

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO
BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO



Matemática

2ª Série | Ensino Médio

Relações Métricas no Triângulo Retângulo



DESCRIPTOR PAEBES	D049_M – Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.
HABILIDADE DO CURRÍCULO RELACIONADA AO DESCRIPTOR	EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	Operações com números reais. Proporção. Potenciação e Radiciação. Equação.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



As relações métricas em triângulos retângulos têm diversas aplicações práticas em várias áreas, incluindo geometria, trigonometria aplicada, física, engenharia e navegação. Aqui estão algumas das aplicações mais comuns:

Topografia e Engenharia Civil:

- Em levantamentos topográficos, as relações métricas são frequentemente usadas para calcular distâncias horizontais e verticais.
- Na engenharia civil, essas relações são essenciais para determinar as dimensões e inclinações em estruturas, como escadas, rampas e telhados.

Física:

- Na resolução de problemas envolvendo movimento de projéteis, as relações métricas são usadas para calcular alcances e alturas máximas.
- Em problemas de mecânica, as relações métricas podem ser aplicadas para analisar o movimento de objetos em planos inclinados ou superfícies não horizontais.

Navegação:

- Navegadores utilizam as relações métricas para determinar distâncias e direções. Por exemplo, o método de navegação por estima envolve o uso de triângulos retângulos para calcular distâncias percorridas.

Eletrônica e Telecomunicações:

- Na instalação de antenas, as relações métricas são usadas para determinar alturas e distâncias necessárias para obter uma boa recepção de sinais.
- Em problemas envolvendo triangulação em redes de comunicação, as relações métricas são aplicadas para calcular distâncias entre estações.

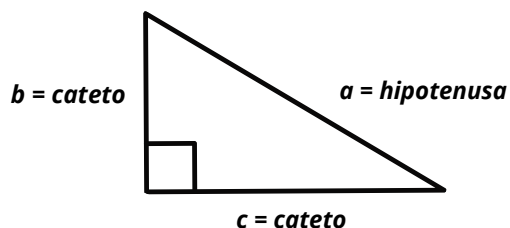
Esses são apenas alguns exemplos das diversas aplicações das relações métricas de triângulos retângulos. Sua versatilidade faz com que sejam ferramentas valiosas em muitos campos, fornecendo meios de calcular e entender relações espaciais e dimensionais em uma variedade de situações do mundo real.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo retângulo será o foco do estudo desta semana. Exploraremos as relações entre as medidas lineares nesse contexto, fundamentadas no conceito de semelhança entre triângulos retângulos.

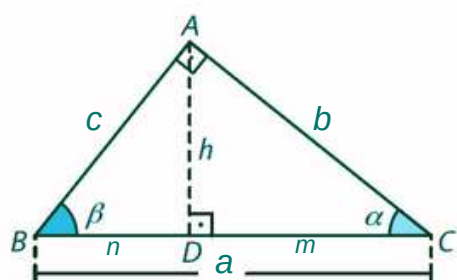
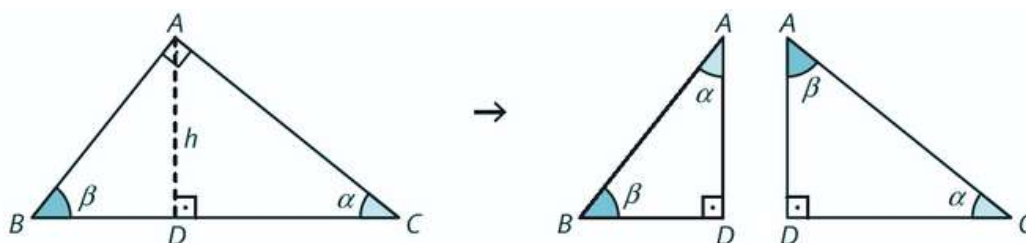
Na figura a seguir, os diferentes elementos do triângulo estão claramente destacados para facilitar a compreensão de suas relações métricas.



A **hipotenusa**, representada pela letra **a**, é sempre o maior lado do triângulo retângulo. Ela sempre será o lado oposto ao ângulo de 90° .

Os outros dois lados, representados pelas letras **b** e **c**, são conhecidos como **catetos**. Estes lados são perpendiculares entre si, por isso formam o ângulo de 90° .

