MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL
GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO
GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

2ª Série | Ensino Médio

Matemática

Progressão Geométrica: Termo Geral e Soma dos Termos de uma PG finita

DESCRITOR PAEBES	D097_M Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.
HABILIDADE DO CURRÍCULO RELACIONADA AO DESCRITOR	EM13MAT508 Identificar e associar Progressões Geométricas (PG) a Funções Exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
HABILIDADE OU CONHECIMENTO PRÉVIO	EF08MA11/ES - Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva (ou recorrentes) e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

CONTEXTUALIZAÇÃO

VOCÊ SABIA?

No dia a dia, as PGs têm várias aplicações práticas, tais como:

1. Finanças: PGs são usadas para calcular juros compostos em investimentos ou empréstimos. Se você investir um valor inicial e ele for sujeito a uma taxa de juros fixa, o montante ao longo do tempo pode ser calculado por uma PG;
2. Crescimento Populacional: Em ecologia, o crescimento populacional de espécies que se reproduzem rapidamente pode ser modelado por uma PG, onde cada termo representa o tamanho da população em um determinado momento;
3. Tecnologia: Em informática, a capacidade de processamento e armazenamento de dispositivos tecnológicos muitas vezes segue uma PG, dobrando após certos intervalos de tempo (conhecido como Lei de Moore);
4. Música: Na música, a frequência das notas em uma oitava pode ser representada por uma PG, onde a razão é a raiz décima segunda de 2, refletindo a divisão da oitava em 12 semitons;
5. Arquitetura: Alguns padrões de design arquitetônico seguem PGs, como na disposição de elementos que diminuem de tamanho de forma proporcional à medida que se afastam do observador, criando uma perspectiva.

Esses exemplos mostram como as PGs são fundamentais em diversas áreas, ajudando a entender e a prever padrões de crescimento e decrescimento em fenômenos naturais e tecnológicos.

Neste material, abordaremos a Progressão Geométrica (P.G.), o processo de somar os termos de uma P.G. finita e a conexão entre a P.G. e a função geométrica. Cada um desses tópicos será discutido para garantir uma compreensão profunda e abrangente dos conceitos relacionados.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Progressão Geométrica

Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do primeiro, é o resultado do produto do termo anterior por uma constante, conhecida como razão da PG. A razão, representada pela letra “q”, é sempre constante, ou seja, a razão entre dois termos consecutivos de uma PG é sempre a mesma.

Por exemplo, considere a PG (1, 3, 9, 27, 81, ...). Cada termo, exceto o primeiro, é o resultado do produto de seu antecessor por 3. Isso é, 3 = 3·1, 9 = 3·3, e assim por diante.

O cálculo do enésimo termo de uma Progressão Geométrica (PG) é bastante intuitivo e se baseia em uma observação fundamental: cada termo da PG é o resultado de uma operação de potenciação aplicada à razão, com o primeiro termo servindo como ponto de partida. Esta razão, uma constante fixa, é elevada a uma potência que é determinada pela posição do termo na sequência. Assim, cada termo da PG pode ser expresso como um produto entre o primeiro termo e uma potência da razão. Essa observação é a base para a fórmula geral que permite calcular qualquer termo de uma PG.

Para ilustrar, considere uma PG geral cujos elementos são $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$. Cada termo dessa PG pode ser escrito em função de um produto entre o primeiro termo e uma potência da razão:

$$
\begin{gathered}
a_1 = a_1 . q^0 \\
a_2 = a_1 . q^1 \\
a_3 = a_1 . q^2 \\
a_4 = a_1 . q^3
\end{gathered}
$$

Note que o expoente da razão q é sempre igual ao índice do termo em questão menos 1. Portanto, a fórmula para determinar o enésimo termo (um termo qualquer, também chamado termo geral) é:

$$
\begin{gathered}
a_1 = a_1 . q^0 \Leftrightarrow a_1 = a_1 . q^{1-1} \\
a_2 = a_1 . q^1 \Leftrightarrow a_1 = a_1 . q^{2-1} \\
a_3 = a_1 . q^2 \Leftrightarrow a_1 = a_1 . q^{3-1} \\
a_4 = a_1 . q^3 \Leftrightarrow a_1 = a_1 . q^{4-1}
\end{gathered}
$$

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Soma dos Termos de Uma PG finita

Progressão geométrica finita é uma PG que tem um número determinado de elementos. Por exemplo, a seqüência (3, 6, 12, 24, 48) é uma PG de razão igual a q = 2.

