eles são fundamentais em muitos algoritmos e cálculos computacionais. Por exemplo, em algoritmos de otimização, modelagem de sistemas físicos e simulações computacionais.

Criptografia e Segurança de Dados: Números Irracionais são usados em algoritmos de criptografia e segurança de dados para garantir a proteção e a integridade das informações. Algoritmos baseados em funções matemáticas com Números Irracionais são frequentemente usados para garantir a segurança em comunicações digitais e transações financeiras.

Arquitetura e Design: Em arquitetura e design, Números Irracionais são usados para proporções estéticas e precisão de medidas. Por exemplo, na construção de estruturas arquitetônicas, o uso de proporções irracionalmente relacionadas pode resultar em designs mais harmoniosos e visualmente agradáveis.

Essas são apenas algumas das muitas aplicações dos Números Irracionais. Sua presença é fundamental para uma compreensão mais profunda e precisa dos fenômenos naturais, modelos matemáticos e projetos tecnológicos.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RELEMBRANDO NÚMEROS RACIONAIS

Os Números Racionais são aqueles que podem ser expressos como a razão (ou fração) de dois inteiros, onde o denominador não é zero.

$$Q = \left\{\frac{a}{b}, tal\ que\ a \in Z\ e\ b \in Z'\right\}$$

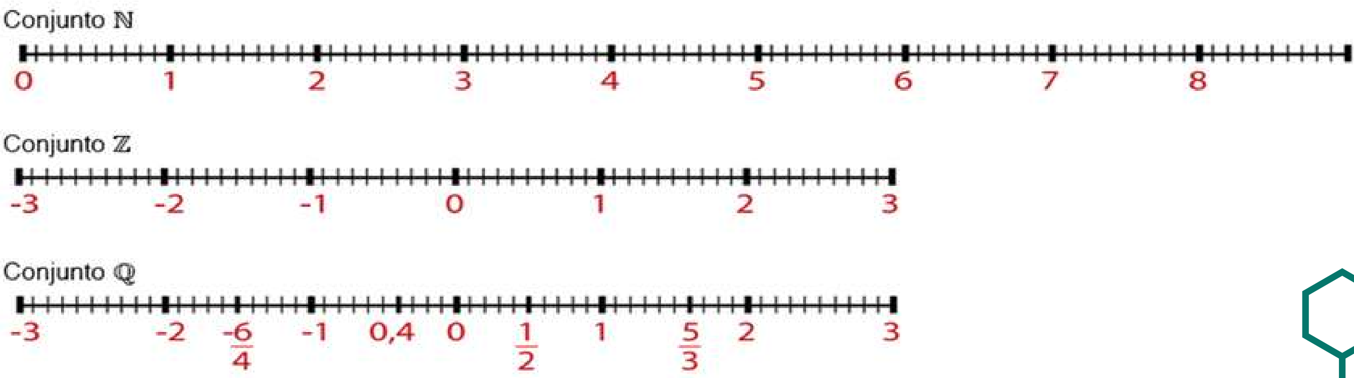
Um número racional pode ser representado de diferentes formas.

Representação fracionária	Representação percentual	Representação decimal
$\frac{30}{100}$	30%	0,3
$\frac{1}{4}$	25%	0,25

RELEMBRANDO LOCALIZAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NA RETA NUMÉRICA

A reta numérica ou reta real é uma representação geométrica do conjunto dos Números Reais. Nela, cada número real está associado a um único ponto e cada ponto está associado a um único número real (relação biunívoca).

Observe a ideia de reta numérica de cada um dos conjuntos numéricos estudados anteriormente:



PARA SABER MAIS

Videoaula sobre localização de Números Racionais na reta numérica. Acesse esse material clicando no botão abaixo ou lendo o QR Code.

[Clique aqui]

Atividade 1

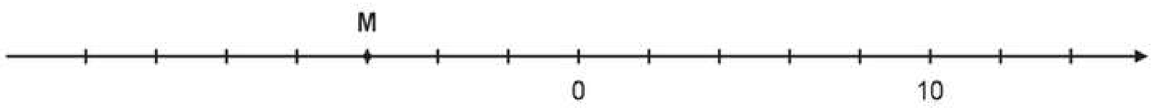
(M100223EX) Observe abaixo a reta numérica, dividida em segmentos de mesma medida.

O ponto P, está melhor representado pelo número

A) 3,10
B) 3,20
C) 3,25
D) 3,50
E) 3,75

Atividade 2

(M100045ES) Observe abaixo a representação de uma reta numérica, dividida em segmentos de mesma medida.

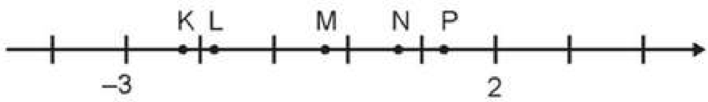


Nessa reta, o ponto M corresponde ao número

A) 5
B) 4
C) – 3
D) – 6
E) – 8

Atividade 3

(M100053EX) Observe abaixo os cinco pontos marcados na reta real, dividida em segmentos de mesma medida.

