MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

3ª Série | Ensino Médio

Matemática

Resolvendo Problemas envolvendo Probabilidade

DESCRITOR PAEBES	D065_M Resolver problema envolvendo noções de probabilidade.
HABILIDADE DO CURRÍCULO RELACIONADA AO DESCRITOR	EF09MA20 Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
HABILIDADE OU CONHECIMENTO PRÉVIO	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

CONTEXTUALIZAÇÃO

VOCÊ SABIA?

No futebol, a prática de cara ou coroa é frequentemente utilizada para decidir quem terá a posse inicial da bola ou quem irá escolher o lado do campo em que sua equipe deseja iniciar o jogo. Essa escolha é determinada através de um lançamento de moeda, onde uma das faces da moeda é marcada como "cara" e a outra como "coroa".

A regra 8 do futebol referente ao início e reinício do jogo, estipula que, após o sorteio, a equipe vencedora tem o direito de escolher entre dar o pontapé inicial ou selecionar o lado do campo em que deseja iniciar o jogo. O time que não vence o sorteio então fica com a outra opção.

O procedimento é bastante simples: o árbitro convoca os capitães das duas equipes para o centro do campo antes do início da partida. Ele então apresenta a moeda e solicita a escolha de um dos capitães. Se o capitão escolhido acertar o lado da moeda que foi sorteado, sua equipe terá a decisão sobre o início do jogo.

Qual a chance do time A vencer, ao pedir cara?

Texto extraído de matematicarlos.com, publicado em 04 de março de 2023.

Cálculos como esse serão abordados neste material.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

PROBABILIDADE

A palavra **probabilidade** deriva do latim *probare*, que significa provar, sendo esta uma das palavras utilizadas para eventos incertos ou desconhecidos, assim como chance.

O estudo da **teoria das probabilidades** tenta qualificar a noção de provável em determinados eventos em que surgem possibilidades com probabilidades.

Existe um conjunto de regras onde pode-se prever a probabilidade de acertos, números de vezes entre outras ocasiões que conseguimos calcular por meio de fórmulas e regras matemáticas.

A ideia de probabilidade é frequentemente dividida em **probabilidade aleatória** e **probabilidade epistemológica**. Neste material focaremos na probabilidade aleatória.

REPRESENTAÇÕES DE PROBABILIDADE

A probabilidade pode ser representada como fração, como porcentagem ou como número decimal. Saber a conversão entre essas representações é importante.

Exemplo:
2/5 = 0,4 = 40%

REPRESENTANDO FRAÇÕES EM NÚMEROS DECIMAIS

A representação decimal de uma fração é dada ao dividir o numerador pelo denominador. Assim, na fração 2/5, dividimos 2 por 5, obtendo 0,4.

REPRESENTANDO NÚMEROS DECIMAIS EM PORCENTAGEM

Dado um número decimal, a sua representação em porcentagem se dá ao multiplicar esse número por 100. Assim, 0,4 x 100 = 40%

OBSERVAÇÕES:
Vale lembrar que a probabilidade é um número entre 0 e 1 e está entre 0% e 100%.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Espaço amostral é o conjunto formado por todos os resultados possíveis em um experimento. Representamos o espaço amostral pela letra grega Ω.

Evento é qualquer subconjunto desse espaço amostral.

Exemplo:
Ao lançar um dado e registrar o resultado, todos resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Dizemos que o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Um evento pode ser o subconjunto {1,3,5}. Dizemos que temos o evento A: “ocorrer número ímpar no lançamento de um dado”, A = {1,3,5}.