A soma dos temos dessa PG será 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93. Fazer essa soma é fácil, pois ela possui apenas cinco elementos. Caso seja necessário somar os termos de uma PG com mais de dez elementos, o que é mais complicado, uma fórmula pode facilitar o trabalho. Veja a sua demonstração:

Dada uma PG finita qualquer com n elementos, ou seja, com a quantidade de elementos definida, PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. A soma desses n elementos será feita da seguinte forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

Multiplicando ambos os membros pela razão q, temos:

$$S_n . q = a_1 . q + a_2 . q + \ldots + a_{n-1} . q + a_n . q$$

Conforme a definição de PG, podemos reescrever a expressão como:

$$S_n . q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n . q$$

Observe que $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ é igual a $S_n - a_1$. Logo, substituindo, vem:

$$S_n . q = S_n - a_1 + a_n . q$$

Simplificando, chegaremos à seguinte fórmula da soma:

$$\boxed{S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

PARA SABER MAIS

Clique no link abaixo ou faça a leitura do qr code ao lado, para acessar a playlist de vídeos sobre progressão geométrica

Clique aqui

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1 A sequência seguinte é uma progressão geométrica, observe: (2, 6, 18, 54...). Determine o 8º termo dessa progressão.

Lembre que razão é o quociente entre dois termos consecutivos.

$$\frac{54}{18} = \frac{18}{6} = \frac{6}{2} = 3$$

Observe: $q = 3$ $a_1 = 2$

Aplicando na fórmula do termo Geral da PG, Temos:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$
$$a_8 = 2 \cdot 3^{8-1}$$
$$a_8 = 2 \cdot 3^7$$
$$a_8 = 2 \cdot 2187$$
$$a_8 = 4374$$

2 Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha. Por exemplo:

1ª Pilha	2º Pilha	3ª Pilha	4º Pilha
Uma Tábua	Duas Tábuas	Quatro Tábuas	Oito Tábuas

Determine a quantidade de tábuas empilhadas na 12ª pilha.

Lembre que razão é o quociente entre dois termos consecutivos.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

Observe: $q = 2$ $a_1 = 1$

Aplicando na fórmula do termo Geral da PG, Temos:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$
$$a_{12} = 1 \cdot 2^{12-1}$$
$$a_{12} = 1 \cdot 2^{11}$$
$$a_{12} = 1 \cdot 2048$$
$$a_{12} = 2048$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

3 Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1,2,4,8,...)

Para encontrar a razão q dividimos um termo pelo seu antecessor.

$$\boxed{S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Temos: $a_1 = 1$ $q = 2$ $n = 10$

$$S_{10} = 1.\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \Rightarrow S_{10} = 1.\frac{1024 - 1}{1} \Rightarrow S_{10} = 1023$$

4 Uma fábrica de chocolates inaugurada em 2010 produziu 1000 ovos de páscoa nesse mesmo ano. Considerando que sua produção aumentou em 50% a cada ano, em 2015, o dono da fábrica poderá dizer que em toda a história da fábrica foram produzidos quantos ovos?

O aumento de 50% pode ser representado por uma multiplicação por 1,5

$$\boxed{S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Sabemos que $q = 1,5$, $n = 6$ e $a_1 = 1000$, então temos que:

$$S_6 = 1000.\frac{1,5^6 - 1}{1,5 - 1} \Rightarrow S_6 = 1000.\frac{11,390625 - 1}{0,5} \Rightarrow S_6 = 1000.\frac{10,390625}{0,5}$$

$$S_6 = 1000.\frac{10,390625}{0,5} \Rightarrow S_6 = 1000.(20,78125) \Rightarrow S_6 = 20781,25$$

A empresa terá produzido aproximadamente 20.781 ovos de páscoa.

5 Uma fábrica de biscoitos está planejando a produção para os próximos meses. A quantidade de biscoitos produzidos mensalmente aumenta em um padrão que pode ser modelado por uma progressão geométrica. A fábrica espera produzir 2000 biscoitos no primeiro mês e espera que a produção dobre a cada mês. Qual será a produção total no primeiro trimestre?

