Matemática

2ª Série | Ensino Médio

16ª Semana

Conhecendo as representações algébrica e gráfica de uma função exponencial.

DESCRITORES DO PAEBES	**D074_M -** Corresponder as representações algébrica e gráfica de uma função exponencial.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT304 -** Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF09MA06** - Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

Nas aulas anteriores, mergulhamos no universo das equações e funções exponenciais. Estudamos conceitos para entender padrões de crescimento e decrescimento exponencial, com alguns exemplos de aplicação. Agora, nosso foco se volta para o gráfico da função exponencial.

O gráfico da função exponencial é notável por sua curva distinta que ascende ou descende rapidamente, dependendo da base da exponencial. Se a base for maior que 1, o gráfico é crescente, refletindo um aumento rápido. Por outro lado, se a base for maior que zero e menor que 1, o gráfico é decrescente, indicando um processo de decaimento.

Essa característica do gráfico exponencial é vista em muitas situações cotidianas. Por exemplo, no mundo das finanças, o conceito de juros compostos segue um padrão exponencial. Quando você investe dinheiro a juros compostos, o valor cresce ao longo do tempo devido ao reinvestimento dos juros ganhos, um fenômeno que reflete um gráfico exponencial crescente.

O gráfico da função exponencial é uma representação visual de muitos fenômenos ao nosso redor. Seja em finanças, biologia, medicina, tecnologia ou física, entender esse gráfico é importante para interpretar e antecipar comportamentos e tendências. Ele é uma ferramenta poderosa que nos ajuda a navegar pelo mundo complexo e em constante mudança em que vivemos.

Bons estudos!

FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função exponencial ocorre quando, em sua lei de formação, a variável está no expoente, com domínio e contradomínio nos números reais. O domínio da função exponencial são os números reais, e o contradomínio são os números reais positivos diferentes de zero. A sua lei de formação pode ser descrita por $f(x) = a^x$, em que a é um número real positivo diferente de 1.

Em uma função exponencial de lei $f(x) = a^x$, a base **a** deve ser positiva e diferente de 1, pois:

- Se a = 1, então f é uma função constante igual a 1.
- Se a = 0 e $x \leqslant 0$, então a^x não está definida; portanto, f também não está.
- Se a = 0 e $x > 0$, então f é uma função constante igual a 0.
- Se a < 0, então f não está definida para todo x real.

O gráfico de uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x$ sempre estará no primeiro e segundo quadrantes do plano cartesiano, podendo ser crescente, quando a for um número maior do que 1, ou decrescente, quando a for um número positivo menor do que 1.

Exemplos de funções exponenciais:

$$f(x) = 3^x$$
$$f(x) = (0,5)^x$$
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Na lei de formação, f(x) pode ser descrito também como y e, assim como nas demais funções, ele é conhecido como variável dependente, porque seu valor depende de x, que é conhecido como variável independente.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

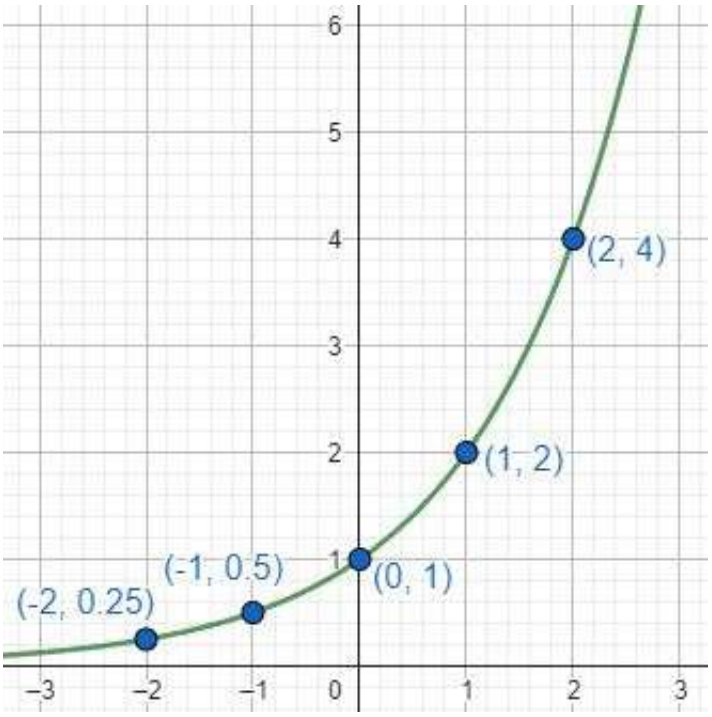
- Gráficos de Funções Exponenciais do tipo $f(x) = a^x$