Considerando a altura relativa à hipotenusa, obtemos dois outros triângulos retângulos. Traçando a altura AD relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, temos, pelo 1º caso de semelhança (AA), **ABC ~ DBA ~ DAC**.



- **a** é o comprimento da hipotenusa.
 - **b** é o comprimento de um dos catetos.
 - **c** é o comprimento do outro cateto.
 - **h** é o comprimento da altura relativa à hipotenusa.
 - **m** é o comprimento da projeção do cateto b sobre a hipotenusa.
 - **n** é o comprimento da projeção do cateto c sobre a hipotenusa.
- Além disso, temos **a = m + n**.

Relações Métricas	
b . h = c . m	h² = m . n
b . n = c . h	c² = a . n
a . h = c . b	b² = a . m
a² = b² + c²	

$$\bullet \frac{b}{c} = \frac{m}{h} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot m$$

$$\bullet \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow m \cdot n = h^2$$

$$\bullet \frac{b}{c} = \frac{h}{n} \Rightarrow b \cdot n = c \cdot h$$

$$\bullet \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow a \cdot n = c^2$$

$$\bullet \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = c \cdot b$$

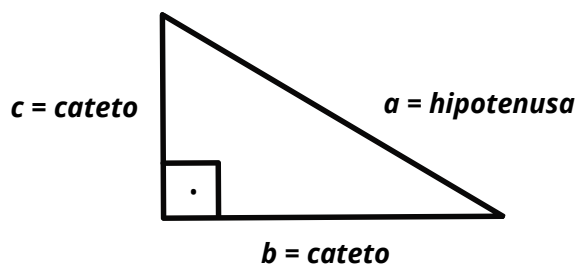
$$\bullet \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow a \cdot m = b^2$$

A última relação, que é a mais importante, é conhecida como **Teorema de Pitágoras**.

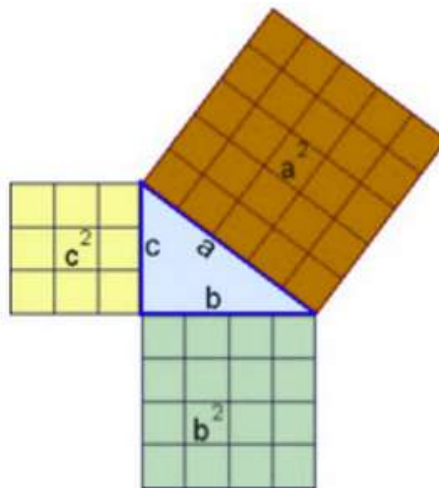
CONCEITOS E CONTEÚDOS

TEOREMA DE PITÁGORAS

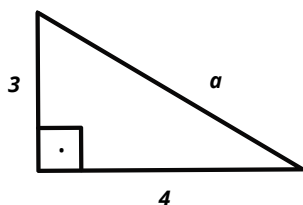
Em todo triângulo retângulo a “**A hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos.**”



$$a^2 = b^2 + c^2$$



- Calculando a medida da **hipotenusa**: Se um triângulo retângulo apresenta 3 cm e 4 cm como medidas dos catetos, qual a hipotenusa desse triângulo?



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 4^2 + 3^2$$

$$a^2 = 16 + 9$$

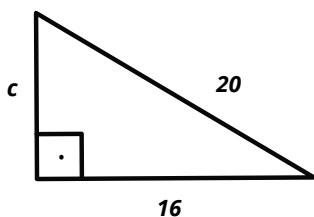
$$a^2 = 25$$

$$a = \sqrt{25}$$

$$a = 5$$

Portanto, a hipotenusa mede 5 cm.

- Calculando a medida de um dos **catetos**: Determine a medida de um cateto que faz parte de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é 20 cm e o outro cateto mede 16 cm?



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$20^2 = 16^2 + c^2$$

$$400 = 256 + c^2$$

$$400 - 256 = c^2$$

$$c^2 = 144$$

$$c = \sqrt{144}$$

$$c = 12$$

Portanto, a medida do cateto é 12 cm.