Temos que $a_1 = 2000$ $q = 2$ $n = 3$

$$\boxed{S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

$$S_3 = 2000.\frac{2^3 - 1}{2 - 1} \Rightarrow S_3 = 2000.\frac{8 - 1}{2 - 1} \Rightarrow S_3 = 2000.\frac{7}{1} \Rightarrow S_3 = 14000$$

Logo a produção total ao final do trimestre será 14000 biscoitos.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Progressão Geométrica e Função Exponencial

A conexão entre a progressão geométrica (PG) e a função exponencial é notavelmente direta. Uma progressão geométrica é uma sequência numérica na qual cada termo subsequente ao primeiro é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante fixa, conhecida como razão. Se denotarmos a razão por q e o primeiro termo por a, então o n-ésimo termo de uma PG é dado por $a_1 \cdot q^{n-1}$.

Em contraste, uma função exponencial é uma função na qual a variável independente aparece no expoente. Uma função exponencial com base b é definida por $f(x) = b^x$.

Dessa forma, podemos observar que cada termo de uma progressão geométrica pode ser expresso como uma função exponencial, onde a base é a razão da progressão geométrica e o expoente é a posição do termo menos um. Isso implica que a progressão geométrica pode ser considerada uma restrição do domínio da função exponencial aos números naturais.

A função exponencial de base a é definida pela lei $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1.$

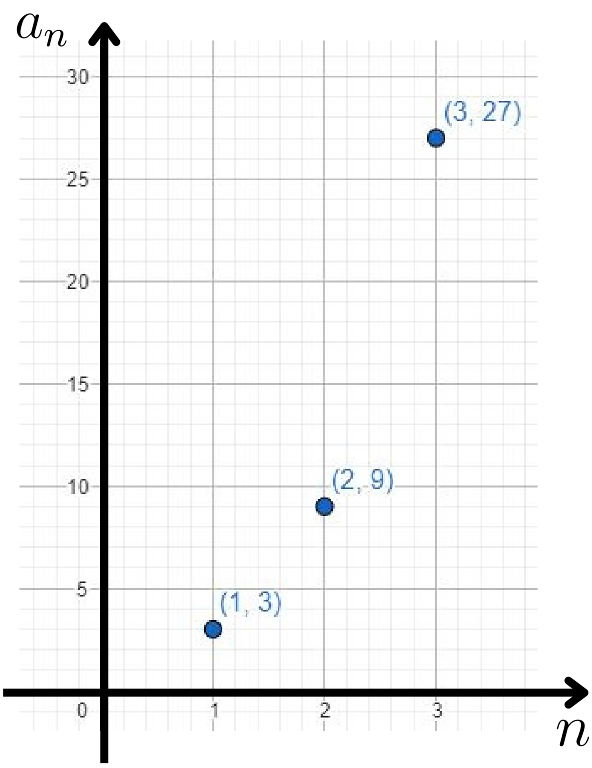
Considerando o domínio de uma função f como os números naturais não nulos, a lei que relaciona qualquer $n \in D(f)$ a $f(n)$ é $f(n) = b^n$. Podemos escrever:

- para n = 1, temos $f_{(1)} = b^1 = b = a_1$
- para n = 2, temos $f_{(2)} = b^2 = b.b = b.a_1 = a_2$
- para n = 3, temos $f_{(3)} = b^3 = b.b^2 = b.a_2 = a_3$
- para n = 4, temos $f_{(4)} = b^4 = b.b^3 = b.a_3 = a_4$
- para n = 5, temos $f_{(5)} = b^5 = b.b^4 = b.a_4 = a_5$

Portanto, temos $f(n) = b^n$ e $f(n+1) = b^{n+1}$, ou seja, $f(1), f(2), f(3), ..., f(n)$ formam uma PG de razão b.

O gráfico de f quando b > 0 e b ≠ 1 é uma curva que cresce rapidamente para b > 1 e decresce rapidamente para 0 < b < 1. Isso reflete a natureza da progressão geométrica: os termos crescem ou decrescem rapidamente dependendo se a razão é maior que 1 ou é um valor maior que zero e menor que 1.

6 O gráfico a seguir representa uma progressão geométrica. O eixo horizontal apresenta os valores de n, sendo n natural não nulo e o eixo vertical apresenta valores para a_n.



a) Qual é o valor do termo a_5?

