

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO
BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO



Matemática

3ª Série | Ensino Médio

**Relacionando
grandezas por meio de
razões e gráficos**



DESCRIPTOR PAEBES	D082_M Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
HABILIDADE DO CURRÍCULO RELACIONADA AO DESCRIPTOR	EF09MA07 Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica (pré-requisito).
HABILIDADE OU CONHECIMENTO PRÉVIO	EF08MA12, EF08MA13/ES - Grandezas direta ou inversamente proporcionais.

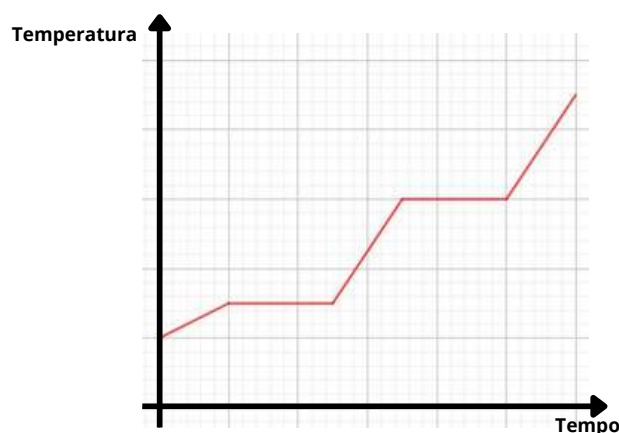
MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



Os gráficos podem representar a relação entre duas grandezas de espécies diferentes. Em um gráfico construído sobre o plano cartesiano, um dos eixos pode representar uma grandeza e o outro eixo pode representar outra.

Por exemplo, o gráfico a seguir representa mudanças de estado físico de uma substância. O eixo horizontal representa o tempo e o eixo vertical representa a temperatura.



Além dos gráficos, coeficientes, taxas e índices também relacionam grandezas e podem fornecer informações importantes tanto para a análise crítica da realidade, bem como para produção de argumentos.

É importante diferenciar:

- Índice é a razão entre valores de diferentes naturezas;
- Coeficiente é a razão entre valores de mesma natureza;
- Taxas são coeficientes apresentados na forma de porcentagem ou multiplicados por potência de 10.

No presente material estruturado, a razão entre grandezas será retomada para desenvolver habilidade de resolução de problemas (EF09MA07), assim como os gráficos relacionados a textos.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS

O que é razão?

Para construir uma ideia sobre razões, podemos utilizar um exemplo: quando dizemos que a razão do número de vitórias pelo número de derrotas de um time de futebol é de 4 : 3 (lê-se 4 para 3), estamos dizendo que, se montarmos uma fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador é igual ao número de derrotas, então essa fração será equivalente à fração 4/3.

Uma possibilidade para esse exemplo é um time ter 20 vitórias e 15 derrotas:

$$\frac{20}{15} = \frac{4 \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{4}{3}$$

Outra possibilidade é um time ter 28 vitórias e 21 derrotas.

$$\frac{28}{21} = \frac{4 \cdot \cancel{7}}{3 \cdot \cancel{7}} = \frac{4}{3}$$

O fato dos dois times terem a mesma razão entre o número de vitórias e derrotas não implica que as quantidades de vitórias e derrotas sejam iguais.

Isso chama a atenção para um fato sobre razões:

Uma razão é uma medida relativa, e não absoluta.

PARA SABER MAIS

Vídeo: Razões básicas (Khan Academy). Acesse esse material clicando no botão abaixo ou lendo o QR Code.

[Clique aqui](#)



CONCEITOS E CONTEÚDOS

RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS DE MESMA ESPÉCIE

Quando tratamos de razão entre duas grandezas, temos dois casos: as grandezas de mesma espécie (que podem ser coeficientes ou taxas) e as grandezas de espécies diferentes (que podem ser índices).

Como exemplo para as grandezas de mesma espécie, vamos tratar das escalas. Suponha que uma maquete tenha sido construída de forma que 1 cm na maquete represente 20 cm na construção real. A razão entre a medida na maquete e a medida na construção real será:

$$\frac{\text{maquete}}{\text{constr real}} = \frac{1\text{cm}}{20\text{cm}} = \frac{1\cancel{\text{cm}}}{20\cancel{\text{cm}}} = \frac{1}{20} = 1 : 20$$

Como as unidades de medida da maquete e da construção real são as mesmas, elas são “canceladas” na simplificação da razão. Dessa forma, essa razão passa a não possuir uma unidade de medida específica.

RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS DE ESPÉCIES DIFERENTES

Quando tratamos de razão entre duas grandezas de espécies diferentes, o “cancelamento” não ocorre e essas unidades deverão aparecer separadas por uma barra fazendo referência à razão.

Por exemplo, uma pessoa viaja de carro para um município. Ela realiza esse trajeto de 240 km em 3 horas. Assim, a razão entre a distância percorrida e o tempo será:

$$\frac{\text{dist percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{240\text{km}}{3\text{h}} = \frac{80 \cdot 3\text{km}}{1 \cdot 3\text{h}} = \frac{80 \cdot \cancel{3}\text{km}}{1 \cdot \cancel{3}\text{h}} = \frac{80\text{km}}{1\text{h}} = 80\text{km/h}$$

PLOTANDO RAZÕES NO PLANO CARTESIANO

As razões também podem ser representadas no plano cartesiano. O exercício resolvido 1 (a seguir) mostra essa possibilidade.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Uma embalagem de chocolate custa 7 reais. Complete a tabela de acordo com a razão dada.

Embalagens (x)	Preço em reais (y)
1	7
3	
5	

Represente os pares ordenados (x, y) da tabela no plano cartesiano.