EVENTO CERTO E EVENTO IMPOSSÍVEL

EVENTO CERTO
É quando um evento coincide com o espaço amostral. Em outras palavras, é “certo” que ele aconteça, como no exemplo a seguir:

Experimento: “lançar um dado e registrar o resultado”.
Espaço amostral: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Evento: “ocorrência de número menor que 7” $\rightarrow$ A = {1,2,3,4,5,6}

EVENTO IMPOSSÍVEL
É quando um evento é vazio. Em outras palavras, é “impossível” que ele aconteça, como no exemplo a seguir:

Experimento: “lançar um dado e registrar o resultado”.
Espaço amostral: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Evento: “ocorrência de número maior que 6” $\rightarrow$ B = { }

CONCEITOS E CONTEÚDOS

EVENTO COMPLEMENTAR

Em uma urna, há 5 bolas coloridas, sendo 3 vermelhas e 2 brancas. Uma bola é sorteada, sua cor é anotada e ela é devolvida à urna. Nessa situação, considere o evento A "a bola sorteada é vermelha", com n(A) = 3, e o evento B "a bola sorteada é branca", com n(B) = 2.
Sabe-se que, para o espaço amostral S desse experimento, temos n(S) = 5. Logo, as probabilidades dos eventos A e B são dadas por:

- P(A) = 3/5 = 0,6 = 60%
- P(B) = 2/5 = 0,4 = 40%

A probabilidade de ocorrência do evento B poderia ser calculada considerando-se que há somente duas possibilidades no experimento, ou seja, a bola sorteada só pode ser branca ou vermelha. Assim, a reunião dos eventos A e B implica um evento certo, cuja probabilidade é igual a 1 (100%). Por isso, temos:

$$P(B) + P(A) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{3}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento de S. Dizemos que o evento $\bar{A}$ é **complementar** do evento A se $\bar{A} \cap A = \varnothing$ e $\bar{A} \cup A = S$.

A soma das probabilidades de dois eventos complementares é igual a 1, ou seja $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Assim,

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

EVENTOS INDEPENDENTES

Dois ou mais eventos são denominados **eventos independentes** quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros eventos terem ocorrido ou não.

Dados dois eventos independentes A e B de um espaço amostral, a probabilidade de eles ocorrerem sucessivamente é dada por **P(A e B) = P(A) * P(B)**. Essa relação normalmente é expressada usando apenas símbolos matemáticos da seguinte forma:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo:

Uma urna contém 10 bolas coloridas idênticas. Há 5 bolas azuis, 2 bolas verdes, 2 bolas amarelas e 1 bola vermelha. Sorteando-se **duas** dessas bolas (ao acaso), **com reposição** da bola sorteada, qual é a probabilidade de a primeira bola sorteada ser **azul e** a segunda bola ser vermelha?

Note que o evento "sair a primeira bola azul" não depende da ocorrência "sair a segunda bola vermelha", uma vez que houve reposição da bola sorteada. Esses eventos são **independentes**, ou seja, um não depende do outro.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

EVENTOS DEPENDENTES

Dois ou mais eventos são denominados **eventos dependentes** quando a probabilidade de ocorrer um deles depende do fato de os outros eventos terem ocorrido ou não.

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral, a probabilidade de eles ocorrerem sucessivamente é dada por **P(A e B) = P(B e A) = P(A dado que B ocorreu) * P(B)**. Essa relação normalmente é expressada usando apenas símbolos matemáticos da seguinte forma:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Exemplo:

Uma urna contém 10 bolas coloridas idênticas. Há 5 bolas azuis, 2 bolas verdes, 2 bolas amarelas e 1 bola vermelha. Sorteando-se **duas** dessas bolas (ao acaso), **sem reposição** da bola sorteada, qual é a probabilidade de a segunda bola sorteada ser **azul** sabendo que a primeira bola foi **vermelha**?

Note que o evento “sair a segunda bola azul” **depende** da ocorrência “sair a primeira bola vermelha”, uma vez que **não** houve reposição da bola sorteada. Esses eventos são **dependentes**, ou seja, um depende do outro.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Quando em um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma chance de ocorrer (o espaço é **equiprovável**), a probabilidade de ocorrer um evento A, indicada por p(A), é um número que mede essa chance e é dado por:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Nesse caso, os eventos elementares são chamados eventos equiprováveis, pois todos têm a mesma chance de ocorrer. Os eventos aqui trabalhados serão todos equiprováveis.

EXEMPLO:

Consideremos o experimento aleatório de uma moeda perfeita. Qual e a probabilidade de sair cara?