Resolução:

O gráfico apresenta os valores dos três primeiros termos da PG. Dessa forma, a partir das informações apresentadas, concluímos que a PG inicia com $a_1 = 3$, $a_2 = 9$ e $a_3 = 27$. Para determinar o valor do quinto termo, precisamos saber o valor da razão da PG. O cálculo dessa razão (q) é possível a partir do quociente entre um termo e seu antecessor:

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{27}{9} = 3$$

Sabendo que a razão da PG é 3, podemos determinar o quinto termo:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$a_5 = 3 \cdot 3^4$$
$$a_5 = 3 \cdot 81$$
$$a_5 = 243$$

6 (CONTINUAÇÃO)

b) Determine a soma dos cinco primeiros termos da PG apresentada no gráfico.

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot (q^5 - 1)}{q - 1}$$

$$S_5 = \frac{3 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_5 = \frac{3 \cdot (243 - 1)}{2}$$

$$S_5 = \frac{3 \cdot 242}{2} = \frac{726}{2} = 363$$

A soma dos cinco primeiros termos da PG apresentada no gráfico é igual a 363.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

Uma sequência é considerada uma Progressão Geométrica (PG) se a razão entre cada termo (exceto o primeiro) e o seu antecessor é constante. Em outras palavras, podemos verificar se uma sequência é uma PG verificando se as divisões entre cada termo e seu antecessor têm o mesmo resultado.

Marque a única alternativa que mostra uma PG.

a) (3, 6, 9, 12, ...)
b) (5, 15, 75, 375, ...)
c) (2, -2, -2, -2, ...)
d) (1, 1, 2, 3, ...)
e) (-6, -18, -54, -162, ...)

Atividade 2

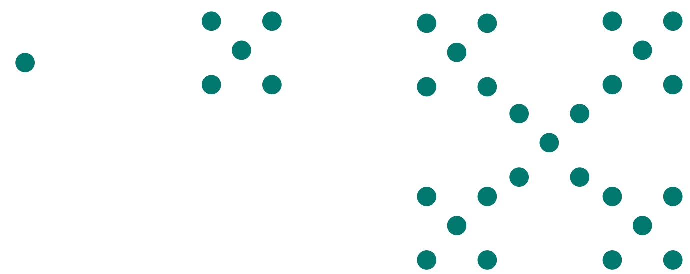
Qual é o 6º termo da P.G. (1, 4, 16, 64, ...)?

a) 6 b) 164 c) 256 d) 1024 e) 2056

Atividade 3

Uma estudante desenhou uma sequência de pontos conforme a imagem a seguir:

1ª figura 2ª figura 3ª figura



a) Determine a quantidade de pontos da 5ª figura da sequência;

b) Quantos pontos a estudante terá desenhado ao concluir a 5ª figura da sequência?

Atividade 4

Em uma progressão geométrica, $a_3 = 108$ e $a_4 = 648$. Dessa forma, é correto afirmar que:

a) $q = 6$ e $a_1 = \frac{1}{2}$

b) $q = 6$ e $a_1 = 3$

c) $q = 6$ e $a_1 = 18$

d) $q = \frac{1}{6}$ e $a_1 = 3$

e) $q = \frac{1}{6}$ e $a_1 = 3888$

Atividade 5

(M120789ES) As inscrições para um concurso ficaram abertas durante 10 dias. No primeiro dia, 32 pessoas se inscreveram. Nos 9 dias restantes, o número de inscrições de um dia foi igual ao dobro do número de inscritos no dia anterior.

Dessa forma, quantas pessoas se inscreveram nesse concurso?

A) 16 368
B) 16 384
C) 32 736
D) 32 768
E) 32 800

Dado:
$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

Atividade 6

(M120396E4) Em uma P.G., o primeiro termo é – 3, e a razão é igual – 2.

Qual é o valor da soma dos seis primeiros termo dessa P.G.?