MATERIAL EXTRA

Você poderá acessar um exemplo similar aos exercícios anteriores no Geogebra de forma interativa, clicando no botão abaixo ou fazendo a leitura no QR Code ao lado.

[Clique aqui](#)



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

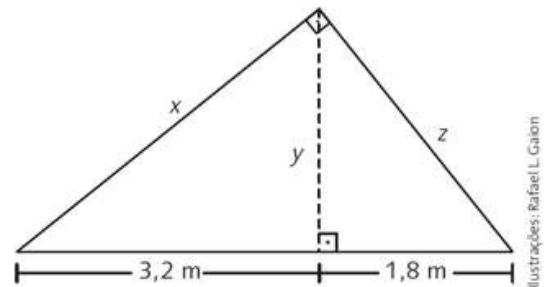
- 1 Considerando o triângulo retângulo ao lado, vamos determinar os valores de x , y e z .

Resolução:

$$\frac{3,2 + 1,8}{x} = \frac{x}{3,2} \Rightarrow 5 \cdot 3,2 = x \cdot x \Rightarrow 16 = x^2 \Rightarrow x = 4 \rightarrow 4 \text{ cm}$$

$$\frac{3,2}{y} = \frac{y}{1,8} \Rightarrow 3,2 \cdot 1,8 = y \cdot y \Rightarrow 5,76 = y^2 \Rightarrow y = 2,4 \rightarrow 2,4 \text{ cm}$$

$$\frac{3,2 + 1,8}{z} = \frac{z}{1,8} \Rightarrow 5 \cdot 1,8 = z \cdot z \Rightarrow 9 = z^2 \Rightarrow z = 3 \rightarrow 3 \text{ cm}$$



- 2 Calcule o perímetro e a área do triângulo abaixo:

Resolução:

Seja x o comprimento do cateto menor. Assim:
 $12^2 + x^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \rightarrow 5 \text{ cm}$

O perímetro P é calculado por:

$$P = 13 + 12 + 5 = 30 \rightarrow 30 \text{ cm}$$

Seja h o comprimento da altura relativa à hipotenusa.
Desse modo:

$$\frac{13}{5} = \frac{12}{h} \Rightarrow 13 \cdot h = 5 \cdot 12 \Rightarrow h = \frac{60}{13} \rightarrow \frac{60}{13} \text{ cm}$$

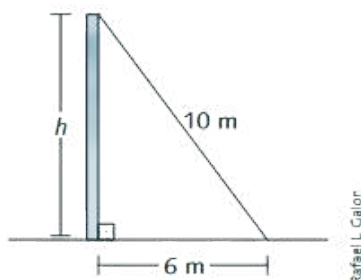
A área A é calculada por:

$$A = \frac{13 \cdot \frac{60}{13}}{2} = \frac{60}{2} = 30 \rightarrow 30 \text{ cm}^2$$

- 3 Para apoiar um poste de rede elétrica, foi utilizado um cabo de aço fixado ao solo a uma distância de 6 m do poste. Calcule a que altura aproximada do poste em que está fixado o cabo de aço sabendo que ele mede 10 m.

Resolução:

Podemos fazer uma representação dessa situação por meio do esquema apresentado. Utilizando o teorema de Pitágoras, calculamos a altura h :



Resolução:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$10^2 = h^2 + 6^2$$

$$100 = h^2 + 36$$

$$h^2 = 100 - 36$$

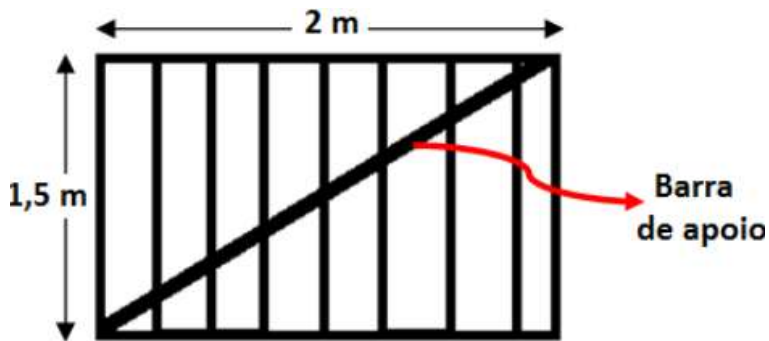
$$h^2 = 64$$

$$h = 8$$

Portanto, a altura é, aproximadamente, 8 m.