Espaço amostral: Ω = {C,K} → n(Ω) = 2
Evento A: ocorrência de cara → A = {C} → n(A) =

Portanto:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Experimento: um dado não viciado é lançado e observamos a sua face de cima.
Neste caso, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } n(\Omega) = 6$$

Consideremos o evento A, “o resultado é ímpar”. Então, A = {1, 3, 5} e n(A) = 3.
Neste caso, temos

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Essa é a probabilidade antes de o experimento ser realizado.

Vamos supor agora que, ao realizar o experimento, verificou-se que o resultado não foi o número 6, isto é, que ocorreu B, “o resultado é diferente de 6”. Considere que B = {1, 2, 3, 4, 5} e n(B) = 5.

Agora, a probabilidade de ocorrer A, sabendo que já ocorreu B, que denotamos por p(A|B), é:

$$P(A|B) = \frac{3}{5} = 0,6$$

Observe que agora os casos possíveis são todos os elementos de B e não mais todos os elementos de Ω E que os casos favoráveis à ocorrência de A não são mais todos os elementos de A e sim os elementos de $B \cap A$, pois só os elementos pertencentes a B podem ocorrer.

DICA DE AULA

Acesse a aula de Probabilidade gravada nos estúdios da TVE e disponível no Canal da SEDU.

Clique aqui

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1 ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

No lançamento de uma moeda, determine o espaço amostral e o evento "sair cara".
Resolução:
Para diferenciar cara de coroa, podemos denominar cara como C e coroa como K. Logo:
Espaço amostral: $\Omega = \{C, K\}$
Evento A: "sair cara $\rightarrow$ A = {C}.

2 EVENTOS INDEPENDENTES

Uma urna contém 10 bolas coloridas idênticas. Há 5 bolas azuis, 2 bolas verdes, 2 bolas amarelas e 1 bola vermelha. Sorteando-se duas dessas bolas (ao acaso), com reposição da bola sorteada, qual é a probabilidade de a primeira bola sorteada ser azul e a segunda bola ser vermelha?
Resolução:
Como vimos na explicação, o evento "sair a primeira bola azul" não depende da ocorrência "sair a segunda bola vermelha", uma vez que houve reposição da bola sorteada.
Estando diante de eventos independentes, vimos que usamos **P(A e B) = P(A) . P(B)**
São 10 bolas e 5 delas são azuis. A probabilidade de a primeira bola sorteada ser azul é dada por (PA) = 5/10 = 1/2.
A probabilidade de a segunda bola a ser sorteada ser vermelha é dada por P(B) = 1/10.
P(A e B) = P(A) . P(B)
P(A e B) = 1/2 . 1/10 = 1/20
Portanto, a probabilidade da primeira bola ser azul e a segunda bola ser vermelha é 1/20.

3 EVENTOS DEPENDENTES

Uma urna contém 10 bolas coloridas idênticas. Há 5 bolas azuis, 2 bolas verdes, 2 bolas amarelas e 1 bola vermelha. Sorteando-se duas dessas bolas (ao acaso), sem reposição da bola sorteada, qual é a probabilidade de a segunda bola sorteada ser azul sabendo que a primeira bola foi vermelha?
Resolução:
Vimos na explicação que o evento "sair a segunda bola azul" depende da ocorrência "sair a primeira bola vermelha", uma vez que não houve reposição da bola sorteada.
Vimos ainda que para eventos dependentes, usamos

P(A e B) = P(B e A) = P(A dado que B ocorreu) . P(B)

A probabilidade de que a primeira bola a ser sorteada seja vermelha é dada por P(B) = 1/10.
Perceba que, como **não** houve reposição, quando for sortear a segunda bola não haverá mais 10 bolas na urna. Assim, teremos 5 chances em apenas 9 bolas, donde podemos representar como P(A) = 5/9. Temos que:
P(A e B) = P(B e A) = P(A dado que B ocorreu) . P(B)
P(1º bola vermelha e 2ª bola azul) = P(bola azul sabendo que saiu vermelha) . P(vermelha) =
5/9 . 1/10 = 5/90 = 1/18

EXERCICIOS RESOLVIDOS

4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Experimento: ao retirar aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de se retirar um ás vermelho? E qual é a probabilidade de se retirar um ás vermelho de copas?