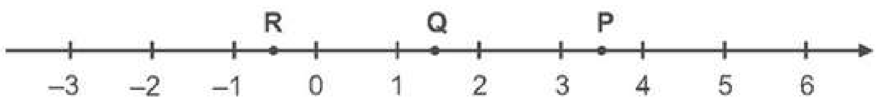


O número real –1,87 está melhor representado nessa reta pelo ponto

A) K.
B) L.
C) M.
D) N.
E) P.

Atividade 4

(M100117EX) Observe abaixo os pontos P, Q e R representados na reta real. Essa reta real está dividida em segmentos de mesma medida.

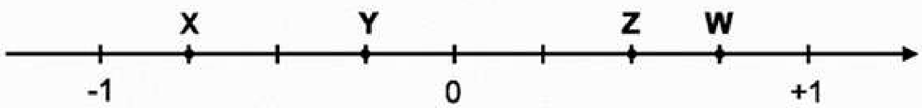


Os pontos que melhor representam os números $\frac{7}{2}$, $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, respectivamente são

A) P, Q e R.
B) P, R e Q.
C) Q, R e P.
D) R, P e Q.
E) R, Q, e P.

Atividade 5

(M080259B1) A figura abaixo representa a reta numérica dos números reais.

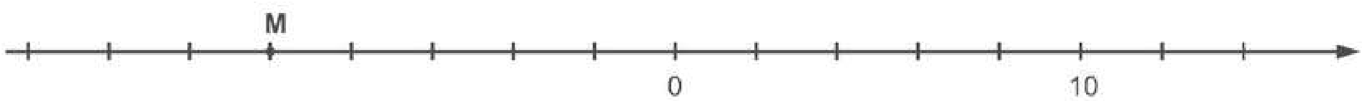


Nessa reta, qual ponto corresponde ao número $-\frac{1}{4}$?

A) X.
B) Y.
C) Z.
D) W.

Atividade 6

(M100225ES) Observe abaixo a representação de uma reta numérica dividida em segmentos de mesma medida.



Nessa reta, o ponto M corresponde ao número

A) − 10
B) − 5
C) − 1
D) 4
E) 10

Gabarito

Atividade 1

Gabarito: C

Atividade 2

Gabarito: D

Atividade 3

Gabarito: B

Atividade 4

Gabarito:A

Atividade 5

Gabarito: B

Atividade 6

Gabarito: A

CONCEITOS E CONTEÚDOS

NÚMEROS IRRACIONAIS

Hoje vamos explorar um conceito fascinante no mundo da Matemática: **os Números Irracionais.**

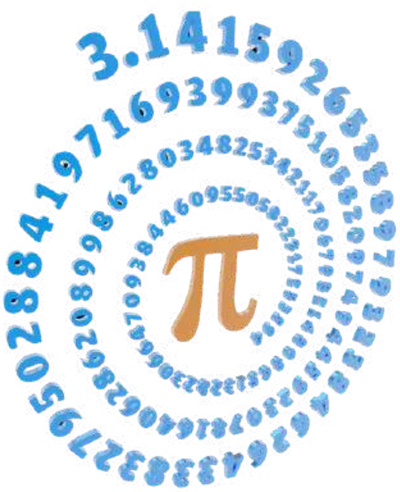
Os Números Irracionais são uma parte fascinante e importante do Conjunto de Números Reais. Eles são aqueles que não podem ser expressos como uma fração simples de dois inteiros. Em outras palavras, eles não podem ser representados como uma razão de dois Números Inteiros.

Em resumo, os Números Irracionais são:
As raízes não exatas: quando um número natural não possui raiz exata, ele é considerado um número irracional. Acontece que se formos procurar a resposta para a radiciação, encontraremos uma dízima não periódica, então as raízes não exatas são Números Irracionais.

$\sqrt{2}$ $\sqrt{51}$ $\sqrt[3]{17}$ $3\sqrt{11}$ $\sqrt[5]{23}$

Dízimas não periódicas: existem várias dízimas não periódicas. As mais comuns são para calcular a raiz não exata de um número.
Veja os exemplos:
$\sqrt{2}=1,41421356...$
$\sqrt{51}=7,1414284285...$

Existem outras dízimas não periódicas bastante comuns no dia a dia, uma delas é o número π, utilizado para cálculos envolvendo círculo e circunferência. Até mesmo sólidos que são compostos por essas figuras planas, como cilindros, utilizam o número π constantemente. Ele é um número irracional, e, por isso, utilizamos o símbolo para representá-lo.



O número **pi** (π) é o mais famoso dos números irracionais. Seu valor é π **= 3,14159265358979323846...** e representa a proporção da medida da circunferência e do seu diâmetro.

AULA PRÁTICA

Videoaula sobre o número

π

Clique aqui

Um outro exemplo de número irracional é o **número de Neper**, representado por **e**, sendo aproximadamente igual a 2,718281.

Podemos ainda citar o **número de ouro**, representado por Phi (φ). Seu valor é φ= 1,618033...

1,618033...

