MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

3ª Série | Ensino Médio

Matemática

Resolvendo Problemas envolvendo Probabilidade em eventos sucessivos

DESCRITOR PAEBES	D065_M Resolver problema envolvendo noções de probabilidade.
HABILIDADE DO CURRÍCULO RELACIONADA AO DESCRITOR	EM13MAT312 Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
HABILIDADE OU CONHECIMENTO PRÉVIO	EF09MA20 Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

VOCÊ SABIA?

CONTEXTUALIZAÇÃO

imagem OpenClipart-Vectores por Pixabay

VIDEOGAME
HABILIDADE OU SORTE?

Já percebeu que muitas vezes um jogador de videogame com menos habilidade vence aquele que tem mais habilidade?

Por mais que o jogador treine, a maioria dos jogos de videogame tem um pouco de aleatoriedade, que acrescenta imprevisibilidade, proporcionando momentos inesperados e interessantes. Com isso, os jogos tornam-se mais desafiadores.

A aleatoriedade nos jogos de videogame é obtida por meio do RNG - do inglês Random Number Generator (Gerador de Números Aleatórios). método que produz números aleatórios dentro de certo intervalo.

As principais características de RNG nos jogos geralmente estão relacionadas ao uso ou não de sequências predeterminadas nos cenários, obstáculos ou inimigos.

Além do RNG nos jogos de um videogame. existem muitas outras situações em que são utilizadas aleatoriedade. Neste material iremos estudar os principais conceitos envolvidos no cálculo de probabilidade, envolvendo o cálculo da probabilidade de um evento ou da união de dois eventos, assim como de experimentos sucessivos.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

No material anterior, vimos que:

Espaço amostral é o conjunto formado por todos os resultados possíveis em um experimento. Representamos o espaço amostral pela letra grega Ω (ômega).

Evento (ou acontecimento) é qualquer subconjunto desse espaço amostral e indicamos por letra maiúscula.

Probabilidade de modo geral pode ser calculada por

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Exemplo:
No lançamento de **um** dado, qual é a probabilidade de a face superior apresentar o número 3?

Resolução:
Espaço amostral S = {1,2,3,4,5,6} e n(S) = 6.
E = {3} e n(E) = 1
então,
P(E) = 1/6

LANÇAMENTOS SUCESSIVOS

Em probabilidade, lançamentos sucessivos geralmente se referem à realização de uma série de experimentos um após o outro.

Didaticamente, podemos dividir esses lançamentos em:

- lançamentos com reposição;
- lançamentos sem reposição.

Exemplos:
Uma urna contém 12 bolas pretas e 8 brancas. Duas bolas são sorteadas, uma após a outra. Determine a probabilidade de serem sorteadas duas bolas pretas.

A probabilidade de duas bolas pretas serem sorteadas vai depender se haverá ou não reposição da bola. A probabilidade da primeira bola sorteada ser preta é 12 em 20 (12/20). Observe que foi retirada uma bola dentre as 20. Como houve reposição, a quantidade de bolas para o sorteio da segunda bola permanece sendo 20, ou seja, a chance de que a 2ª bola sorteada seja preta é também 12/20.

No caso de não haver reposição, sendo preta a retirada da 1ª bola, temos para a retirada da 2ª bola uma alteração, ficando 11 bolas pretas dentre 19 bolas.

Portanto, em lançamentos sucessivos, deve-se observar se houve ou não reposição.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade condicional é um conceito fundamental na teoria da probabilidade que descreve a probabilidade de um evento ocorrer, dado que outro evento já ocorreu. Em termos simples, a probabilidade condicional é a probabilidade de que um evento B ocorra, sabendo que outro evento A já ocorreu.

A probabilidade condicional é denotada matematicamente como P(B|A), onde:

- P(B|A) representa a probabilidade de B ocorrer dado que A já ocorreu.
- P(B) representa a probabilidade de B ocorrer independentemente de A.

A fórmula geral para a probabilidade condicional é dada por:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{, com } P(B) \neq 0$$

ou ainda,

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(B)\ .\ P(A|B)}$$

Isso significa que, para se calcular a probabilidade de ocorrer a interseção dos eventos A e B (ocorrência simultânea) é preciso multiplicar a probabilidade de ocorrer um deles (p(B)) pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu (p(A|B)).