Resolução:
Espaço amostral = n(Ω) =52
Evento A = {retirar um ás vermelho} = {retirar um ás de copas, retirar um ás de ouros}; n(A) = 2

Assim, temos: $P(A) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \cong 0,04$

Isso é a probabilidade de se retirar um ás vermelho antes do experimento ser realizado. Vamos supor agora que, ao realizar o experimento, verificou-se que foi retirada uma carta de copas, ou seja, que ocorreu:
B = {retirar uma carta de copas}; n(B) = 13

Agora a probabilidade de ocorrer A, condicionada ao fato de que já ocorreu B, ou seja, p(A|B), é dada por $P(A|B) = \frac{1}{13} \cong 0,08$.

Note que agora os casos possíveis são os 13 elementos de B e não mais os 52 elementos do espaço amostral inicial Ω . E também que os casos favoráveis à ocorrência de A, já tendo ocorrido B, não são mais todos os elementos de A e sim os elementos de A$\cap$B.

Nesse caso, tivemos:

evento A = {retirar um ás de copas, retirar um ás de ouros}

evento B = {retirar uma carta de copas}
A $\cap$B = {retirar um ás de copas} $\Rightarrow$ n(A $\cap$ B) =1.

Assim, ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, a probabilidade de sair um ás vermelho, condicionada ao fato de que a carta retirada tem de ser de copas, é de 1/13 .

Note que, usando a fórmula, temos:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{13}.$$

Atividade 1

(M120265G5) Uma escola tem 320 alunas e 280 alunos. O diretor dessa escola vai sortear uma bolsa de estudos integral na faculdade da cidade para um de seus alunos.
Qual é a probabilidade de uma aluna ganhar esse sorteio?

A) $\frac{600}{320}$

B) $\frac{320}{280}$

C) $\frac{280}{320}$

D) $\frac{280}{600}$

E) $\frac{320}{600}$

Atividade 2

(M120513A8) Suzana comprou uma caixa de bombons que continha: 6 bombons de cereja, 9 de abacaxi e 15 de morango.
A probabilidade de Suzana retirar um bombom dessa caixa, sem olhar, e esse ser de morango é

A) $\frac{1}{30}$

B) $\frac{1}{15}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{3}{10}$

E) $\frac{1}{2}$

Atividade 3

(M11211MG) D. Selma fez 100 empadinhas para servir no aniversário de Laura. Atendendo ao pedido de Laura, ela fez 60 empadinhas de frango e 40 de camarão. Por pressa e confusão de última hora, ficaram sem marcas de diferenciação. Foram colocadas ao acaso, numa bandeja, para serem servidas. Qual a probabilidade de um convidado da festa retirar da bandeja uma empadinha de frango?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{1}{60}$

E) $\frac{1}{100}$

Atividade 4

(M120605ES) Uma lata de biscoitos tem 15 biscoitos de chocolate e 27 sem chocolate. Inês tirou um biscoito da lata e comeu-o. Depois de ter comido o primeiro biscoito, Inês tirou outro.
Qual é a probabilidade de esse segundo biscoito ser de chocolate se o primeiro que ela comeu também era de chocolate?

A) $\frac{14}{15}$

B) $\frac{14}{27}$

C) $\frac{15}{41}$

D) $\frac{15}{42}$

E) $\frac{14}{41}$

Atividade 5

(M120150A9) Jane virou todas as 28 peças de seu jogo de dominó com a face para baixo e embaralhou bem.
Se Jane retirar uma peça, qual é a probabilidade de obter a soma dos pontos igual a 6?