Resolução:

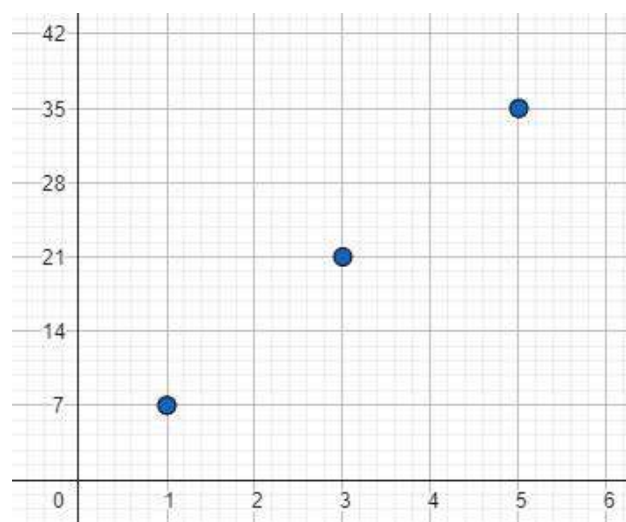
Considerando que a quantidade de embalagens da segunda linha é o triplo da quantidade da primeira linha, o preço em reais y da segunda linha deve ser $3 \cdot 7 = 21$.

A quantidade de embalagens x da terceira linha é o quádruplo da quantidade de embalagens da primeira linha. Dessa forma, o preço em reais da terceira linha deve ser $5 \cdot 7 = 35$.

A tabela preenchida está a seguir:

Embalagens (x)	Preço em reais (y)
1	7
3	21
5	35

A representação dos pares ordenados (x, y) está no gráfico a seguir:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS (CONTINUAÇÃO)

2 O recorde mundial de corrida de 100 metros rasos pertence ao jamaicano Usain Bolt. Ele percorreu essa distância em 9,59 segundos. Qual foi a velocidade média dele em metros por segundo?

Resolução:

A velocidade média é a razão entre o espaço percorrido e o intervalo de tempo. Dessa forma, podemos calcular a velocidade:

$$\frac{100m}{9,58s} \cong 10,44m/s$$

3 Considere um trem implementado na China que é capaz de alcançar a velocidade de 430 km/h. Quanto tempo ele demora para percorrer uma distância de 1075 km com essa velocidade constante?

Resolução:

Como a velocidade do trem no problema é considerada constante temos que a razão entre a distância percorrida e o tempo será de 430 km para 1 hora. Dessa forma, devemos encontrar o número de horas que juntamente com 1075 km mantenha essa razão. Em outras palavras, vamos montar uma proporção (x representa o número de horas que buscamos):

$$\frac{430km}{1hora} = \frac{1075km}{x horas}$$

Como as duas razões são iguais, podemos encontrar um fator que relaciona uma com a outra. Para fazer isso, vamos dividir 1075 por 430. Essa divisão resulta em 2,5.

The diagram shows the proportion $\frac{430km}{1hora} = \frac{1075km}{x horas}$ with two green curved arrows indicating multiplication by 2.5. The top arrow points from the denominator '1 hora' to the numerator '1075 km' and is labeled 'x 2,5'. The bottom arrow points from the denominator 'x horas' to the numerator '430 km' and is also labeled 'x 2,5'.

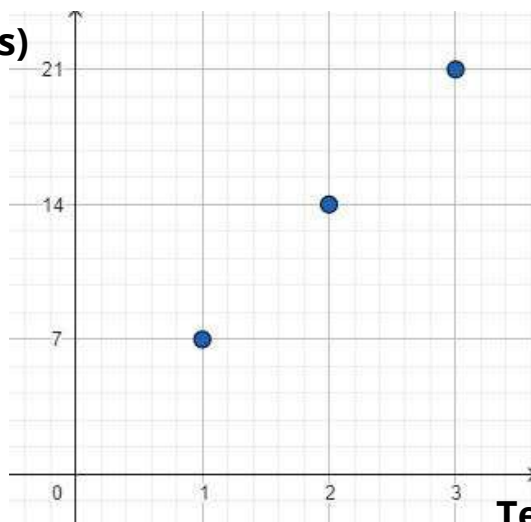
Ou seja, o valor procurado é igual a $1 \times 2,5 = 2,5$. Portanto, o trem leva 2,5 horas para percorrer o percurso de 1075 km.

Atividade 1

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Uma pessoa está pedalando sua bicicleta a uma velocidade constante. Os pontos no plano cartesiano a seguir mostram quantos metros ela percorreu em 1, 2 e 3 segundos. Assim, quantos metros ela terá percorrido após 5 segundos?

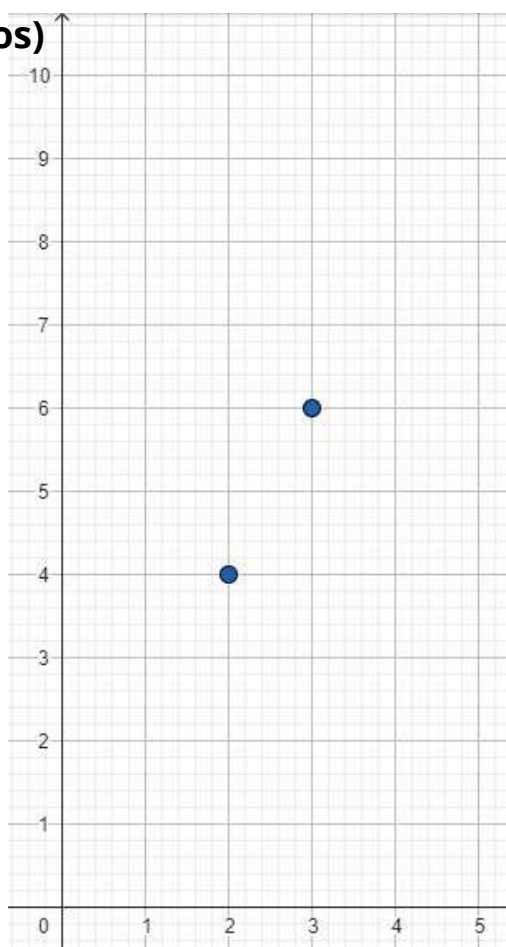
Distância (metros)



Atividade 2

Em uma receita de suco, é necessária uma razão entre a quantidade de copos americanos de água e a quantidade de colheres de açúcar. No plano cartesiano foram marcados dois pontos que obedecem a razão entre esses ingredientes na receita. Marque outros dois pontos no plano cartesiano que estejam nessa razão.