Veja os seguintes exemplos:

Crescente

$f(x) = 2^x$ (nesse caso, a = 2, logo a > 1)
Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de f(x) ou y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

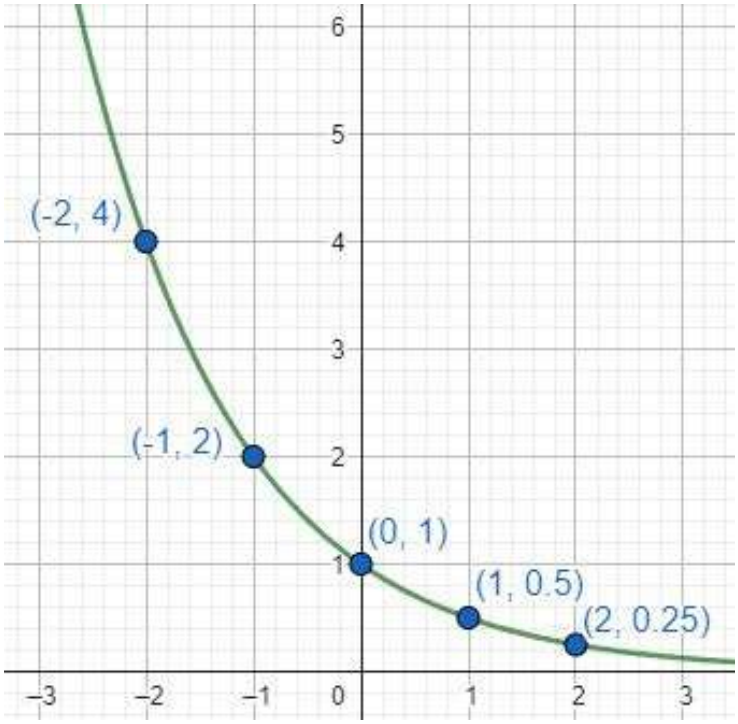
X	**-2**	-1	**0**	1	**2**
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



Decrescente

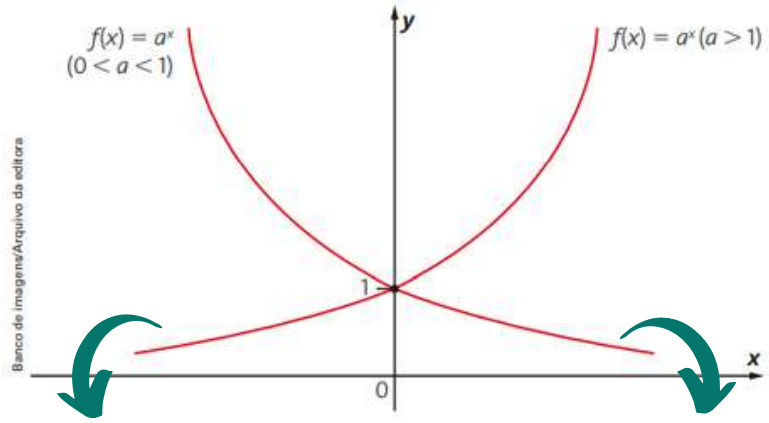
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (nesse caso, a= $\frac{1}{2}$, logo 0 < a < 1)
Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de f(x) ou y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

X	**-2**	-1	**0**	1	**2**
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Nos dois exemplos, podemos observar que:
a) o gráfico não intercepta o eixo horizontal, ou seja, a função não tem raízes;
b) o gráfico corta o eixo vertical no ponto (0,1);
c) os valores de f(x) ou y são sempre positivos (potência de base positiva é positiva), portanto o conjunto imagem é Im=IR+.