4

(BPW - Adaptada). A figura abaixo, mostra um portão feito com barras de ferro. Para garantir sua rigidez, foi colocada uma barra de apoio. Qual é a medida dessa barra de apoio?



Resolução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras, para calcular a medida dessa barra de apoio (hipotenusa):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 2^2 + (1,5)^2$$

$$a^2 = 4 + 2,25$$

$$a^2 = 6,25$$

$$a = \sqrt{6,25}$$

$$a = 2,5 \text{ m}$$

MATERIAL EXTRA

Você poderá acessar um exemplo similar aos exercícios anteriores no Geogebra de forma interativa, clicando no botão abaixo ou fazendo a leitura no QR Code ao lado.

[Clique aqui](#)

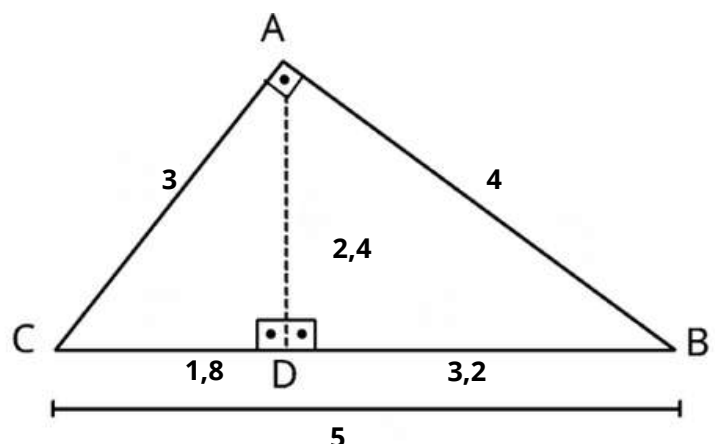


ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

Considere o triângulo retângulo representado a seguir e indique as medidas de cada elemento:

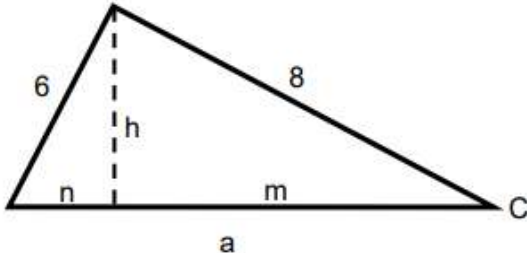
- Hipotenusa:
- Cateto menor:
- Cateto maior:
- Altura relativa à hipotenusa:
- Projeção do menor cateto:
- Projeção do maior cateto:



ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

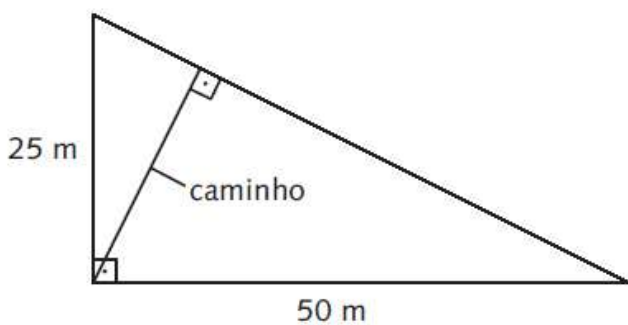
Atividade 2

No triângulo abaixo, os catetos medem 8cm e 6cm. Determine a medida da hipotenusa **a**, das projeções **m** e **n** e da altura **h**.



Atividade 3

Em uma praça com formato de triângulo retângulo, um caminho em linha reta será construído ligando um "vértice" a um de seus lados, conforme o esquema.