Água (copos americanos)



Açúcar (colheres)

Atividade 3

Ana e Bruno são vizinhos e estudam na mesma escola. Certo dia, Ana saiu de casa a pé, às 12h, andando com velocidade média de 6 km/h. Ela conseguiu chegar na escola às 13h.

No mesmo dia, Bruno saiu de casa às 12h30min pedalando sua bicicleta com velocidade média de 18 km/h. Quem chegou primeiro na escola?

Atividade 4 - Desafio

Um estudante costuma ir à escola usando a bicicleta como meio de transporte. Normalmente, ele vai de sua casa até a escola em 15 minutos com uma velocidade média de 20 km/h. Certo dia ele acordou atrasado e saiu de casa com pressa. Sabendo que ele pedalou até a escola com uma velocidade de 25 km/h, em quantos minutos ele chegou à escola?

- a) 20 minutos.
- b) Aproximadamente 19 minutos.
- c) 15 minutos.
- d) 12 minutos.
- e) 10 minutos.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

DENSIDADE DEMOGRÁFICA

O que é densidade demográfica?

A densidade demográfica é uma medida que expressa a quantidade de pessoas que vivem em uma determinada área geográfica, representando o número de pessoas por unidade de área (normalmente medida em quilômetros quadrados). Em outras palavras, é a concentração de população em uma área específica.

Para calcular a densidade demográfica, divide-se o número total de habitantes de uma região pela sua área total. Por exemplo, se uma cidade tem uma população de 100.000 habitantes e sua área é de 50 km², então a densidade demográfica dessa cidade seria de 2.000 habitantes por quilômetro quadrado (100.000 habitantes ÷ 50 km²).

A densidade demográfica é uma medida importante para entender a distribuição populacional e o desenvolvimento urbano de uma área. Ela pode variar significativamente entre diferentes regiões e países, dependendo de fatores como urbanização, geografia, clima, recursos naturais e políticas de imigração. Uma densidade demográfica alta geralmente indica uma maior concentração de pessoas em uma área, enquanto uma densidade demográfica baixa indica uma menor concentração.

$$\text{densidade demográfica} = \frac{\text{número total de habitantes da região}}{\text{área total da região}}$$

A densidade demográfica é uma razão entre grandezas de espécies diferentes e pode ser expressada pela unidade hab/km² (habitantes por quilômetro quadrado).

Curiosidades:

Situado no sul da Ásia, um país com uma das maiores densidades demográficas do mundo é Bangladesh. Com uma população de mais de 169 milhões de pessoas e uma área de aproximadamente 147.570 quilômetros quadrados, a densidade populacional de Bangladesh é aproximadamente de 1.100 pessoas por quilômetro quadrado. Essa alta densidade populacional é resultado de uma combinação de fatores, incluindo a taxa de fertilidade da região e a rápida urbanização.



CONCEITOS E CONTEÚDOS

DENSIDADE DEMOGRÁFICA

Um país com uma das mais baixas densidades demográficas do mundo é a Mongólia. Situada na Ásia Oriental e Central, a Mongólia é conhecida por sua vasta extensão territorial e uma população relativamente pequena em relação à sua área geográfica.

Com uma área de aproximadamente 1.564.116 quilômetros quadrados e uma população de cerca de 3,3 milhões de pessoas, a densidade populacional média da Mongólia é de aproximadamente 2 pessoas por quilômetro quadrado.

Essa baixa densidade populacional é atribuída principalmente à vastidão das estepes e desertos que compõem a maior parte do território mongol, bem como à sua história de nômades que tradicionalmente ocupavam grandes áreas de pastagem para o gado.



ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

A densidade demográfica do Distrito Federal é de aproximadamente 500 hab/km². Considerando que a população é de aproximadamente 2,9 milhões de habitantes, determine a área aproximada dessa unidade federativa.

Atividade 6

A densidade demográfica da China é de aproximadamente 150 hab/km². Considerando que a área territorial desse país é de aproximadamente 9,5 milhões de km², determine a população aproximada da China.

Atividade 7

O Espírito Santo possui uma população de aproximadamente 3,8 milhões de pessoas de acordo com o censo de 2022. O território capixaba possui uma área de aproximadamente 46 mil km². Determine a densidade demográfica aproximada desse estado.

Atividade 8

- Pesquise quantos habitantes o município onde você mora possui. (sugestão de site para pesquisa <https://www.ibge.gov.br/>)
- Pesquise qual é área total do município onde você mora.
- Calcule a densidade demográfica do município onde você mora.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