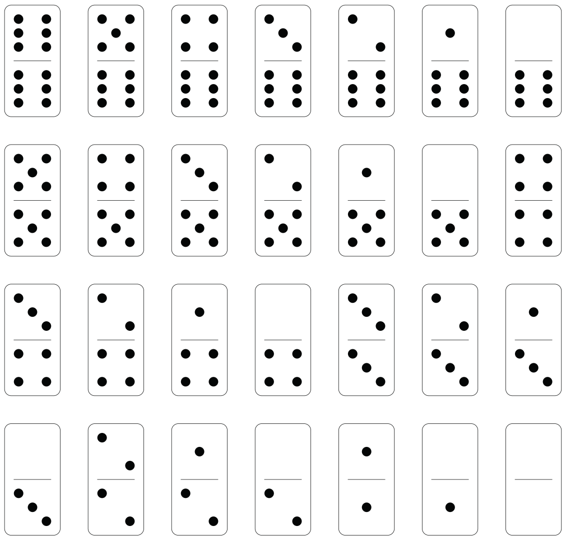
A) $\frac{3}{14}$

B) $\frac{3}{17}$

C) $\frac{1}{7}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{2}{3}$



Atividade 6

(M120016PE) Em uma caixa colocam-se 10 quadrados, 15 triângulos e 15 círculos, todos de madeira. Maria retirou uma peça dessa caixa.
Qual a probabilidade de ela ter retirado um quadrado?

A) 10%
B) 20%
C) 25%
D) 30%
E) 40%

Atividade 7

(M120404ES) Uma caixa continha 4 bolas brancas, 3 bolas vermelhas e 2 bolas pretas. Dessa caixa foram retiradas duas bolas, uma após a outra, sem reposição.
Qual é a probabilidade de que se tenha retirado dessa caixa duas bolas brancas?

A) $\frac{16}{81}$

B) $\frac{12}{81}$

C) $\frac{12}{72}$

D) $\frac{16}{72}$

E) $\frac{7}{72}$

Atividade 8

(M120435A8) Retiram-se, ao acaso, sem reposição, duas peças de uma caixa contendo 4 peças normais e 3 defeituosas.
Qual é a probabilidade de essas duas peças retiradas serem defeituosas?

A) $\frac{1}{7}$

B) $\frac{2}{7}$

C) $\frac{3}{7}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{2}{3}$

Atividade 9

(M11368SI) Uma urna contém duas bolas amarelas, três bolas brancas e cinco bolas cinzas. Marina vai retirar dessa urna, simultaneamente, duas dessas bolas.
Qual é a probabilidade de Marina retirar duas bolas brancas?

A) $\frac{1}{15}$

B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{47}{90}$

Atividade 10

(M120382A9) O time de vôlei de uma cidade vai fazer uma seleção para escolher um jogador que irá juntar-se à equipe para disputar um campeonato. No dia do teste, apareceram 24 meninos da própria cidade e 12 meninos de outras cidades vizinhas.
Qual é a probabilidade do escolhido ser das cidades vizinhas?

A) $\frac{1}{36}$

B) $\frac{1}{12}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{2}{3}$

Atividade 11

(M120088A9) Em um grupo de jovens, 6 farão vestibular para Medicina, 5 para Engenharia, 2 para Odontologia, 7 para História, e 10 para Matemática. Um desses jovens será sorteado para fazer, gratuitamente, uma preparação em um curso extensivo.
A probabilidade de o jovem sorteado ser um que fará vestibular para Matemática é

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{7}{30}$

D) $\frac{1}{10}$

E) $\frac{1}{30}$

Atividade 12

(M11461SI) No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, qual a probabilidade de que a face voltada para cima seja 2 ou 3?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{30}$

E) $\frac{1}{36}$

GABARITO

ATIVIDADE 1:E
ATIVIDADE 2:E
ATIVIDADE 3:C
ATIVIDADE 4: E
ATIVIDADE 5: C
ATIVIDADE 6: C
ATIVIDADE 7: C
ATIVIDADE 8: A
ATIVIDADE 9: A
ATIVIDADE 10: C
ATIVIDADE 11: B
ATIVIDADE 12: A

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Khan Academy. Disponível em: www.khanacademy.org. Acessado em: 28 mar 2024.