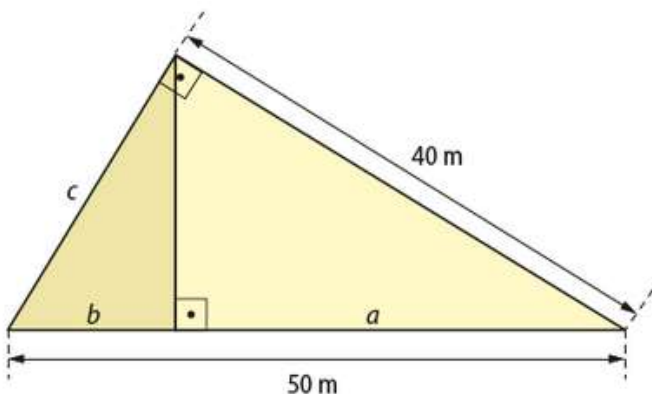
Desconsiderando a largura do caminho, calcule:

a) o comprimento do maior lado da praça.

b) o comprimento do caminho.

Atividade 4

Um fazendeiro possuía um lote de terra em formato de triângulo retângulo cujo maior lado media 40 m. Ele resolveu comprar o lote ao lado, que também apresentava o formato de triângulo retângulo, conforme ilustra a figura. Após a compra, o novo terreno tinha o maior lado medindo 50 m.



Com base nessas informações, determine:

a) a medida a do lado do primeiro terreno.

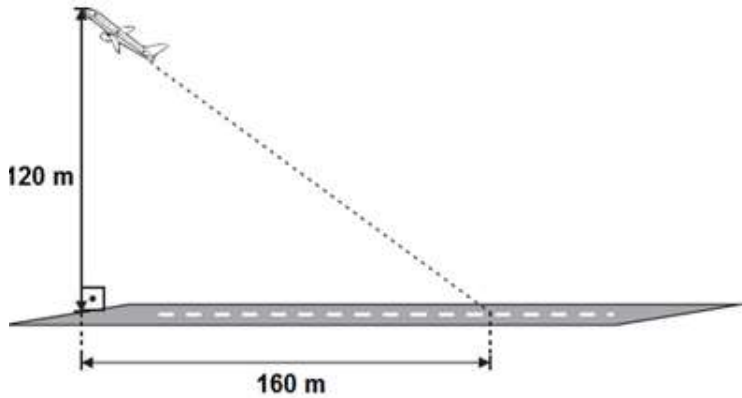
b) a medida do menor lado do terreno comprado.

c) a medida do menor lado do terreno maior.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

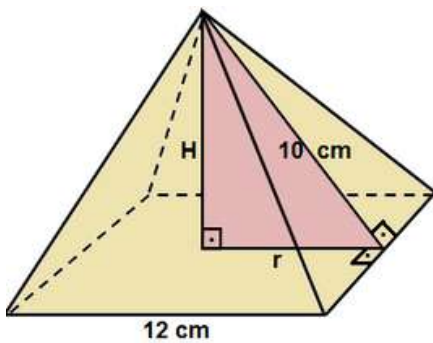
Atividade 5

(PAEBES - Adaptada) No processo de decolagem, um avião saiu do chão sob um determinado ângulo e se manteve em linha reta até atingir a cabeceira da pista, conforme o desenho abaixo. De acordo com esse desenho, quantos metros esse avião percorreu do momento em que saiu do chão até o momento em que atingiu a cabeceira da pista de decolagem?



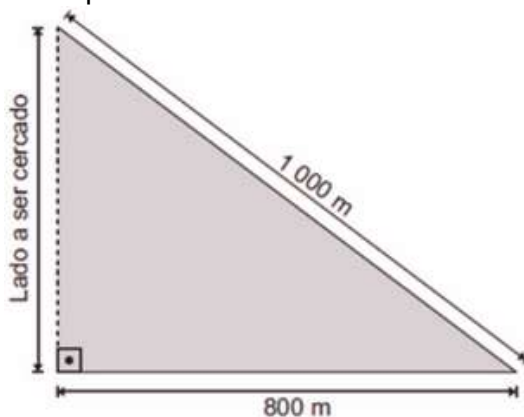
Atividade 6

(BPW - Adaptada) Uma empresa quer acondicionar seus produtos, que têm o formato de uma pirâmide de base quadrada, em caixa de papelão para exportação. Qual é altura mínima que deve ter essa caixa da caixa de papelão?