GRÁFICOS QUE REPRESENTAM TEXTO

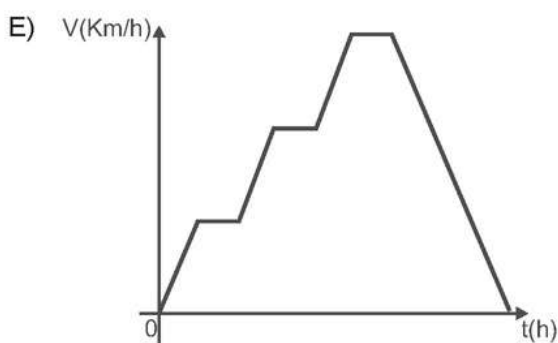
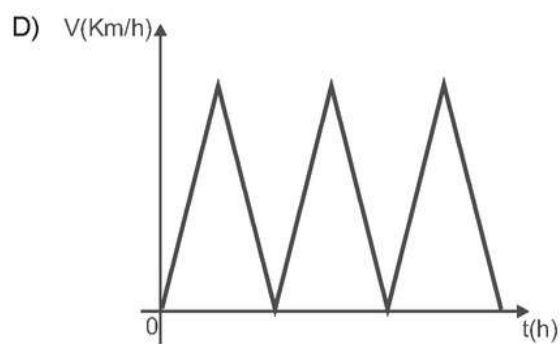
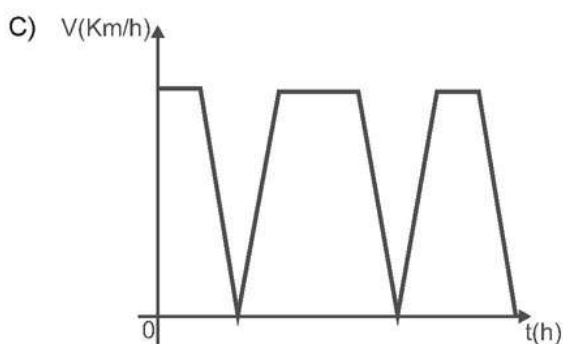
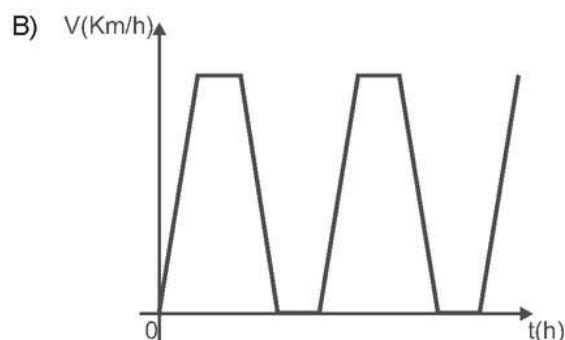
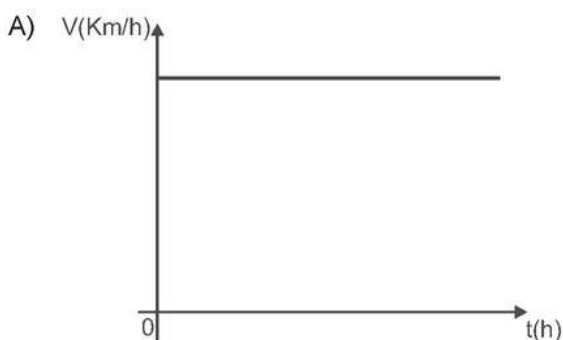
Conforme exposto, gráficos podem representar a relação entre duas grandezas. Nesta seção, o foco de trabalho será o descritor:

D082_M Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

Um item elaborado para esse descritor traz em texto uma descrição de uma relação entre grandezas e pede que o estudante identifique o gráfico que melhor representa essa descrição. Veja um exemplo resolvido a seguir.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

(M100175ES) Um trem bala faz uma viagem normalmente entre duas cidades parando em várias estações para embarque e desembarque de passageiros. Periodicamente desenvolve velocidades constantes. O gráfico que melhor representa a velocidade (V), em quilômetros por hora, do trem bala em função do tempo (t), em horas de viagem é



EXERCÍCIO RESOLVIDO: RESOLUÇÃO

Alternativa a: Essa alternativa mostra a mesma velocidade à medida que o tempo passa. Ou seja, um movimento em uma velocidade é constante. A reta é composta por pontos em que a coordenada t (tempo) varia e a coordenada V (velocidade) possui o mesmo valor.

O texto do enunciado menciona que o trem para em várias estações. Dessa forma o gráfico não pode mostrar uma única velocidade constante diferente de zero. Portanto, **a alternativa a está incorreta.**

Alternativa b:

Na alternativa b, o trem parte do repouso e começa a aumentar sua velocidade até atingir certo valor. O veículo mantém essa velocidade constante por um intervalo de tempo. Em seguida ele passa a desacelerar, reduzindo a velocidade a zero. Ou seja, ele parou (em uma das estações de seu percurso). Após um intervalo de tempo parado, o trem começou a acelerar (aumentar a velocidade). Ele mantém a velocidade constante por um tempo e volta a desacelerar, atingindo velocidade zero (parada em outra estação). Por fim o trem volta a acelerar retomando seu percurso.

O que o gráfico mostra está condizente com o texto do enunciado: o trem para em estações para embarque e desembarque de passageiros e desenvolve velocidades constantes periodicamente. Portanto, **a alternativa b está correta.**

Alternativa c:

Na alternativa c, o trem inicia seu movimento com velocidade constante. Ele desacelera até atingir velocidade zero. Porém, o tempo que ele fica parado é muito reduzido, fato que torna impossível o embarque e desembarque de passageiros. Portanto, **a alternativa c está incorreta.**

Alternativa d:

Na alternativa d, o trem não desenvolve velocidades constantes em nenhum momento. Essa alternativa também apresenta o mesmo problema da alternativa c: o tempo que o trem fica com velocidade zero é muito pequeno e impossibilita embarque e desembarque de passageiros. Portanto, **a alternativa d está incorreta.**

