

Matemática

2ª Série | Ensino Médio

15ª Semana



Equação Exponencial e representação algébrica da Função Exponencial (continuação).



DESCRITORES DO PAEBES	D074_M - Corresponder as representações algébrica e gráfica de uma função exponencial.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	EM13MAT304 - Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	EF08MA02 - Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



No material da 12ª semana, realizamos um estudo inicial sobre equações e funções exponenciais. No presente material, seguimos com exercícios para aprofundar o estudo das equações exponenciais e apresentamos variações de funções exponenciais. A ideia é trabalhar a representação algébrica das funções exponenciais, com foco na relação entre elemento do domínio e sua respectiva imagem.

Uma função exponencial é caracterizada por um comportamento distinto que aumenta ou diminui rapidamente, dependendo do valor da base da exponencial. Se a base da função exponencial for maior que 1, a função será crescente. Isso reflete um aumento rápido, que pode modelar, por exemplo, o crescimento populacional ou a propagação de uma doença infecciosa.

Por outro lado, se a base da função exponencial for um número real maior que zero e menor que 1, a função será decrescente. Isso pode modelar um processo de decaimento, como a depreciação de um carro ou de decaimento radioativo.

Entender esses comportamentos, permite melhor compreensão de várias áreas de conhecimento. As funções exponenciais possuem aplicações nas ciências, na economia, engenharia, computação etc.

Bons estudos!

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS - EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Determine o valor de x nas equações abaixo:

a) $5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

Observe que todo número elevado a zero é igual a 1

b) $10^x = 0,1 \Rightarrow 10^x = \left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow 10^x = 10^{-1} \Rightarrow x = -1$

Lembre-se que podemos escrever 0,1 como uma fração $\frac{1}{10}$

c) $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow 2^{x+1} \cdot (2^2)^{x-1} = (32)^{-1} \Rightarrow 2^{x+1} \cdot 2^{2x-2} = 2^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{3x-1} = 2^5 \Rightarrow 3x - 1 = 5 \Rightarrow 3x = 5 + 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

Ao aplicar a propriedade da potência para expoente negativos podemos reescrever a base.

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{125}{8} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{5^3}{2^3} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -3$

2 Para qual valor de x satisfaz a equação: $3^{x-1} \cdot 3^{x-2} = \frac{1}{81}$

$3^{x-1} \cdot 3^{x-2} = \frac{1}{81}$

Lembre-se que na multiplicação de potências de mesma base podemos somar os expoentes

$$3^{x-1+x-2} = 3^{-4}$$

$$2x - 3 = -4$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FUNÇÕES OBTIDAS A PARTIR DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vimos que uma função exponencial é do tipo $f(x) = a^x$.

Há funções que podem ser obtidas a partir de uma função exponencial e que são tratadas como tal devido às suas semelhanças. Nos exemplos a seguir, b é um número real.

EXEMPLO 1:

- $f(x) = a^x + b$

EXEMPLO 2:

- $f(x) = b \cdot a^x$

EXEMPLO 3:

- $f(x) = a^{x+b}$

EXEMPLO 4:

- $f(x) = a^{b \cdot x}$

Os exercícios resolvidos a seguir apresentam situações envolvendo funções exponenciais nas quais dado um elemento do domínio deseja-se determinar sua imagem e vice-versa. Os últimos exercícios resolvidos desta seção apresentam aplicação desses conhecimentos na resolução de situações-problema.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de lei $f(x) = 2^x + 1$. Determine:

a) $f(1)$

b) $f(-3)$

c) x quando $f(x) = 17$

Resolução:

a) $f(1) = 2^1 + 1 \Rightarrow f(1) = 2 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$

b) $f(-3) = 2^{-3} + 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{8} + 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{8} + \frac{8}{8} \Rightarrow f(1) = \frac{9}{8}$

c) $f(x) = 2^x + 1 \Rightarrow 17 = 2^x + 1$

$$16 = 2^x$$

$$2^4 = 2^x$$

$$4 = x$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de lei $f(x) = 5 \cdot 3^x$. Determine:

- a) $f(0)$
- b) $f(4)$
- c) x quando $f(x) = \frac{5}{9}$

Resolução:

a) $f(0) = 5 \cdot 3^0 \Rightarrow f(0) = 5 \cdot 1 \Rightarrow f(0) = 5$

b) $f(4) = 5 \cdot 3^4 \Rightarrow f(4) = 5 \cdot 81 \Rightarrow f(4) = 405$

c) $f(x) = 5 \cdot 3^x \Rightarrow \frac{5}{9} = 5 \cdot 3^x \Rightarrow \frac{5}{9} \div 5 = 3^x \Rightarrow \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{5} = 3^x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{\cancel{5}}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} = 3^x \Rightarrow \frac{1}{9} = 3^x \Rightarrow 3^{-2} = 3^x \Rightarrow -2 = x$

3 Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de lei $f(x) = 9^{x+1}$. Determine:

- a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- b) $f(-5)$
- c) x quando $f(x) = 1$

Resolução:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 9^{\frac{1}{2}+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 9^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 9^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[2]{9^3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{729} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 27$

b) $f(-5) = 9^{-5+1} \Rightarrow f(-5) = 9^{-4} \Rightarrow f(-5) = \left(\frac{1}{9}\right)^4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(-5) = \frac{1}{6561}$

c) $f(x) = 9^{x+1} \Rightarrow 1 = 9^{x+1} \Rightarrow 9^0 = 9^{x+1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 = x + 1 \Rightarrow 0 - 1 = x \Rightarrow -1 = x$

4 Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de lei $f(x) = 7^{4x}$. Determine:

- a) $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- b) x quando $f(x) = \sqrt{7}$

Resolução:

a) $f\left(\frac{1}{4}\right) = 7^{4 \cdot \frac{1}{4}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 7^1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 7$

b) $f(x) = 7^{4x} \Rightarrow \sqrt{7} = 7^{4x} \Rightarrow 7^{\frac{1}{2}} = 7^{4x} \Rightarrow \frac{1}{2} = 4x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \div 4 = x \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = x \Rightarrow \frac{1}{8} = x$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 (Contemax — Prefeitura de Coremas) Em uma certa empresa do Nordeste responsável por certo tipo de pesquisas, constatou-se que a população (P) de um determinado tipo de bactéria cresce segundo a expressão $P(t) = 25 \cdot 2^t$, onde t representa o tempo em horas. Para atingir uma população de 200 bactérias, será necessário um tempo de:

- A) 1 hora.
- B) 1 hora e 30 minutos.
- C) 3 horas.
- D) 4 horas e 30 minutos.
- E) 5 horas.

Resolução:

Temos que $P(t) = 200$. Substituindo na equação, temos que:

$$\begin{aligned}P(t) &= 25 \cdot 2^t \\200 &= 25 \cdot 2^t \\ \frac{200}{25} &= 2^t \\8 &= 2^t\end{aligned}$$

Sabemos que $2^3 = 2^t$
 $2^3 = 2^t$
 $t = 3$

Logo a resposta correta é a letra C) 3 horas.

6 Dada a função $f(x) = 2^{x+3} + 10$, o valor de x para que $f(x) = 42$ é de:

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6

Resolução:

Alternativa A

Dada a função $f(x) = 2^{x+3} + 10$, queremos encontrar o valor de x que faz com que $f(x) = 42$, para isso, igualamos a lei de formação da função a 42.

$$2^{x+3} + 10 = 42$$

$$2^{x+3} = 42 - 10$$

$$2^{x+3} = 32$$

Sabemos que $32 = 2^5$:

$$2^{x+3} = 2^5$$

$$x + 3 = 5$$

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7 Um botânico, encantado com o pau-brasil, dedicou-se, durante anos de estudos, a conseguir criar uma função exponencial que medisse o crescimento dessa árvore no decorrer do tempo. Sua conclusão foi que, ao plantar-se essa árvore, seu crescimento, no decorrer dos anos, é dado por $C(t) = 0,5 \cdot 2^{t-1}$. Analisando essa função, quanto tempo essa árvore leva para atingir a altura de 16 metros?