O número de ouro, também conhecido como proporção áurea ou razão áurea, é uma constante matemática representada pela letra grega phi (φ). Sua importância transcende os limites da Matemática e estende-se para a arte, arquitetura, natureza e até mesmo para a estética.

Além disso, o número de ouro é observado na natureza em padrões geométricos e estruturas orgânicas. Desde a disposição das folhas em uma flor até a espiral de uma concha ou a forma das galáxias, a proporção áurea está presente em muitos aspectos do mundo natural. Isso sugere que a proporção áurea não é apenas uma construção matemática, mas sim um princípio subjacente que governa a organização e a beleza do universo.

Na arquitetura, o número de ouro tem sido usado desde a antiguidade para projetar edifícios e monumentos que são visualmente impressionantes e esteticamente gratificantes. Muitas das estruturas mais famosas do mundo, como a Parthenon em Atenas e a Catedral de Notre-Dame em Paris, foram construídas com base em proporções derivadas do número de ouro.

Desta forma, o número de ouro desempenha um papel crucial na arte, arquitetura, natureza e estética, oferecendo uma ferramenta matemática para criar harmonia e beleza. Sua presença não apenas nos campos da matemática e da geometria, mas também em muitos aspectos do mundo ao nosso redor, destaca sua importância e sua influência duradoura na forma como percebemos e apreciamos a beleza.

VEJA NA ANIMAÇÃO COMO O NÚMERO IRRACIONAL ESTÁ PRESENTE NO NOSSO DIA A DIA.

Assista o vídeo Pato Donald e o número de Ouro

Clique aqui

CONCEITOS E CONTEÚDOS

LOCALIZANDO UM NÚMERO IRRACIONAL NA RETA NUMÉRICA.

O número irracional $\sqrt{7}$ está compreendido entre os números:

a) 0 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 6 d) 6 e 8 e) 13 e 15

Esta é uma questão típica das avaliações externas. As raízes não exatas são, em geral, mal compreendidas pelos estudantes. Muitos, ao se depararem com o número, podem argumentar que ele não existe simplesmente porque não representa uma raiz quadrada exata, já que é um número irracional (ou seja, um número decimal com infinitas casas decimais não periódicas).

Mas, essa raiz quadrada existe e é possível aproximá-la desde sua parte inteira até um certo número de casas decimais (se assim se desejar). Associa-se também o estudo dos números quadrados perfeitos, que geram as raízes quadradas exatas. O aluno deve intercalar o 7 entre os dois números quadrados perfeitos mais próximos a ele, ou seja, 4 e 9. Matematicamente, podemos escrever $4 < 7 < 9$.

Os Números Irracionais apareceram na história da Matemática vinculados a contextos da Geometria e das Grandezas e Medidas. Dessa maneira, o trabalho com o cálculo de diagonais de quadrados e retângulos, aplicando-se o Teorema de Pitágoras, contribui para a familiarização dos estudantes com este novo conceito.

Uma sugestão de atividade interessante é localizar na reta numérica o valor de raízes de índice par. Ela associa a representação dos Números Irracionais na reta numérica ao trabalho com o **Teorema de Pitágoras.** Para realizá-la, é preciso utilizar régua e compasso. Vamos usar o valor apenas para ilustrar o método.

AULA PRÁTICA SOBRE TEOREMA DE PITÁGORAS!