Generalizando, para as funções exponenciais do tipo $f(x) = a^x$ temos:



f(x) é crescente e Im=IR⁺
Para quaisquer x_1 e x_2 do domínio:
$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1$ (as desigualdades têm mesmo sentido)

f(x) é decrescente e Im=IR⁺
Para quaisquer x_1 e x_2 do domínio:
$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$ (as desigualdades têm sentidos diferentes)

Propriedades da função exponencial do tipo $f(x) = a^x$

1ª propriedade

Em uma função exponencial desse tipo, f(0) = 1. Essa propriedade não passa de uma consequência das propriedades de potência, já que a base de todo número diferente de 0 elevado a 0 é igual a 1.

$$f(0) = a^0 = 1$$

2ª propriedade

A função exponencial é injetiva. Isso significa que, para valores diferentes de x, a imagem também será diferente, ou seja, f(x1) ≠ f(x2) com x1 ≠ x2. Ser injetiva significa que, para cada valor de y, existirá um único valor de x tal que f(x) = y.

3ª propriedade

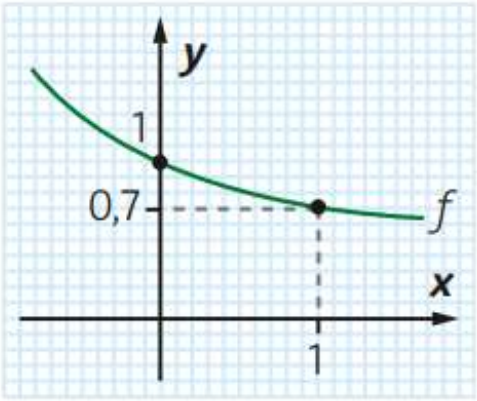
O gráfico da função exponencial pode ser crescente, se a base for maior que 1 (a >1), e decrescente, caso a base seja um número menor que 1 e maior que 0 (0<a<1).

4ª propriedade

O gráfico desse tipo de função exponencial não corta o eixo x. Por menor que seja o valor da imagem, ele nunca chegará a ser 0. Dizemos que ele tende a 0, mas não existe valor de x que faça com que f(x) = 0. Então, há uma assíntota horizontal em y=0.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 O gráfico a seguir representa uma função exponencial do tipo $f(x) = a^x$. Determine a lei de formação dessa função.



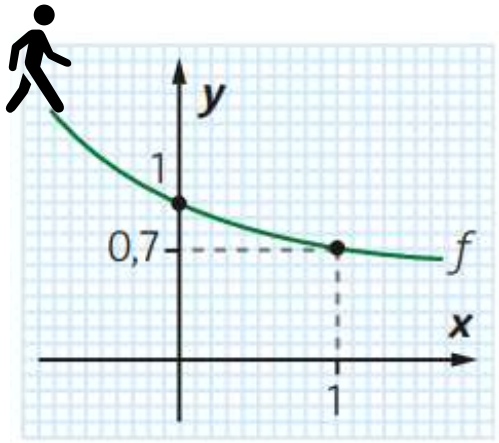
1ª observação:
A curva exponencial intercepta o eixo y em (0,1).

2ª observação:
Para x = 1, temos y = 0,7.
Considere a lei da função $f(x)=a^x$
Substituindo x = 1, temos
$0,7 = a^1$
a = 0,7
Logo, temos a lei de formação $f(x) = a^x$ = **$f(x) = 0,7^x$**

Podemos acrescentar uma terceira observação: essa função é crescente ou decrescente?

A base **a** é 0,7, ou seja, temos **0 < a < 1** (função decrescente).
Conferindo no gráfico, de fato, temos uma função decrescente, pois $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

Uma técnica usada pelos alunos para classificar uma função exponencial como crescente ou decrescente, é acompanhar a curva exponencial.



Sempre começando da esquerda para a direita conforme orientação dada pelo eixo x, imaginando uma pessoa andando sobre a curva exponencial, percebemos que essa pessoa irá descer. Temos, então, uma função decrescente.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FUNÇÕES OBTIDAS A PARTIR DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vimos que uma função exponencial é do tipo $f(x) = a^x$.