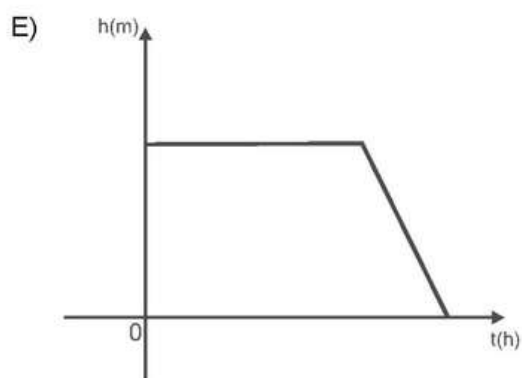
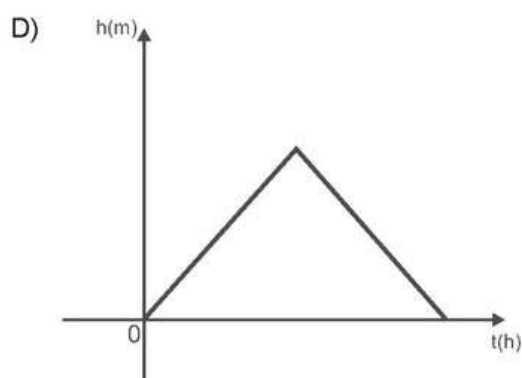
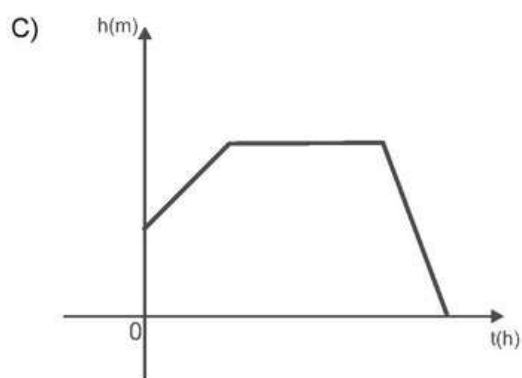
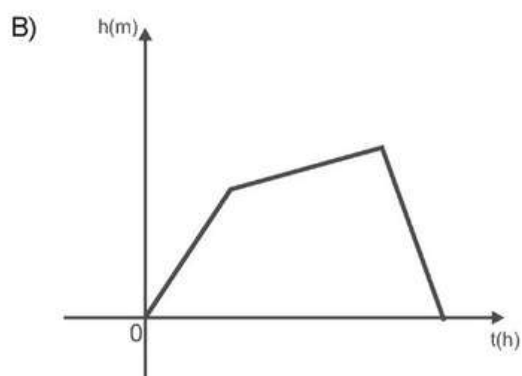
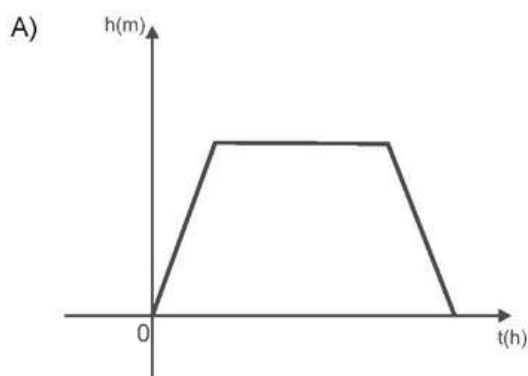
Alternativa e:

Na alternativa e, o trem inicia seu movimento e alterna entre acelerações e velocidades constantes até certo momento. Por fim, ele desacelera e para. Esse gráfico não condiz com o texto, pois não mostra paradas com tempo suficiente para embarques e desembarques.

Atividade 9

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

(M100041EX) Durante uma viagem, a altitude, em metros, de um avião cresce linearmente, em função do tempo da viagem em horas, até atingir a altitude de cruzeiro, mantendo-se constante até o momento de preparo para o pouso. Nesse momento, a altitude do avião decresce linearmente até atingir o solo. O gráfico que melhor representa a altitude (h), em metros, em função do tempo (t), em horas, de viagem é

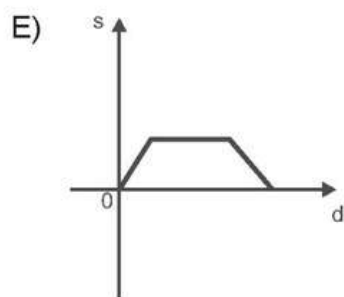
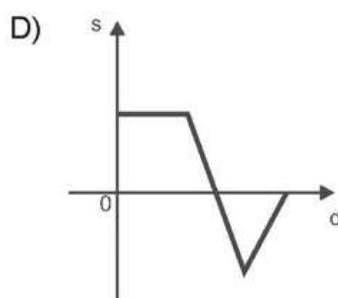
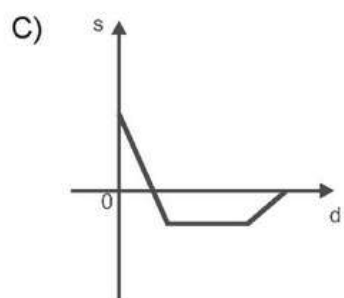
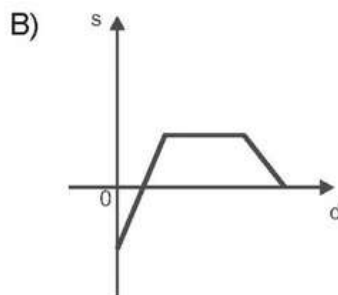
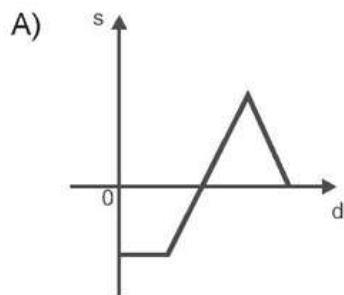


Atividade 10

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

(M100243ES) Rogério fez um gráfico para ver como o saldo (s) de sua conta bancária se comportava em função dos dias (d) de um mês típico, desconsiderando todas as taxas e os impostos. Nesse mês, após receber o salário, ele pagou suas contas e ficou com saldo negativo. Após alguns dias sem movimentar essa conta, ele fez um depósito ficando com saldo nulo.

Qual dos gráficos abaixo melhor representa o saldo (s) de Rogério em função dos dias (d) no mês?