Clique aqui

CONCEITOS E CONTEÚDOS

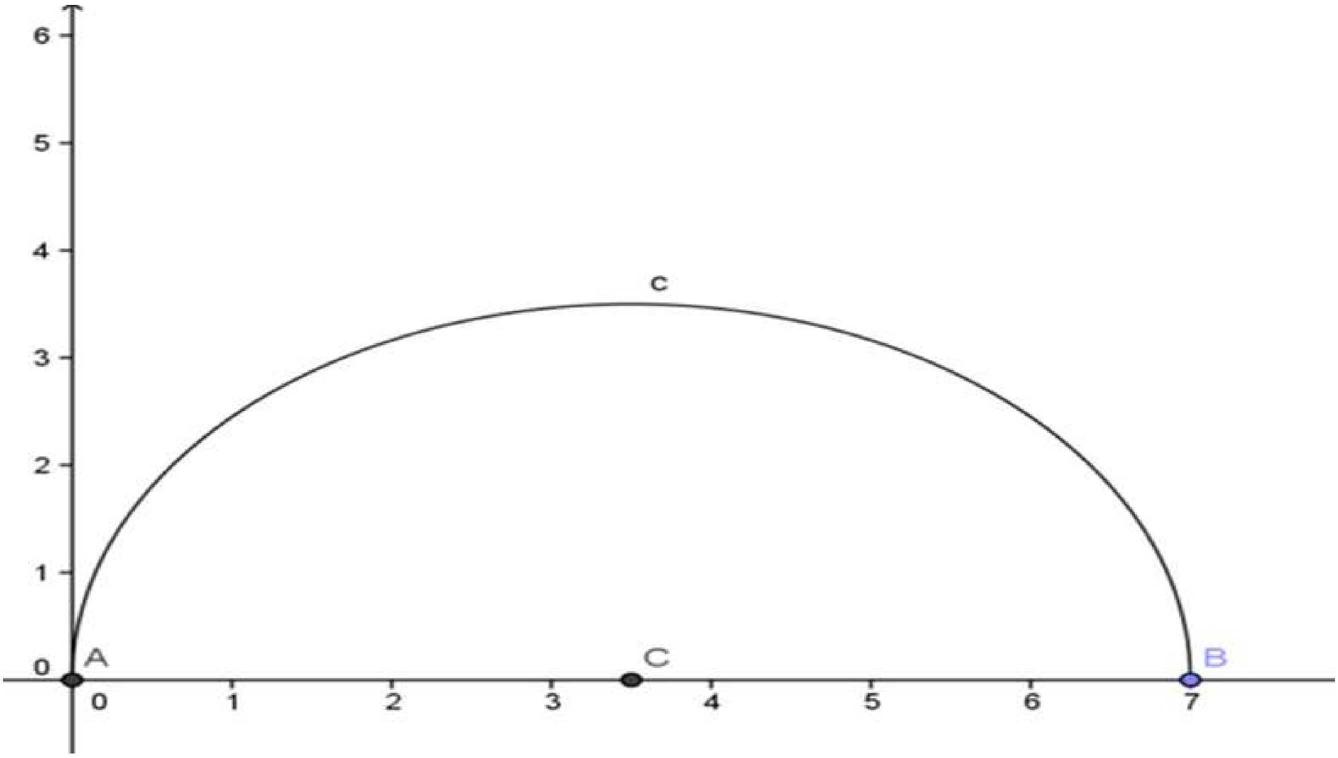
Uma sugestão de atividade interessante é localizar na reta numérica o valor de raízes de índice par. Ela associa a representação dos Números Irracionais na reta numérica ao trabalho com o Teorema de Pitágoras. Para realizá-la, é preciso utilizar régua e compasso. Vamos usar o valor apenas para ilustrar o método.

VAMOS FAZER JUNTOS?

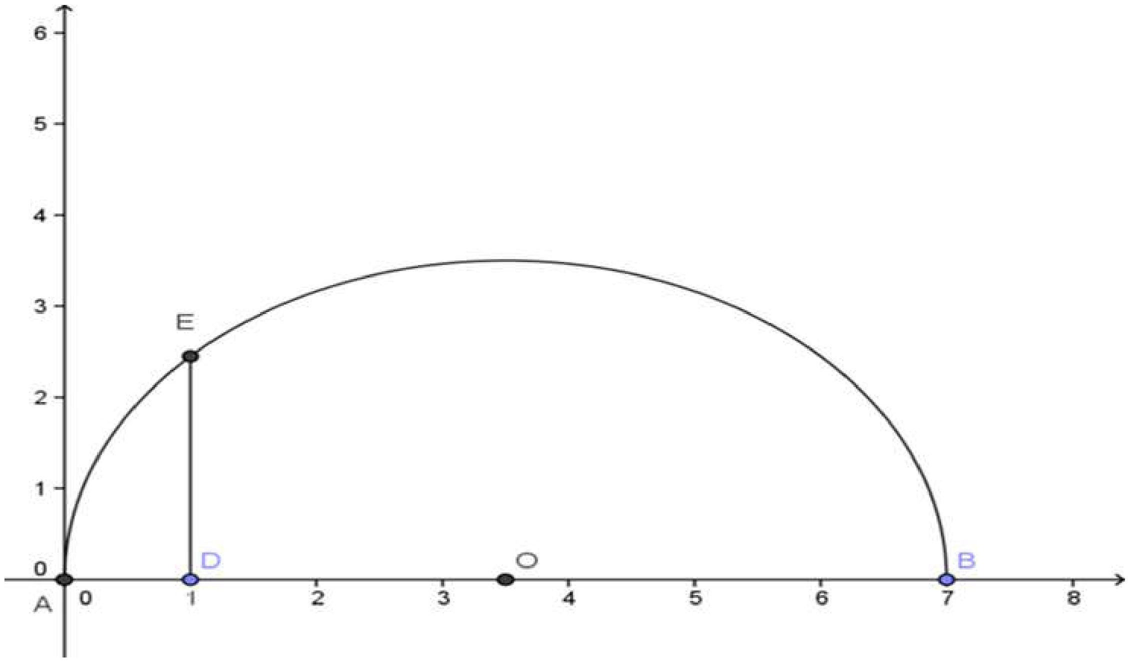
Esse experimento pode ser feito usando o Geogebra. Acesse material clicando no botão abaixo ou lendo o QR Code.