A) – 128
B) – 96
C) – 32
D) 63
E) 65

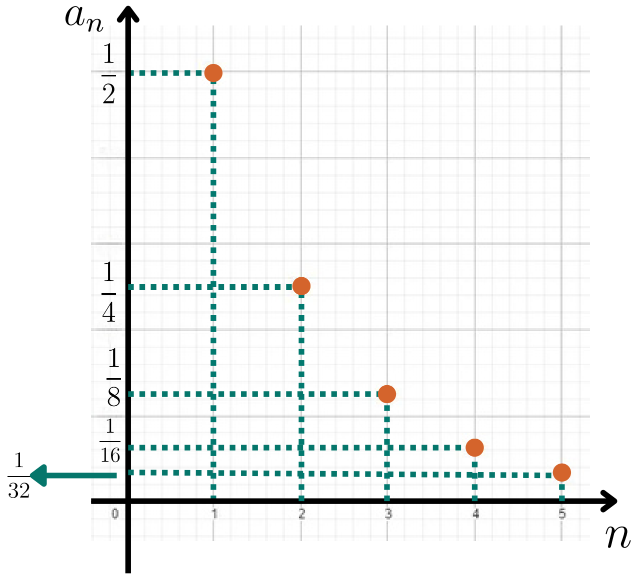
Atividade 7

A soma dos 10 primeiros termos de uma progressão geométrica é 4092. Sabendo que a razão dessa progressão é igual a 2, o primeiro termo da sequência é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Atividade 8

O gráfico a seguir representa uma progressão geométrica (PG) com n sendo um número natural não nulo.



a) Escreva os termos dessa progressão geométrica apresentados no gráfico.

b) Determine a razão q dessa progressão geométrica.

c) Determine o valor do sexto termo dessa PG.

Atividade 9 - Desafio

Em uma PG, sabe-se que a razão é positiva, o 3º termo vale -80 e o 7º termo vale -5. Determine o valor do 1º termo.

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Respostas

Atividade 1

Alternativa e

Atividade 2

Alternativa d

Atividade 3

a) A primeira figura apresenta 1 ponto, a segunda 5 pontos e a terceira 25 pontos. Ou seja, temos a sequência numérica (1, 5, 25).

Ao dividirmos cada termo pelo seu antecessor (com exceção do primeiro), podemos verificar que a sequência é uma progressão geométrica de razão 5.

$$\frac{5}{1} = 5 \qquad \frac{25}{5} = 5$$

Dessa forma, podemos calcular o quinto termo utilizando a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$$

$$a_5 = 1 \cdot 5^4$$

$$a_5 = 625$$

b) Sabendo que a sequência de pontos desenhados é uma PG, podemos determinar o número total de pontos por meio da fórmula da Soma de uma PG finita.

$$S_5 = \frac{1 \cdot (5^5 - 1)}{5 - 1} = \frac{1 \cdot 3124}{4} = 781$$

A estudante desenhou um total de 781 pontos ao completar a 5ª figura.

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Respostas

Atividade 4

Alternativa b

Atividade 5

Alternativa c

Atividade 6

Alternativa d

Atividade 7

Alternativa c

Atividade 8

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right)$

b) Podemos determinar a razão dessa PG dividindo um termo pelo seu antecessor (com exceção do primeiro). Por exemplo, escolhemos dividir o segundo termo pelo seu antecessor:

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

A razão dessa PG é $\frac{1}{2}$.

c) Podemos obter o sexto termo multiplicando o quinto termo pela razão da PG.

$$a_6 = a_5 \cdot q$$

$$a_6 = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_6 = \frac{1}{64}$$

Respostas

Atividade 9

Conforme o enunciado, sabe-se que:

$$a_3 = -80$$
$$a_7 = -5$$

Vamos utilizar essas informações no Termo Geral:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_7 &= a_1 \cdot q^6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -80 &= a_1 \cdot q^2 \\ -5 &= a_1 \cdot q^6 \end{aligned}$$

Equação 1

Equação 2

Vamos isolar a_1 na Equação 1:

$$\frac{-80}{q^2} = a_1$$

Substituindo na Equação 2:

$$-5 = a_1 \cdot q^6$$

$$-5 = \frac{-80}{q^2} \cdot q^6$$

$$-5 = \frac{-80q^6}{q^2}$$

$$-5 = -80q^4$$

$$\frac{-5}{-80} = q^4$$

$$\frac{1}{16} = q^4 \Rightarrow \frac{1}{2} = q$$

Por fim, usando a razão encontrada para calcular o valor do primeiro termo:

$$-80 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$-80 = a_1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$-80 \div \frac{1}{4} = a_1$$

$$-320 = a_1$$

REFERÊNCIAS

www.khanacademy.org. Acessado em: 08 abr 2024.

www.novaescola.org.br. Acessado em: 08 abr 2024.

https://www.somatematica.com.br/emedio/pg.php acessado em 08 abr 2024

https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/soma-dos-termos-uma-pg-finita.htm acessado em 08 abr 2024

https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-progressao-geometrica.htm Acessado em 10 abr 2024