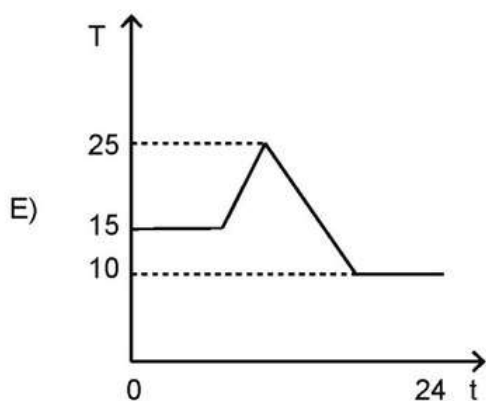
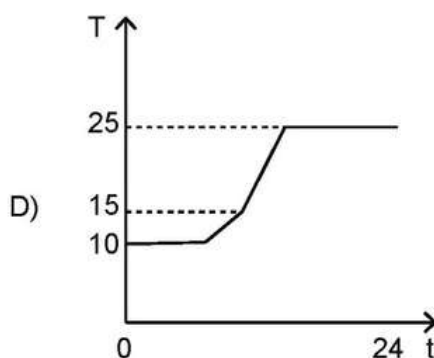
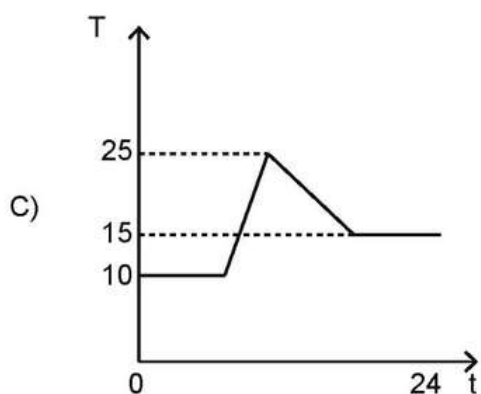
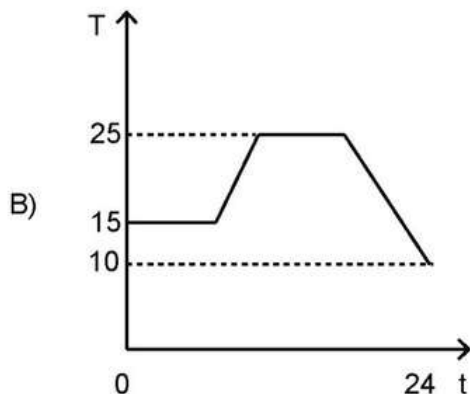
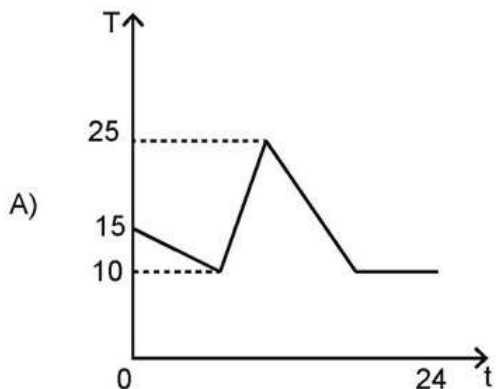


Atividade 11

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

(M120710ES) Um meteorologista observou que, em um determinado dia, de 0 às 8 horas a temperatura foi de 15°C . A partir desse instante, a temperatura aumentou até chegar aos 25°C , temperatura máxima do dia, por volta do meio dia. Imediatamente após atingir esse máximo voltou a cair até atingir 10°C , valor mínimo do dia, no começo da noite. A temperatura se manteve nesse patamar o resto do dia.

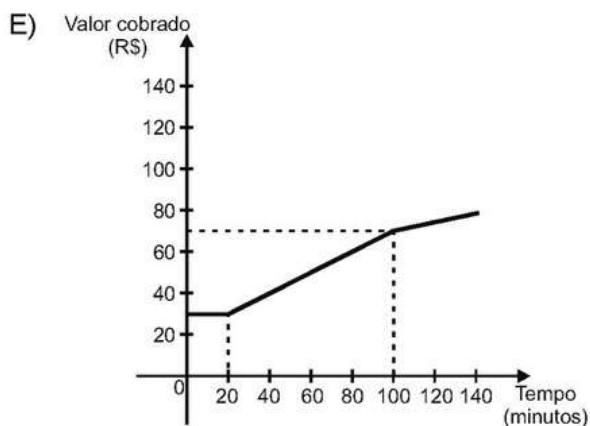
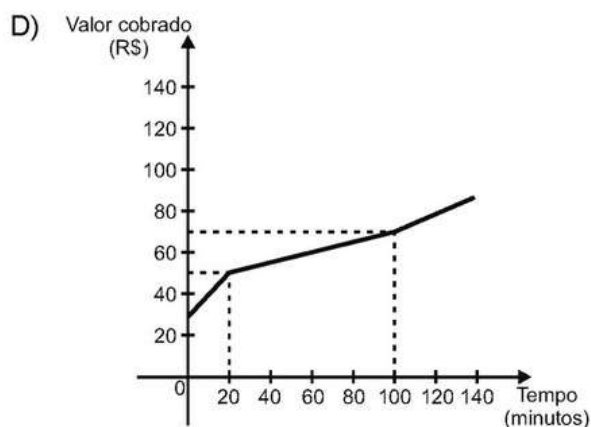
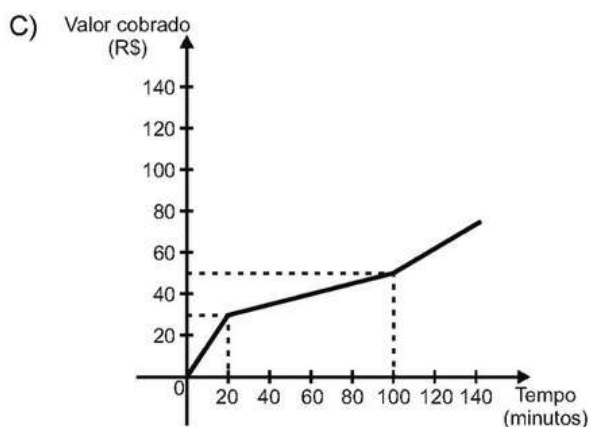
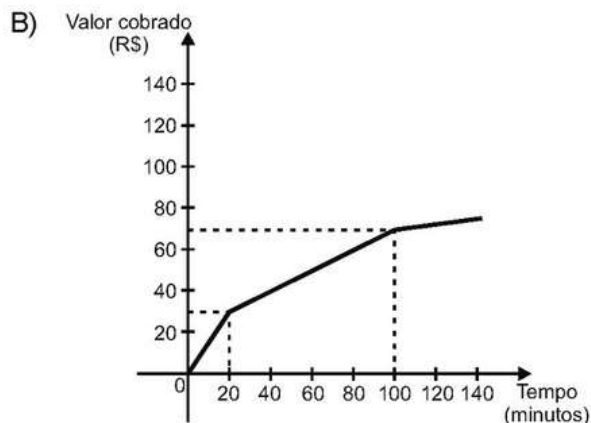
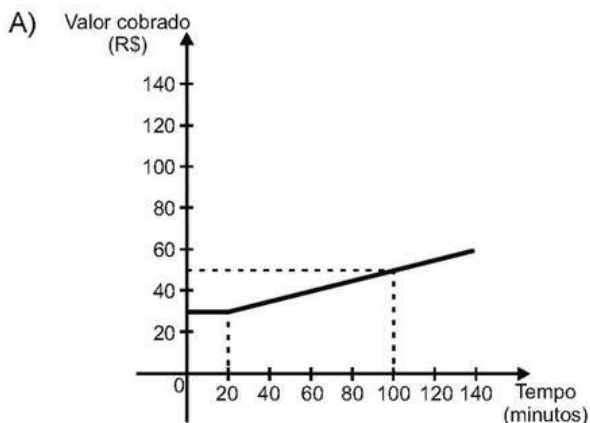
O gráfico que melhor representa a temperatura T em função do instante t nesse dia é