Clique aqui

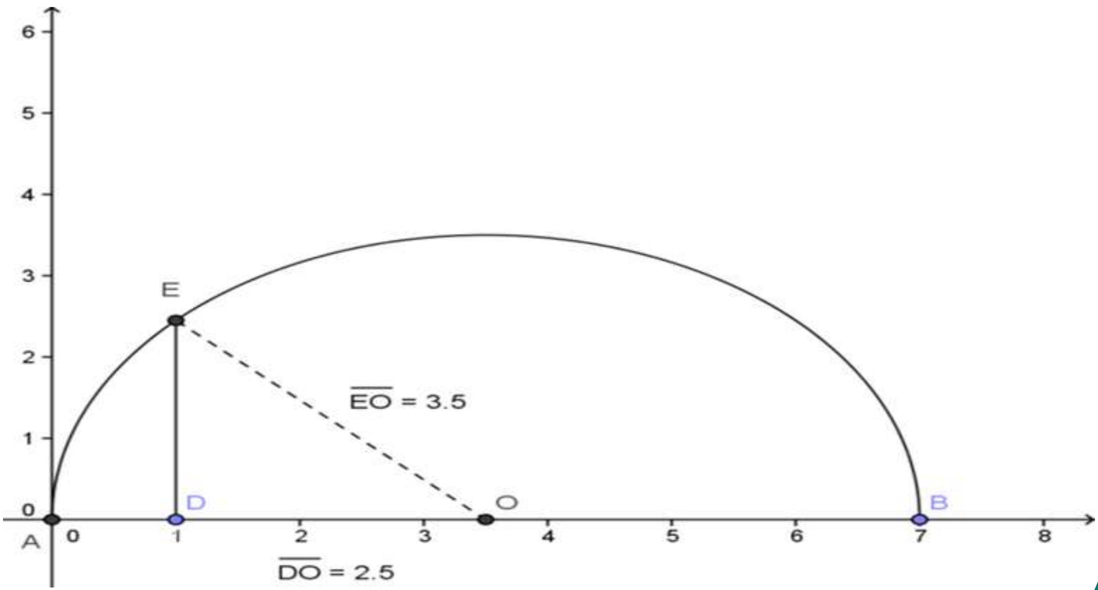
Inicialmente, peça para a turma construir um plano cartesiano e, em seguida, traçar uma semicircunferência de raio 7, de modo que as extremidades do diâmetro sejam os pontos de coordenadas (0;0) e (7;0). Assim, o centro da circunferência estará sobre $x = \frac{7}{2} = 3{,}5$



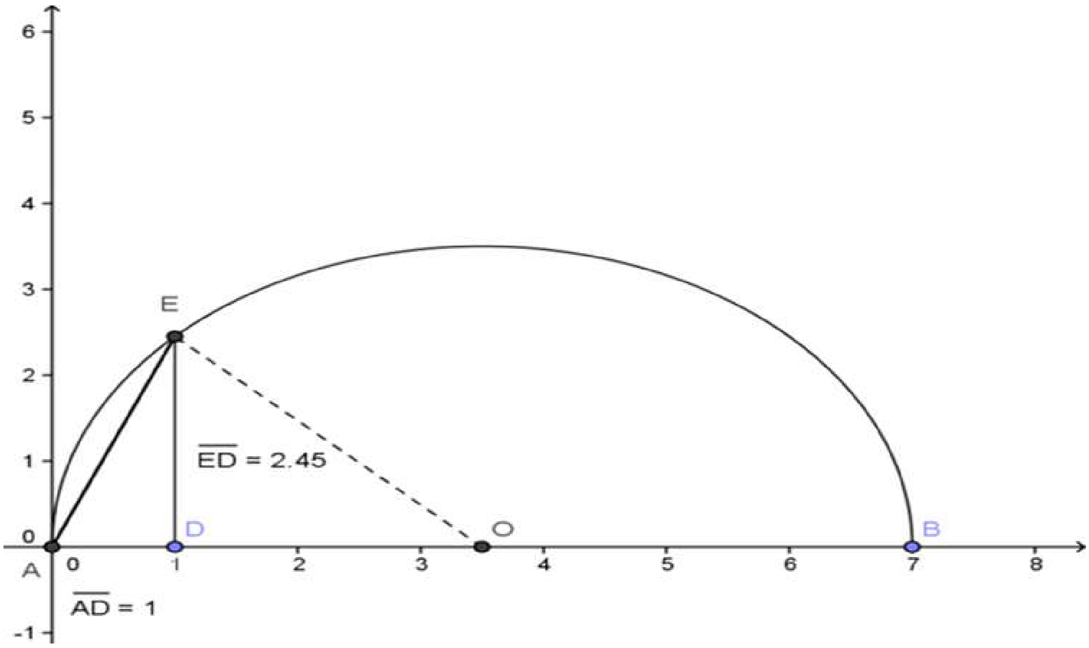
O próximo passo será traçar um segmento perpendicular ao eixo das abscissas no ponto D de coordenadas (1; 0). O ponto de intersecção com a semicircunferência é chamado de E. O segmento DE será apoio na determinação da raiz quadrada procurada.