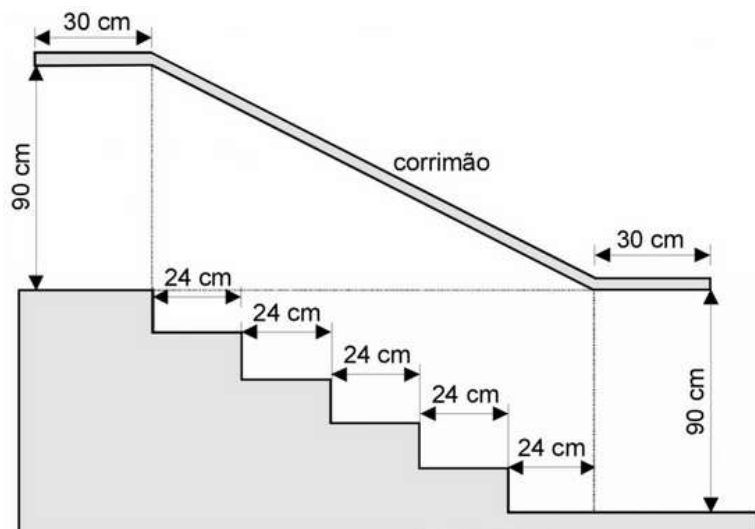
Atividade 7

(SAEP - Adaptada) Getúlio cercará um terreno triangular que será utilizado no plantio de algodão. Esse terreno já possui cerca em dois de seus lados, sendo necessário cercar apenas o terceiro lado, conforme representado na figura abaixo. Qual é a medida do comprimento do lado desse terreno que deverá ser cercado?



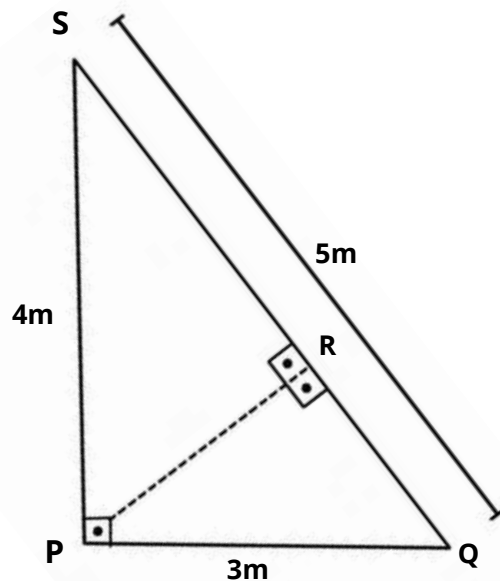
Atividade 8

(ENEM 2006 - Adaptado.) O esquema abaixo representa o projeto de uma escada de 5 degraus com mesma altura. Calcule o comprimento total do corrimão.



Atividade 9

(SEAPE) Para reforçar uma estrutura triangular em sua obra, um engenheiro encomendou de um serralheiro, em vergalhão, a peça representada pelo segmento PR no desenho ao lado. Qual deve ser a medida do comprimento, em metros, da peça encomendada pelo engenheiro?



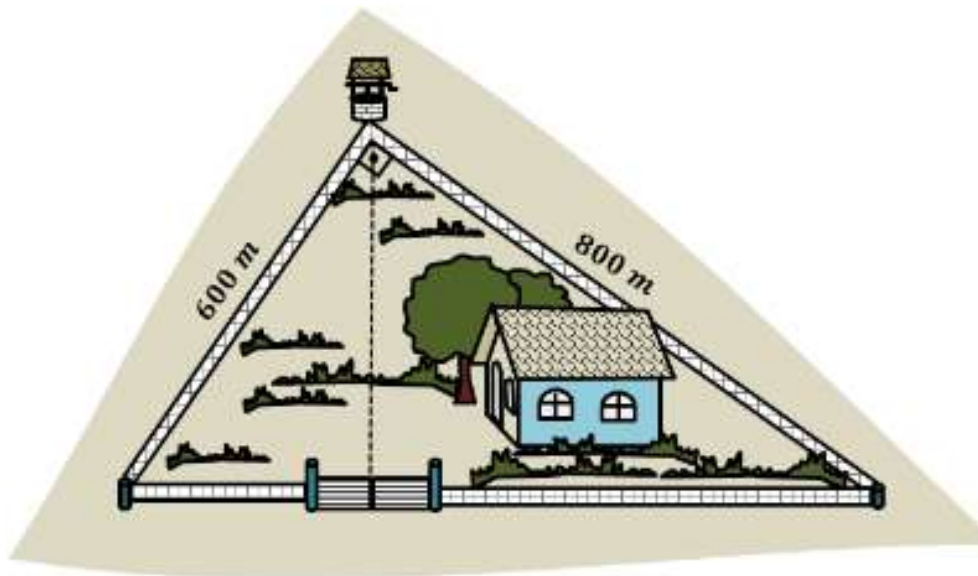
Atividade 10

A figura representa a vista frontal de uma casa. Determine as medidas x , y e h das dimensões do telhado dessa casa.