Atividade 12

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

(M120498ES) Uma empresa de telefonia possui um plano de ligações locais na qual o cliente paga R\$ 29,00 e tem direito a 20 minutos de ligações. Após os utilizar os 20 minutos, a empresa cobra R\$ 0,50 por minuto adicional utilizado até um total de 100 minutos; quando o minuto adicional passa então a custar R\$ 0,25. Qual é o gráfico que melhor representa o valor cobrado pago pelo cliente desse plano em função dos minutos utilizados?

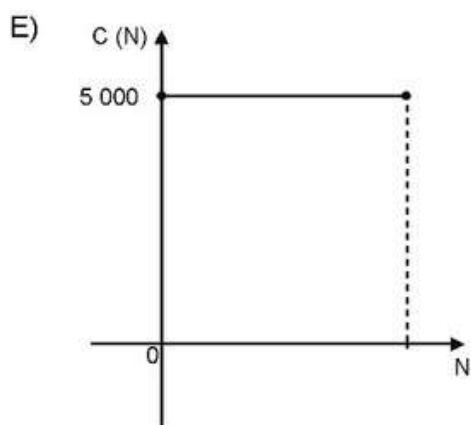
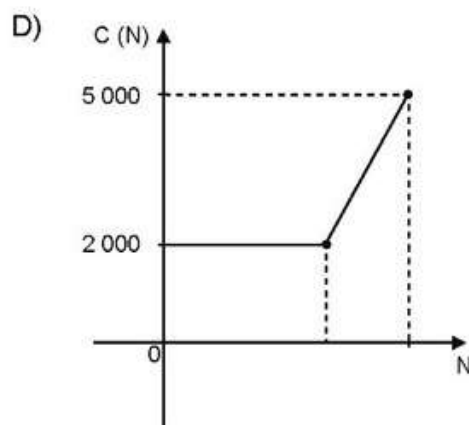
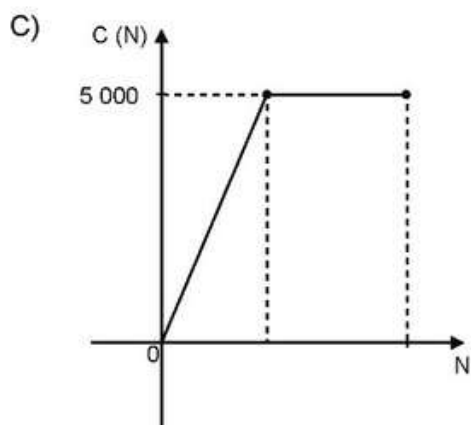
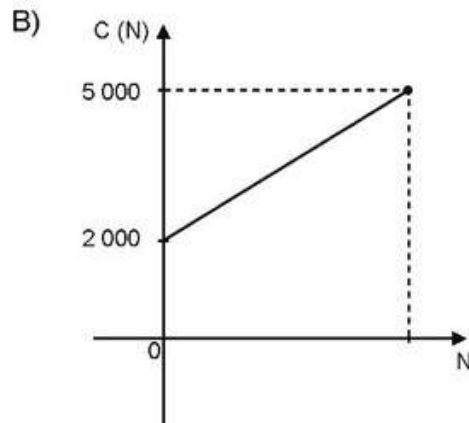
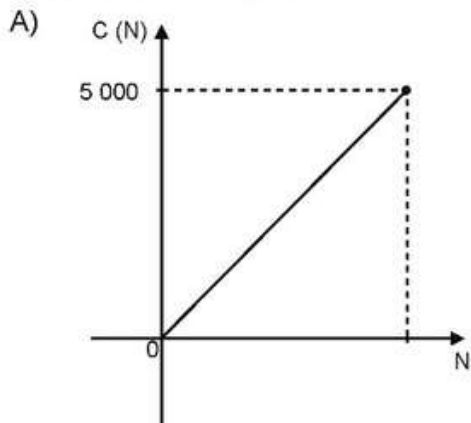


Atividade 13

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

(M100241ES) Para determinar o custo total de fabricação de seus doces (C), uma fábrica considera um custo fixo de R\$ 2 000,00 mais um custo variável que depende do número de doces fabricados, que possuem mesmo custo de fabricação.