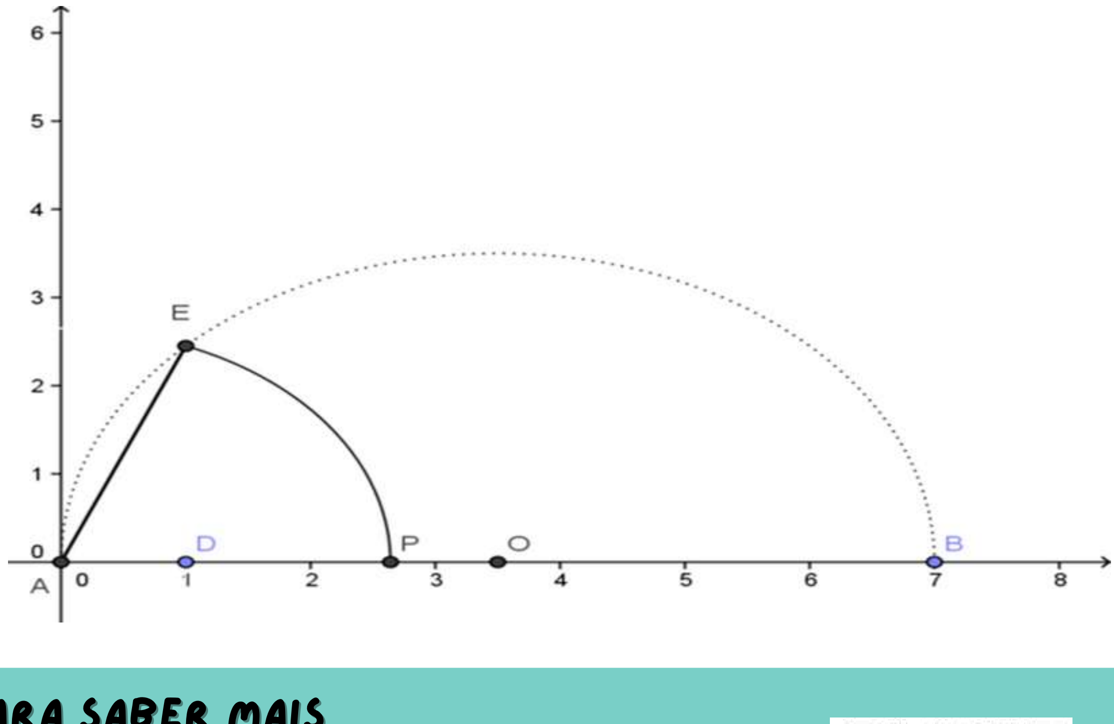
Mostre aos estudantes que, no triângulo DEO, há EO = 3,5 (raio da semicircunferência), DO = 2,5 (ver escala do eixo x). Ao aplicar o Teorema de Pitágoras, será encontrada a medida DE = raiz quadra de 6 = 2,45.



Agora a turma deverá estudar o triângulo ADE. Aponte as medidas dos catetos DE = raiz quadrada de 6 = 2,45 e AD = 1. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo ADE, a turma descobrirá que a hipotenusa AE mede raiz quadrada de 7, que é o valor procurado.



Peça para os estudantes localizarem esse valor no eixo das abscissas. Eles deverão abrir o compasso na distância AE. A intersecção com o eixo x (ponto P) determinará a localização na reta numérica, do número irracional raiz quadrada de 7. Nesse momento, você poderá mostrar a aproximação entre inteiros, verificando que a raiz procurada encontra-se entre 2 e 3. (4 < 7 < 9).



PARA SABER MAIS

Aula prática de Matemática.
Assista a videoaula . Acesse
material clicando no botão abaixo ou lendo o QR Code.

Clique aqui

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1 Sobre os Números Irracionais, julgue as afirmativas a seguir:
I – A divisão de dois Números Irracionais sempre será um número irracional.
II – Toda dízima é um Número Irracional.
III – Um número não pode ser racional e irracional ao mesmo tempo.
Analisando as afirmativas, marque a alternativa correta.
A) Somente I é verdadeira.
B) Somente II é verdadeira.
C) Somente III é verdadeira.
D) Somente I e II são verdadeiras.
E) Somente II e III são verdadeiras.

Resolução
Alternativa C
I – Falsa - Ao realizar-se as operações básicas entre dois números irracionais, a resposta nem sempre será um número irracional.
II – Falsa - Toda dízima não periódica é irracional, porém as dízimas periódicas são racionais.
III – Verdadeira - Um número real é racional ou irracional.

2 Observe os números a seguir:
I) 3,141414....
II) 4,1234510
III) 2π
IV) 1,12349093...
São números irracionais:
A) Somente I e II.
B) Somente III e IV.
C) Somente I e III.
D) Somente II e IV.
E) Somente II, III e IV.

Resolução
Alternativa B
I – Racional - Dízimas periódicas são números racionais.
II – Racional - Note que esse número é um decimal exato, e números decimais exatos são racionais.
III – Irracional - π é irracional, e o produto dele por dois continha sendo irracional.
IV – Irracional - Dízimas não periódicas são sempre números irracionais.

3 Observe os números a seguir:

I) 3,141414....
II) 4,1234510
III) 2π
IV) 1,12349093... São números irracionais:
A) Somente I e II.
B) Somente III e IV.
C) Somente I e III.
D) Somente II e IV.
E) Somente II, III e IV.