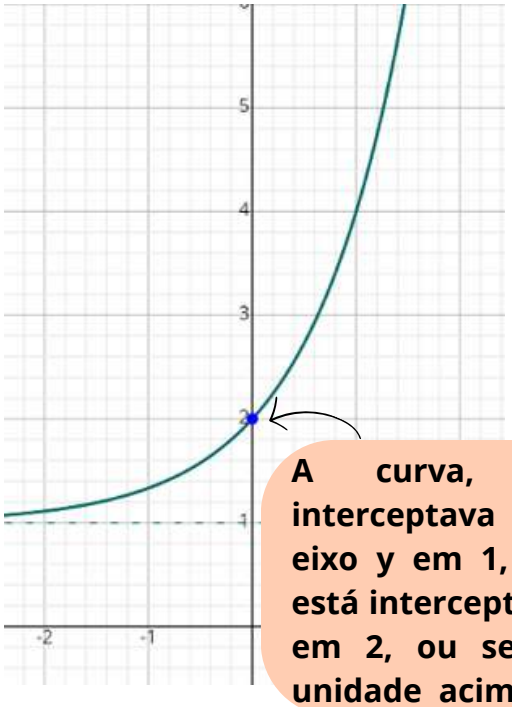
Há funções que podem ser obtidas a partir de uma função exponencial e que são tratadas como tal devido à sua semelhança gráfica.

EXEMPLO 1:

- $f(x) = a^x + b$

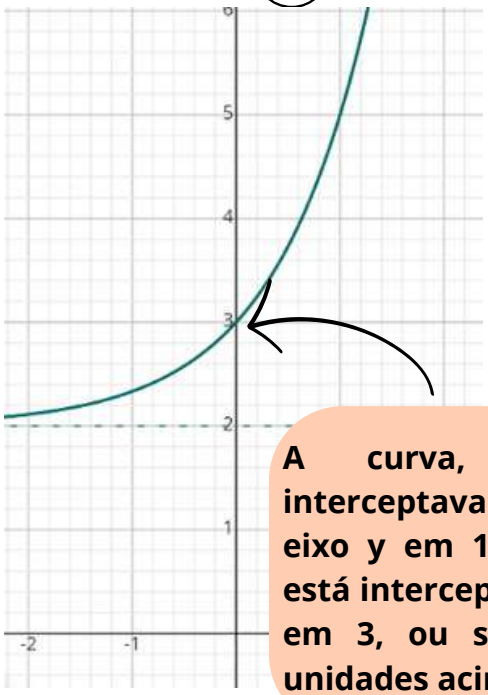
O que acontece quando acrescentamos + b?

$f(x) = 3^x + 1$



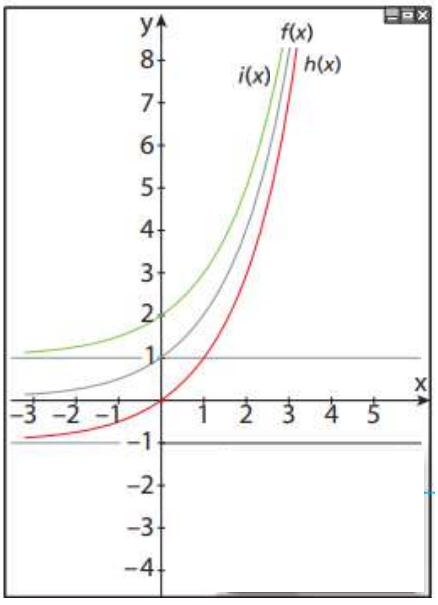
A curva, que interceptava o eixo y em 1, aqui está interceptando em 2, ou seja, 1 unidade acima.

$f(x) = 3^x + 2$



A curva, que interceptava o eixo y em 1, aqui está interceptando em 3, ou seja, 2 unidades acima.

Vamos comparar 3 funções no mesmo plano cartesiano:



$f(x) = 2^x$, $i(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = 2^x - 1$.

Note que:

- o gráfico da função $i(x) = 2^x + 1$ é o gráfico da função f transladado 1 unidade para cima;
- o gráfico da função $h(x) = 2^x - 1$ é o gráfico da função f transladado 1 unidade para baixo.

Observe que o gráfico da função h passa pela origem do plano cartesiano, no ponto (0,0), o domínio de h é $D(h) = \mathbb{R}$ e seu conjunto imagem é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} / \ y > -1\}$.

A assíntota do gráfico de h é a reta y = -1.