Atividade 11

A chácara de Ângela tem a forma de um triângulo retângulo e as dimensões indicadas na figura. Qual a distância entre o portão e o poço?



Respostas

Atividade 1

- a) Hipotenusa: 5
- b) Cateto menor: 3
- c) Cateto maior: 4
- d) Altura relativa à hipotenusa: 2,4
- e) Projeção do menor cateto: 1,8
- f) Projeção do maior cateto: 3,2

Atividade 2

Determinando a medida da hipotenusa **a**.

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 \\a^2 &= 8^2 + 6^2 \\a^2 &= 64 + 36 \\a^2 &= 100 \\a &= \sqrt{100} \Rightarrow a = 10\text{cm}\end{aligned}$$

Determinando a medida das projeções **m** e **n**.

$$\begin{aligned}b^2 &= a \cdot m \\8^2 &= 10 \cdot m \Rightarrow 64 = 10 \cdot m\end{aligned}$$

$$m = \frac{64}{10} \Rightarrow m = 6,4\text{cm}$$

$$\begin{aligned}m + n &= a \\6,4 + n &= 10 \\n &= 10 - 6,4 \Rightarrow n = 3,6\text{cm}\end{aligned}$$

Determinando a medida da altura **h**.

$$\begin{aligned}b \cdot c &= a \cdot h \\8 \cdot 6 &= 10 \cdot h \\48 &= 10 \cdot h \Rightarrow h = \frac{48}{10} \Rightarrow h = 4,8\text{cm}\end{aligned}$$

Atividade 3

- a) Sendo ℓ a hipotenusa do triângulo, temos:
 $\ell^2 = 25^2 + 50^2 \Rightarrow \ell^2 = 3125 \Rightarrow \ell = 25\sqrt{5}$, pois $\ell > 0$.
Logo, o comprimento do lado maior da praça é $25\sqrt{5}$ m, ou aproximadamente 55,9 m.
- b) Indicando por c o caminho, segue que:
 $25\sqrt{5} \cdot c = 25 \cdot 50 \Rightarrow 25\sqrt{5} \cdot c = 1250 \Rightarrow c = 10\sqrt{5}$, pois $c > 0$.
Portanto, o comprimento do caminho que será construído é $10\sqrt{5}$ m ou aproximadamente 22,4 m.

Atividade 4

- a) Com base nos dados da figura, podemos utilizar semelhança de triângulos para chegar à seguinte relação:

$$\frac{40}{50} = \frac{a}{40}$$

$$\begin{aligned}40^2 &= 50 \cdot a \Rightarrow 1600 = 50a \Rightarrow a = \frac{1600}{50} = 32 \\a &= 32\text{ m}\end{aligned}$$

- b) Com base nos dados da figura:

$$50 = 32 + b \Rightarrow b = 50 - 32 = 18 \Rightarrow b = 18\text{ m}$$

- c) Com base nos dados da figura:

$$\begin{aligned}50^2 &= 40^2 + c^2 \\2500 &= 1600 + c^2 \Rightarrow 2500 - 1600 = c^2 \Rightarrow \\&\Rightarrow c = \pm\sqrt{900} = 30 \Rightarrow c = 30\text{ m}\end{aligned}$$

Atividade 5

Aplicando o teorema de Pitágoras, para calcular o comprimento x (hipotenusa):

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 \\x^2 &= (120)^2 + (160)^2 \\x^2 &= 14\,400 + 25\,600 \\x &= \sqrt{40\,000} \\x &= 200\text{ m}\end{aligned}$$

O avião percorreu 200m.