O gráfico que melhor representa o custo total (C) de fabricação desses doces em função do número de doces fabricados (N) é



RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Respostas

Atividade 1

a) Ao analisar os pontos no plano cartesiano, construindo as razões entre as coordenadas deles, podemos concluir que a velocidade da pessoa pedalando a bicicleta é de 7m/s. Veja:

$$\frac{\text{ordenada do ponto}}{\text{abscissa do ponto}} = \frac{7m}{1s} = 7m/s$$

$$\frac{\text{ordenada do ponto}}{\text{abscissa do ponto}} = \frac{14m}{2s} = \frac{7 \cdot 2m}{1 \cdot 2s} = 7m/s$$

$$\frac{\text{ordenada do ponto}}{\text{abscissa do ponto}} = \frac{21m}{3s} = \frac{7 \cdot 3m}{1 \cdot 3s} = 7m/s$$

Desse modo, os pontos relativos a esse movimento devem respeitar a razão sete para um. Então, procuramos o comprimento que, juntamente com o tempo de 5 segundos, esteja nessa razão. Vamos representar o comprimento procurado com a letra x.

$$\frac{7m}{1s} = \frac{xm}{5s}$$

Ao comparar a primeira razão com a segunda, montando uma proporção (igualdade entre razões), percebemos que o tempo da primeira foi quintuplicado na segunda.

The diagram shows the equation $\frac{7m}{1s} = \frac{xm}{5s}$ with two green curved arrows. The top arrow points from 1s to 5s and is labeled 'x5'. The bottom arrow points from xm to 5s and is also labeled 'x5'.

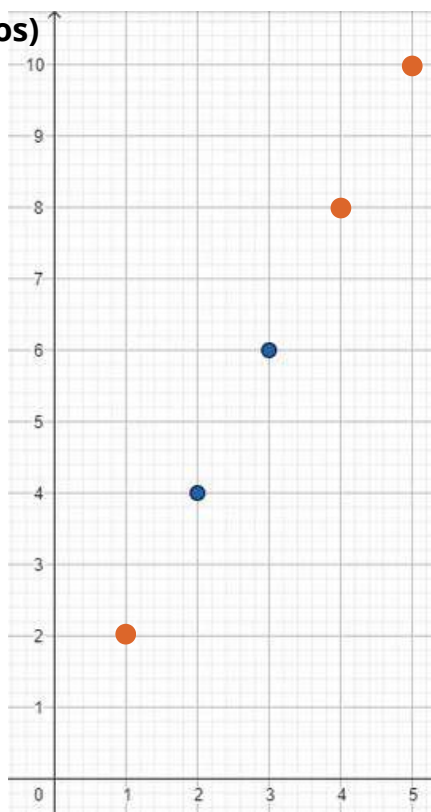
Assim, podemos concluir que o comprimento correto é 35 m.

Respostas

Atividade 2

Os estudantes podem marcar no plano cartesiano duas das possibilidades a seguir (pontos em laranja).

Água (copos americanos)



Açúcar (colheres)

Atividade 3

Ana demorou uma hora para chegar à escola (13h - 12h = 1h). Considerando que a velocidade dela foi de 6km/h, podemos concluir que a distância entre a casa dela e a escola é de 6km. Bruno saiu pedalando de casa com velocidade de 18 km/h. Ou seja, em uma hora ele cumpre um percurso que é três vezes a distância entre a casa e a escola. O tempo para cumprir apenas uma ida para a escola é de um terço de hora. Considerando 1 hora como 60 minutos:

$$\frac{1}{3} \cdot 60 = \frac{60}{3} = 20$$

Bruno demorou 20 minutos para chegar à escola. Como havia saído 12h30min, ele chegou às 12h50min. Portanto, Bruno chegou primeiro.

Respostas

Atividade 4

A velocidade do estudante está na razão de 20 quilômetros a cada hora. Podemos pensar sobre qual comprimento ele consegue cumprir em 15 minutos. Para facilitar, vamos considerar que uma hora é igual a 60 minutos. Montamos uma proporção (igualdade entre razões) na qual x representa o comprimento que o estudante percorreu em 15 minutos.

$$\begin{array}{c} \div 4 \\ \text{↗} \\ \frac{20km}{60min} = \frac{xkm}{15min} \\ \text{↘} \\ \div 4 \end{array}$$

O percurso x que o estudante realiza em 15 minutos é de 5km de comprimento. A velocidade que o estudante imprimiu quando acordou atrasado é de 25km/h. Ou seja, com essa velocidade, em uma hora, ele faz cinco vezes o percurso entre sua casa e a escola. Assim, o tempo para cumprir apenas uma ida para a escola é de um quinto de hora. Considerando uma hora como 60 minutos:

$$\frac{1}{5} \cdot 60 = \frac{60}{5} = 12$$

Portanto, a alternativa correta é d (12 minutos).

Atividade 5

$$\frac{2.900.000}{area} = 500 \Rightarrow \frac{2.900.000}{500} = area$$

Portanto, a área do Distrito Federal é de aproximadamente 5800 km².

Atividade 6

$$\frac{habitantes}{9.500.000} = 150 \Rightarrow habitantes = 150 \cdot 9.500.000$$

Portanto, a população da China é de aproximadamente 1.425.000.000 habitantes.

Respostas

Atividade 7

$$\frac{3.800.000}{46.000} \cong 83hab/km^2$$

Portanto, a densidade demográfica aproximada do Espírito Santo é de 83 habitantes por quilômetro quadrado.

Atividade 8

- a) Resposta pessoal baseada no município e na pesquisa realizada.
- b) Resposta pessoal baseada no município e na pesquisa realizada.
- c) Resposta pessoal baseada no município e na pesquisa realizada.

Atividade 9

GABARITO: A

Atividade 10

GABARITO: C

Atividade 11

GABARITO: E

Atividade 12

GABARITO: E

Atividade 13

GABARITO: B

REFERÊNCIAS

Khan Academy. Disponível em: www.khanacademy.org. Acessado em: 08 mar 2024.

Nova Escola. Disponível em: www.novaescola.org.br. Acessado em: 08 mar 2024.

Portal da Matemática (IMPA). Disponível em:
<https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1> . Acessado em: 08 mar 2024.