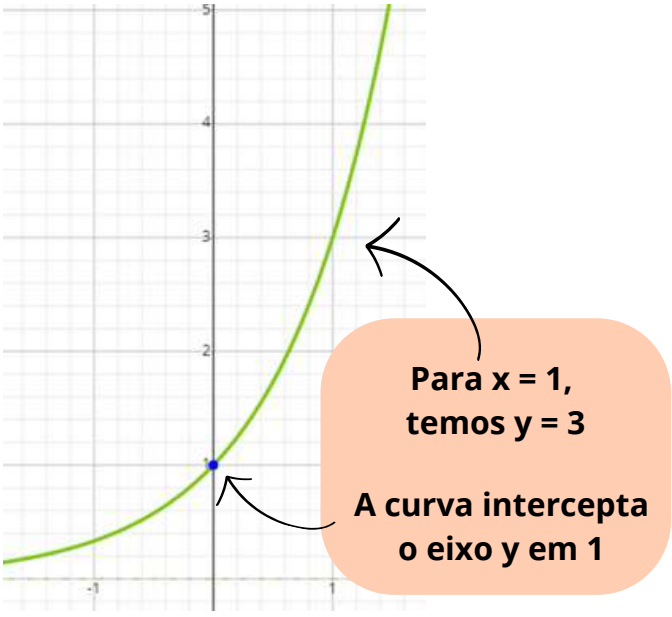
EXEMPLO 2:

- $f(x) = b \cdot a^x$

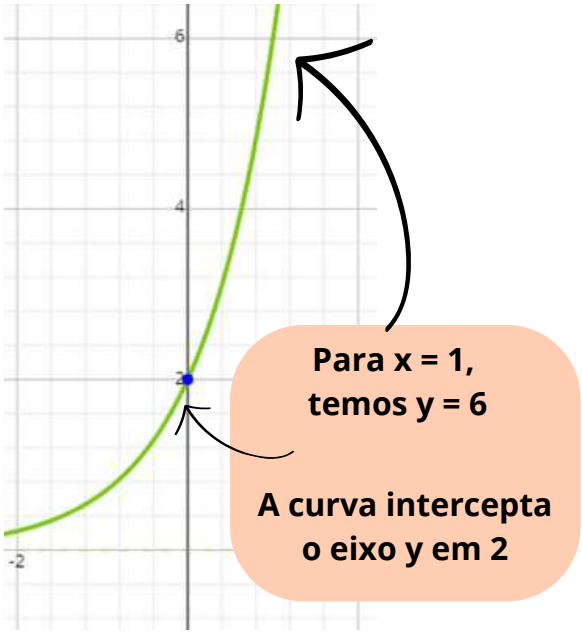
$f(x) = 2 \cdot 3^x$

O que acontece quando acrescentamos o fator b?

$g(x) = 3^x$



$f(x) = 2 \cdot 3^x$



Comparando g(x) com f(x), percebemos que, ao acrescentar uma **multiplicação por 2** à lei da função, o ponto em y na ordenada também foi **multiplicado por 2.** Estava em y = 1 e passou a estar em y = 2 (1x2).
O valor de y para x = 1 também foi **multiplicado por 2.** Em g(x), para x = 1, temos y=3, enquanto em f(x), para x = 1, temos y = 6 (2x3).
Assim, o parâmetro b indica por quanto será multiplicado o valor de y na ordenada e o valor de y para x = 1.

Determinando a lei da função a partir do gráfico

Dado o gráfico, como determinar a lei da função do tipo $f(x) = a^x . b$?
Primeiramente escolheremos dois pontos desse gráfico.
Como exemplo, vamos escolher os pontos (0,2) e (1,6) e substituir na função genérica.

Em (0,2) temos x = 0 e y = 2

$y = b \cdot a^x$

$2 = b \cdot a^0$

$2 = b \cdot 1$

b = 2

Em (1,6) temos x = 1 e y = 6 e vimos que b = 2

$y = b \cdot a^x$

$6 = 2 \cdot a^1$

$6 = 2 \cdot a$

$a = \frac{6}{2}$

a = 3

Substituindo a = 3 e b = 2 na função genérica, temos
$f(x) = b \cdot a^x$
$f(x) = 2 \cdot 3^x$, que é a nossa lei da função.