Atividade 6

Aplicando o teorema de Pitágoras, para calcular a altura H ("cateto"):

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 \\10^2 &= H^2 + 6^2 \\100 &= H^2 + 36 \\100 - 36 &= H^2 \\\sqrt{64} &= H \\H &= 8\text{cm}\end{aligned}$$

A altura mínima que a caixa de papelão deve ter é 8cm.

Respostas

Atividade 7

Aplicando o teorema de Pitágoras, para calcular o comprimento x (lado a ser cercado - "cateto"):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(1\ 000)^2 = x^2 + (800)^2$$

$$1\ 000\ 000 = x^2 + 640\ 000$$

$$1\ 000\ 000 - 640\ 000 = x^2$$

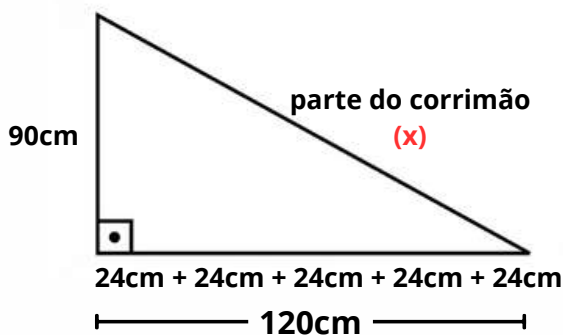
$$x = \sqrt{360\ 000}$$

$$x = 600\text{ metros}$$

A medida do comprimento do terreno é 600m.

Atividade 8

Considerando o triângulo retângulo em destaque, temos:



Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 90^2 + 120^2$$

$$x^2 = 8100 + 14400$$

$$x^2 = 22500$$

$$x = \sqrt{22500}$$

$$x = 150\text{cm}$$

Portanto a medida do corrimão é:

$$30\text{cm} + 150\text{cm} + 30\text{cm} = 210\text{cm}.$$

Atividade 9

$$a.h = b.c$$

$$5.h = 4.3$$

$$h = \frac{12}{5} \Rightarrow 2,4$$

A medida do comprimento da peça deve ser 2,4 metros.

Atividade 10

Podemos observar que já temos a medida da hipotenusa :

$$a = m + n \Rightarrow a = 4 + 6 \Rightarrow a = 10\text{cm}$$

Calculando a medida de x:

$$x^2 = a.n \Rightarrow x^2 = 10.4$$

$$x = \sqrt{40} \Rightarrow x = 6,32\text{m}$$

Calculando a medida de y:

$$y^2 = a.m \Rightarrow y^2 = 10.6$$

$$y = \sqrt{60} \Rightarrow y = 7,74\text{m}$$

Calculando a medida de h:

$$h^2 = m.n \Rightarrow h^2 = 4.6$$

$$h = \sqrt{24} \Rightarrow h = 4,8\text{m}$$

Atividade 11

Calculando a medida da hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 800^2 + 600^2$$

$$a^2 = 640000 + 360000$$

$$a^2 = 1000000$$

$$a = \sqrt{1000000} \Rightarrow a = 1000\text{m}$$

Calculando a distância h entre o portão e o poço::

$$a.h = b.c$$

$$1000.h = 800.600$$

$$h = \frac{480000}{1000} \Rightarrow 480\text{m}$$

REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA; Paulo Roberto Câmara de; Prisma Matemática: Geometria e Trigonometria: Ensino Médio – 1º ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

ANDRADE, T.M. Matemática Interligada. Trigonometria, Fenômenos Periódicos e Programação. São Paulo: Scipione, 2020.

Khan Academy, acessado em 24.01.2024, www.khanacademy.org

ASTH, Rafael. Teorema de Pitágoras. Toda Matéria, [s.d.]. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/teorema-de-pitagoras/>. Acesso em: 6 mar. 2024

ROBERTO, Paulo. Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Exercícios. Disponível em: <https://matematicabasica.net/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo-exercicios/>. Acesso em: 6 mar. 2024

Novaes, Jean Carlos. Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Exercícios. Matemática Básica, 2024. Disponível em: <https://matematicabasica.net/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo-exercicios/>. Acesso em: 06 mar. 2024

HOHENWARTER, M. Geogebra. Disponível em: <www.geogebra.org>. Acessado em: 07 de março de 2024.