Esse tipo de probabilidade também é conhecido como a **probabilidade da intersecção de dois eventos.**

Exemplo:
De um baralho comum são retiradas 2 cartas, uma a uma e sem reposição. Calcular a probabilidade de as duas cartas serem de copas.

Resolução:
Evento B: a primeira carta é de copas.
Então: P(B) = 13/52 = 1/4

Evento A: a segunda carta é de copas.
P(A|B) = 12/51

Queremos obter a probabilidade de ambas as cartas serem de copas, ou seja, devemos calcular a probabilidade de $A \cap B$:
$P(A \cap B) = P(B)\ .\ P(A|B)$

$P(A \cap B) = 1/4\ .\ 12/51 = 3/51$

A probabilidade de as duas cartas serem de copas é 3/51.

EVENTOS INDEPENDENTES

Considere o lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda. Adotando c para cara e k para coroa, o espaço amostral desse experimento é
S = {(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6), (k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6)}
e n(S) = 12.

Vamos considerar os eventos:
Evento A: sair cara na moeda.
Evento B: sair um número múltiplo de 3 no dado.
Então:
A = {(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)} e P(A) = 6/12 = 1/2

B = {(c, 3), (c, 6), (k, 3), (k, 6)} e P(B) = 4/12 = 1/3

A∩B = {(c, 3), (c, 6)} e P(A∩B) = 2/12 = 1/6

pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Note que P(A|B) = P(A), ou seja, a probabilidade de sair cara na moeda não é alterada pela ocorrência de número múltiplo de 3 no dado.
Temos, ainda:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(B)$$

Como P(B|A) = P(B), a probabilidade de ocorrer o evento B também não é alterada pela ocorrência do evento A. Portanto, a ocorrência de um evento não interferiu na probabilidade de ocorrência do outro. Dizemos, então, que os eventos “sair cara na moeda” e “sair um número múltiplo de 3 no dado” são **eventos independentes**.

Para a ocorrência simultânea dos dois eventos independentes, substituímos P(A|B) por P(A) em P(A∩B) = P(B) . P(A|B).

Assim, temos:

P(A∩B) = P(A) . P(B)

Dois eventos, A e B, são **eventos independentes** se a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência do outro, isto é, se P(A|B)=P(A) e P(B|A) = P(B).

EVENTOS DEPENDENTES

Numa urna há 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Serão retiradas dessa urna duas bolinhas, ao acaso, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de sair um múltiplo de 10 na primeira e um número ímpar na segunda?

Resolução:
O fato de a retirada das bolinhas ocorrer sem reposição, implica que a ocorrência do primeiro evento interfere na probabilidade do segundo ocorrer. Portanto, esses eventos são **dependentes**.

Evento A: sair um múltiplo de 10.
Evento B: sair um número ímpar.

Então:
A = {10, 20, 30}
B = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29}

Observe que a probabilidade de sair uma bolinha que seja um múltiplo de 10 é 3 em 30, ou seja, 3/30 = 1/10.

Já a probabilidade de sair um número ímpar na segunda bolinha é 15 em 29 (porque já saiu a primeira bolinha e os múltiplos de 10 necessariamente são pares), ou seja, 15/29.
Assim, temos:

$$P(A \cap B) = 1/10 \,.\, 15/29 = 15/290 = 3/58$$

A probabilidade de sair um múltiplo de 10 na primeira e um número múltiplo ímpar na segunda é 3/58.

Vale pensar: E se os eventos não fossem dependentes?
Neste caso, a retirada de uma bolinha na primeira vez não afetaria a retirada da bolinha na segunda vez.

Probabilidade de sair um múltiplo de 10 na primeira retirada continuaria sendo 3 em 30, ou seja, 3/30 = 1/10, mas a probabilidade de sair um número ímpar na segunda bolinha seria 15 em 30, ou seja, 15/30 = 1/2.

Temos, então P(A) . P(B) = 1/10 . 1/2 = 1/20, chance que é diferente do que realmente aconteceu (3/58).