- A) 7 anos
- B) 6 anos
- C) 5 anos
- D) 4 anos
- E) 3 anos

Resolução:

Alternativa B

Queremos encontrar o valor de t que faz com que $C(t) = 16$, então, temos que:

$$0,5 \cdot 2^{t-1} = 16$$

$$2^{t-1} = \frac{16}{0,5}$$

$$2^{t-1} = 32$$

$$2^{t-1} = 2^5$$

$$t - 1 = 5$$

$$t = 5 + 1$$

$$t = 6$$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

Resolva as equações:

a) $2^x = 16$

b) $5^x = 125$

c) $9^{2x-3} = 27^x$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-5} = \frac{8}{27}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+3} = 9$

Atividade 2

Resolva a equação $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

Atividade 3

Determine o conjunto solução, em \mathbb{R} , da equação: $(0,4)^{3x-1} = 1$

Atividade 4

Para qual valor de x é válida a equação a seguir? $5^{x-1} \cdot 5^{x-2} = \frac{1}{625}$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

Seja uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3^{x-5x-3}$. Determine o valor de x tal que $f(x) = 27$.

Atividade 6

Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$, determine:

a) $f(2)$.

b) $f(-2)$.

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Atividade 7

Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = 3^x$, determine:

a) $f(0)$.

b) $f(-1)$.

c) $f(0,5)$.

Atividade 8

Seja a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = 0,1^x$, determine o valor x , para a imagem:

a) $f(x) = 10$

b) $f(x) = 100$

Atividade 9

Um grupo de biólogos está estudando o desenvolvimento de uma determinada colônia de bactérias e descobriu que sob condições ideais, o número de bactérias pode ser encontrado através da expressão $N(t) = 2000 \cdot 2^{0,5t}$, sendo t em horas.

Considerando essas condições, quanto tempo após o início da observação, o número de bactérias será igual a 8.192.000?

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

a) $x = 4$ b) $x = 3$ c) $x = 6$ d) $x = \frac{8}{3}$ e) $x = 5$

Atividade 2

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$$
$$4x - 2 = 3x - 3$$
$$x = -1$$

Atividade 3

$$(0,4)^{3x-1} = 1$$
$$(0,4)^{3x-1} = (0,4)^0$$
$$3x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Atividade 4

$$5^{2x-3} = 5^{-4}$$
$$2x - 3 = -4$$
$$2x = -1$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Atividade 5

$$3^{x-5x-3} = 27$$
$$3^{x-5x-3} = 3^3$$
$$x - 5x - 3 = 3$$
$$-4x = 6$$
$$x = -\frac{6}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Atividade 6

a) $f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2$ b) $f(-2) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

$f(2) = \left(\frac{1}{81}\right)$ $f(-2) = (81)$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{9}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$

Atividade 7

a) $f(0) = 3^0$ b) $f(-1) = 3^{-1}$ c) $f(0,5) = 3^{\frac{1}{2}}$

$f(0) = 1$ $f(-1) = \frac{1}{3}$ $f(0,5) = \sqrt{3}$

Atividade 8

a) $10 = 0,1^x$ b) $100 = 0,1^x$

$10 = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ $100 = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

$10^1 = (10)^{-x}$ $10^2 = (10)^{-x}$

$x = -1$ $x = -2$

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 9

Para a função $N(t) = 2000 \cdot 2^{0,5t}$

$$\text{Temos: } 8192000 = 2000 \cdot 2^{0,5t} \Rightarrow 2^{0,5t} = \frac{8192000}{2000} \Rightarrow 2^{0,5t} = 4096$$

Podemos escrever 4096 como potência de base 2, então:

$$2^{0,5t} = 4096 \Rightarrow 2^{0,5t} = 2^{12} \Rightarrow 0,5t = 12 \Rightarrow t = \frac{12}{0,5} \Rightarrow t = 24$$

REFERÊNCIAS

<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcao-exponencial.htm> acessado em: 08 abr2024

<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/30226/1/interdisciplinaridadeotimizacaofuncao.pdf> acessado em: 21 abr 2024

<https://www.somatematica.com.br/emedio.php> acessado em 21 abr 2024

<https://cdnportaldaoobmep.impa.br/portaldaoobmep/uploads/material/pkywpm4bzko8.pdf> Acessado em: 21 abr 2024

<https://www.todamateria.com.br/funcao-exponencial-exercicios/> acessado em 24 abr 2024

<https://br.pinterest.com/pin/609041549612095811/> acessado em 24 abr 2024

<https://portaldaoobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=94> acessado em 24 abr 2024