Resolução:
D) F - F - V

4 Indique nas alternativas a seguir quais são e quais não são números irracionais.

a) $\sqrt{13}$
b) $\sqrt{99}$
c) $\sqrt{250}$
d) $\sqrt{400}$
e) $\sqrt{100}$

Resolução:
a) Irracional
b) Irracional
c) Irracional
d) Não é irracional, pois possui raiz exata
e) Não é irracional

5 Identifique os números a seguir quais são irracionais:

a) 3,6055512754639...
b) 2,2360679774997...
c) 1,333333333333...
d) 2
e) 22/1

Resolução:
a) Irracional
b) Irracional
c) Não é irracional (é racional)
d) Não é irracional
e) Não é irracional

CONCEITOS E CONTEÚDOS

NÚMEROS REAIS

Definimos conjunto como sendo um agrupamento de elementos, que, nos conjuntos numéricos, são números. O Conjunto dos Reais é representado pela letra maiúscula R e é formado pelos Números Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais.

Veja a representação numérica de cada um desses conjuntos:

Conjunto dos Números Naturais: É representado por todos os números positivos. Seu símbolo é o N maiúsculo.

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5 , 6 , 7...}

Conjunto dos Números Inteiros: Esse conjunto é formado pelos elementos do conjunto dos números naturais e os números inteiros negativos. Ele é representado pela letra maiúscula Z.

Z = {... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4...}

Conjunto dos Números Racionais: É representado pela letra maiúscula Q. Pertencem a esse conjunto os números naturais, inteiros, decimais, fracionários e dízima periódica.

Q = {-2, -1,2, -1, 0, 1/2, 1, 2, 2,5 ....}

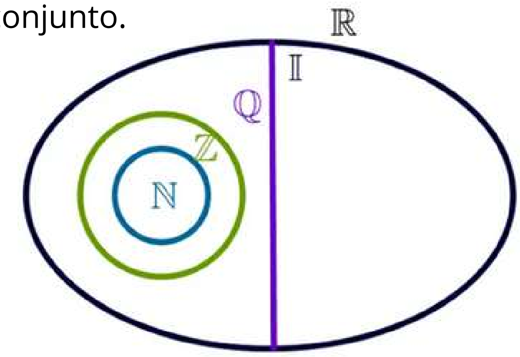
Conjunto dos Números Irracionais: Esse conjunto é formado pelos números que são dízimas não periódicas, ou seja, decimais infinitos que não possuem uma repetição de números após a vírgula. É representado pela letra maiúscula I.

I = {... - 1, 234537..., 3,34527..., 5,3456...}

Como o Conjunto dos Números Reais possui todos os conjuntos descritos acima, sua representação numérica é:

R = {... -4, -3, -2, -1,23, 0, 1/2, 1, 2, 3,34527..., 5 , 6 , 7}

Veja agora como podemos representar o Conjunto dos Reais por meio de diagramas. A relação estabelecida na imagem a seguir é de inclusão, isto é, um conjunto está contido em outro conjunto.



QUER SABER MAIS SOBRE NÚMEROS REAIS

Assista a videoaula do Portal da Matemática

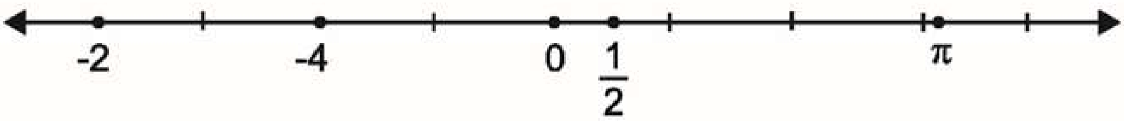
Clique aqui

Atividade 1

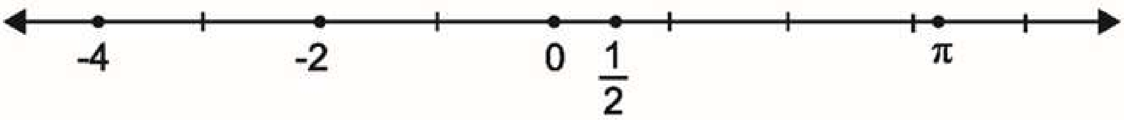
(M1D14I0080) Sejam os números reais 0; - 4; π ; $\frac{1}{2}$ e - 2.

A representação desses números na reta real está na alternativa

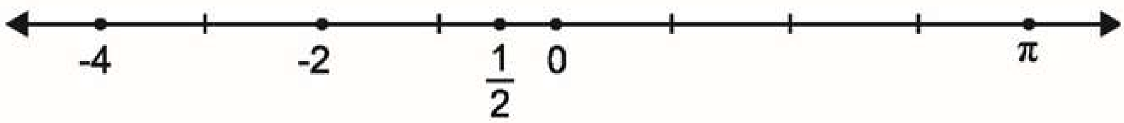
A)



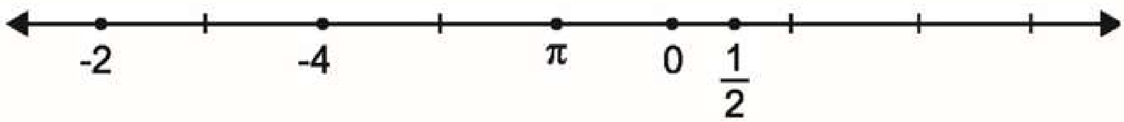
B)



C)

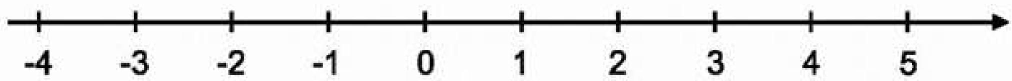


D)



Atividade 2

(M120358B1) Carlos construiu uma reta numérica como representado abaixo.