Dois eventos, A e B, são **eventos dependentes** quando a probabilidade de ocorrência de um deles interfere na ocorrência do outro. Nesse caso,

$$P(A \cap B) \neq P(A) \,.\, P(B)$$

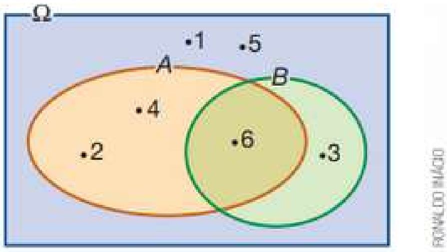
PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, como podemos calcular a probabilidade de ocorrer ao menos um desses eventos?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar o lançamento de um dado comum e os eventos A, “o número obtido ser múltiplo de 2”, e B, “o número obtido ser múltiplo de 3”. Nesse caso:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; n(S) = 6
A = {2, 4 6}; n(A) = 3
B = {3,6}; n(B) = 2

Observe o diagrama a seguir:



Temos que:

$A \cap B = \{6\} \rightarrow$ o elemento 6 satisfaz simultaneamente os eventos *A* e *B*.

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \rightarrow$ os elementos 2, 3, 4 e 6 satisfazem o evento *A* ou *B*.

Calculando, temos:
P(A) = 3/6; P(B) = 2/6; P(A∩B) = 1/6; P(A∪B) = 4/6

Portanto, em um lançamento, a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é de 4/6.

A partir desses cálculos, podemos verificar que:
P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)
P(A∪B) = 3/6 + 2/6 - 1/6
P(A∪B) = 4/6

A probabilidade de ocorrer o evento A **ou** o evento B, ou seja, a **união dos dois eventos**, é igual à probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade da interseção de A com B.
P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

Quando A∩B = ∅, ou seja, A e B são conjuntos disjuntos, dizemos que os eventos são **mutuamente exclusivos**, isto é, a ocorrência de um deles exclui a possibilidade da ocorrência do outro.

Nesses casos, temos

P(A∪B) = P(A) + P(B)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Em uma bolsa, há 2 cubos vermelhos e 4 cubos azuis. Se 2 cubos são selecionados ao acaso, um de cada vez, e o primeiro cubo retirado **não é reposto** na bolsa, calcular a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos.

Resolução:
Evento B: o primeiro cubo é vermelho.
Então: $P(B) = 2/6 = 1/3$
Evento A: o segundo cubo é vermelho. A probabilidade da ocorrência de A depende da ocorrência de B, pois, se o primeiro cubo retirado for vermelho, haverá somente um cubo vermelho entre 5 cubos restantes na bolsa.
Assim: $P(A|B) = 1/5$
Queremos obter a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos, ou seja, devemos calcular a probabilidade de $A \cap B$:
$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A|B)$
$P(A \cap B) = 1/3 \,.\, 1/5 = 1/15$

2 Retiramos 2 cartas de um baralho de 52 cartas, uma após a outra e **com reposição**. Calcule a probabilidade de a primeira ser uma dama e a segunda ser um 10.

Resolução:
S: cartas do baralho e $n(S) = 52$.
Evento A: primeira carta ser uma dama, $n(A) = 4$.
Evento B: segunda carta ser um 10, $n(B) = 4$.
$P(A) = P(B) = 4/52 = 1/13$
Como houve reposição, A e B são eventos **independentes**.
$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = 1/13 \,.\, 1/13 = 1/169$
Então, a probabilidade de a primeira carta ser uma dama e a segunda ser um 10 é 1/169.

3 Em uma pesquisa realizada com 400 jovens de 15 a 20 anos, verificou-se que 200 estudam e 180 trabalham, sendo que, entre esses jovens, 130 estudam e trabalham. Qual é a probabilidade de que um dos jovens pesquisados, escolhido aleatoriamente, estude ou trabalhe?

Resolução:
Sejam E e T os eventos “estude” e “trabalhe”, respectivamente.
Temos:
$P(E) = 200/400$
$P(T) = 180/400$
$P(E \cap T) = 130/400$
A probabilidade de que um jovem escolhido aleatoriamente estude ou trabalhe é dada por:

$$P(E \cup T) = P(E) + P(T) - P(E \cap T)$$
$$P(E \cup T) = 200/400 + 180/400 - 130/400$$
$$P(E \cup T) = 250/400 = 5/8$$

Vale lembrar que a representação percentual de uma probabilidade se dá ao dividir, neste caso, 5 por 8, obtendo 0,625 = 62,5%.

Atividade 1

(M11106CA) Anos bissextos são aqueles que, de 4 em 4 anos, acrescenta um dia no mês de fevereiro. Dessa forma, em 4 anos, escolhendo um ano desses ao acaso, a probabilidade de ele ser bissexto é

A) 24%
B) 24,5%
C) 25%
D) 25,5%
E) 40%

Atividade 2

(M120181G5) Uma competição é formada por 20 participantes divididos em 4 equipes, sendo dois participantes da equipe laranja, cinco da equipe vermelha, seis da equipe azul e sete da equipe preta. Para realizar uma prova, será feito um sorteio entre as equipes participantes. Foram colocados em uma uma uma determinada quantidade de bolas nas cores de cada equipe, representando os membros de cada uma dessas equipes. Essas bolas são iguais, com mesmo formato e se diferenciam apenas por sua cor.
Qual é a probabilidade dessa bola sorteada ser da equipe azul?

A) $\frac{1}{20}$
B) $\frac{1}{6}$
C) $\frac{3}{10}$
D) $\frac{3}{7}$
E) $\frac{7}{10}$

Atividade 3

(M11045SI) Em um único lançamento, qual é a probabilidade de dois dados exibirem o mesmo número em sua face superior?

A) $\frac{1}{36}$
B) $\frac{1}{18}$
C) $\frac{1}{12}$
D) $\frac{1}{9}$
E) $\frac{1}{6}$

Atividade 4

(M120266G5) Um casal que possui 5 filhos levou para casa 5 barras de chocolate para distribuir entre eles. Dessas barras, 3 são de chocolate ao leite e 2 de chocolate branco. Por ordem de idade, do mais velho ao mais novo, todos escolherão ao acaso uma barra de chocolate de dentro da bolsa.
Qual é a probabilidade de o filho mais velho retirar uma barra de chocolate ao leite?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{3}{5}$

Atividade 5

(PAMA11178MS) Em cinco lançamentos de uma moeda, qual é a probabilidade de sair cinco vezes cara?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{10}$

C) $\frac{1}{25}$

D) $\frac{1}{32}$

E) $\frac{1}{125}$

Atividade 6

(M120008PE) Um disco tem uma face vermelha e a outra preta. Se o disco for lançado três vezes, qual é a probabilidade de a face vermelha cair voltada para cima pelo menos uma vez?

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{7}{8}$

Atividade 7

(M11326SI) Em uma cesta, estão 9 laranjas, das quais 2 estão estragadas.

Ao retirar da cesta 2 laranjas, qual é a probabilidade de que ambas estejam estragadas?

A) $\frac{1}{36}$

B) $\frac{2}{9}$

C) $\frac{1}{18}$

D) $\frac{1}{9}$

E) $\frac{4}{9}$

Atividade 8

(PAMA11177MS) Lançando-se uma moeda e um dado, qual é a probabilidade de ocorrerem coroa e um número menor que 4?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{5}{4}$

Atividade 9

(Enem) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

A) 63,31%

B) 60,18%

C) 56,52%

D) 49,96%

E) 43,27%

Atividade 10

(ENEM) Um programa de televisão criou um perfil em uma rede social, e a ideia era de que esse perfil fosse sorteado para um dos seguidores, quando esses fossem em número de um milhão. Agora que essa quantidade de seguidores foi atingida, os organizadores perceberam que apenas 80% deles são realmente fãs do programa. Por conta disso, resolveram que todos os seguidores farão um teste, com perguntas objetivas referentes ao programa, e só poderão participar do sorteio aqueles que forem aprovados. Estatísticas revelam que, num teste dessa natureza, a taxa de aprovação é de 90% dos fãs e de 15% dos que não são fãs.

De acordo com essas informações, a razão entre a probabilidade de que um fã seja sorteado e a probabilidade de que o sorteado seja alguém que não é fã do programa é igual a

A) 1

B) 4

C) 6

D) 24

E) 96

GABARITO

ATIVIDADE 1:C
ATIVIDADE 2:C
ATIVIDADE 3:E
ATIVIDADE 4: E
ATIVIDADE 5: D
ATIVIDADE 6: E
ATIVIDADE 7: A
ATIVIDADE 8: C
ATIVIDADE 9: D
ATIVIDADE 10: D

REFERÊNCIAS

Diálogo: matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Khan Academy. Disponível em: www.khanacademy.org. Acessado em: 08 mar 2024.

Nova Escola. Disponível em: www.novaescola.org.br. Acessado em: 08 mar 2024.

Portal da Matemática (IMPA). Disponível em:
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1 . Acessado em: 08 mar 2024.