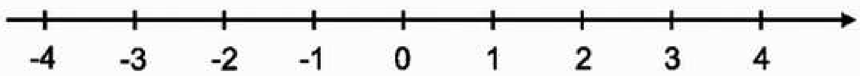


O número $-\sqrt{5}$ está localizado entre os números

A) – 2 e – 3.
B) – 1 e – 2.
C) 1 e 2.
D) 2 e 3.
E) 3 e 4.

Atividade 3

(M100037EX) Veja a reta numérica abaixo.

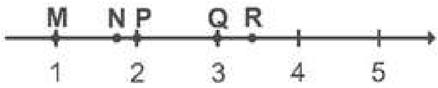


O número $\sqrt{2}$ está localizado entre os números

A) –2 e –1.
B) –1 e 0.
C) 0 e 1.
D) 1 e 2.
E) 2 e 3.

Atividade 4

(M100227ES) Observe abaixo cinco pontos representados na reta real dividida em segmentos de mesma medida.

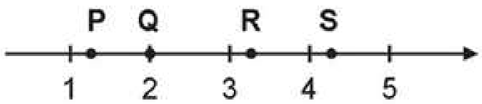


O número $2\sqrt{3}$ está melhor representado pelo ponto

A) M.
B) N.
C) P.
D) Q.
E) R.

Atividade 5

(M100047ES) Cinco pontos estão representados na reta real abaixo, dividida em segmentos de mesma medida.

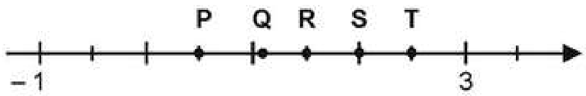


O número $3\sqrt{2}$ está melhor representado nessa reta pelo ponto

A) P.
B) Q.
C) R.
D) S.
E) T.

Atividade 6

(M100163ES) Observe os cinco pontos marcados na reta numérica abaixo. Essa reta numérica está divida em segmentos de mesma medida.

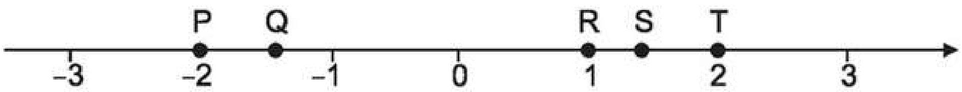


O número $\frac{\sqrt{5}}{2}$ está melhor representado nessa reta pelo ponto

A) P.
B) Q.
C) R.
D) S.
E) T.

Atividade 7

(M100182EX) Observe os pontos marcados na reta numérica abaixo. Essa reta está dividida em segmentos de mesma medida.

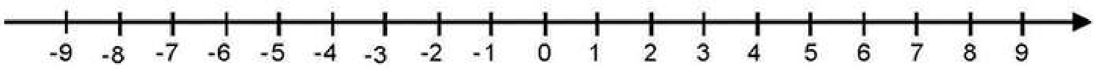


O ponto que melhor representa o número $-\sqrt{2}$ é

A) P.
B) Q.
C) R.
D) S.
E) T.

Atividade 8

(M120014A9) Observe a reta numérica abaixo.



O número $-\sqrt{8}$ está entre os números

A) 7 e 8.
B) 2 e 3.
C) -3 e -2.
D) -2 e -1.
E) -8 e -7.

Gabarito

Atividade 1

Gabarito: B

Atividade 2

Gabarito: A

Atividade 3

Gabarito: D

Atividade 4

Gabarito:E

Atividade 5

Gabarito: D

Atividade 6

Gabarito: B

Atividade 7

Gabarito: B

Atividade 8

Gabarito: C

REFERÊNCIAS

Currículo do Espírito Santo. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/. Acessado em: 05 mar 2024

Revisa Goiás. Núcleo de Recursos Didáticos (NUREDI). Seduc Goiás: Goiana, 2024. Acessado em: 05 mar 2024.

Portal da Matemática da OBEMEP. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1. Acessado em: 05 mar 2024.

Khan Academy. Disponível em: www.khanacademy.org. Acessado em: 05 mar 2024.

Nova Escola. Disponível em: https://novaescola.org.br/. Acessado em: 05 mar 2024.

Mundo da Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/conjunto-dos-numeros-reais.htm. Acessado em: 05 mar 2024.

Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/numeros-reais/. Acessado em: 06 mar 2024.

Matemática básica. Disponível em: https://matematicabasica.net/exercicios-sobre-numeros-irracionais/. Acessado em: 06 mar 2024.