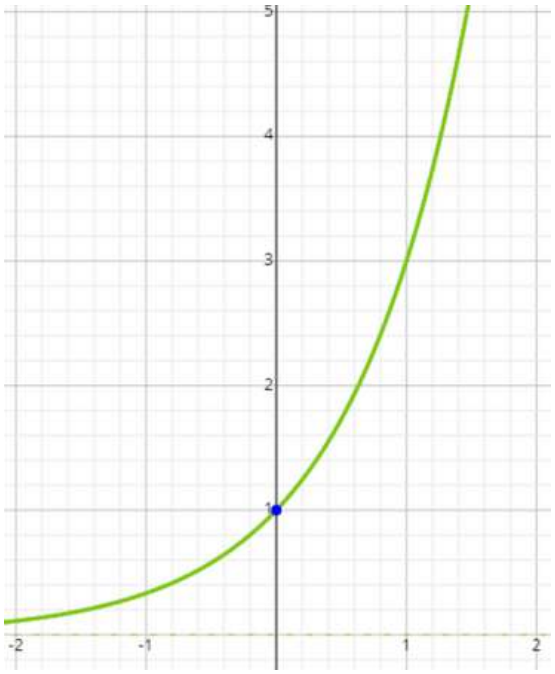
EXEMPLO 3:

- $f(x) = -a^x$

Podemos representar a função $f(x) = - a^x$ como $f(x) = -1 \cdot a^x$

Desta forma podemos seguir o pensamento do exemplo 2. No entanto, agora temos um número negativo no parâmetro, o que vai implicar numa alteração no gráfico.

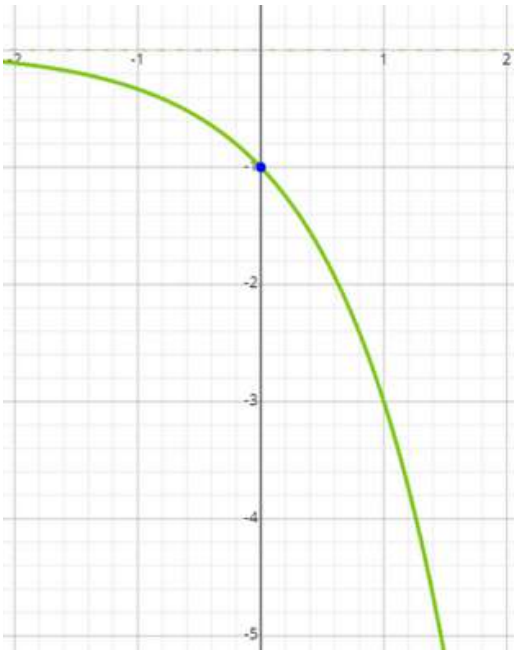
$g(x) = 3^x$



A curva intercepta o eixo y em 1

Para x = 1, y = 3

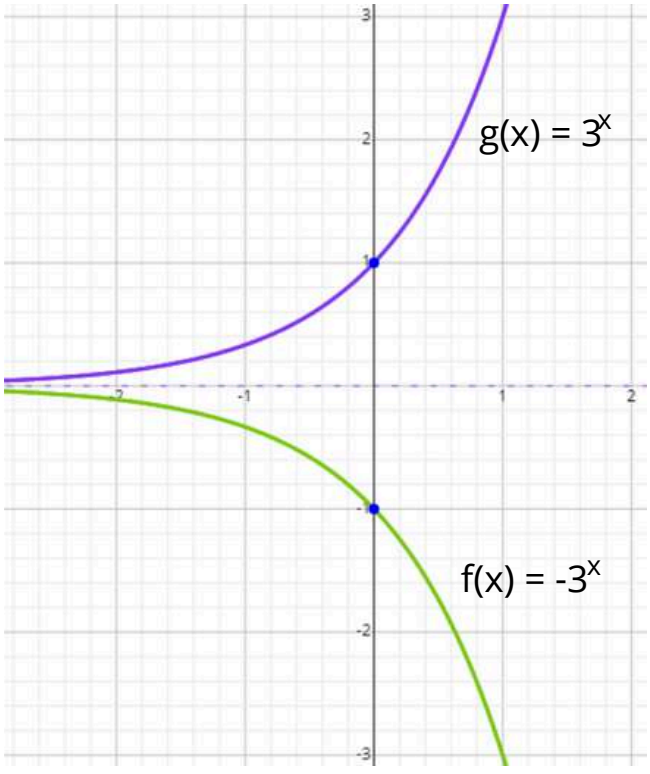
$f(x) = -3^x$



A curva intercepta o eixo y em -1

Para x = 1, y = -3

Vamos colocar as duas curvas no mesmo plano cartesiano.



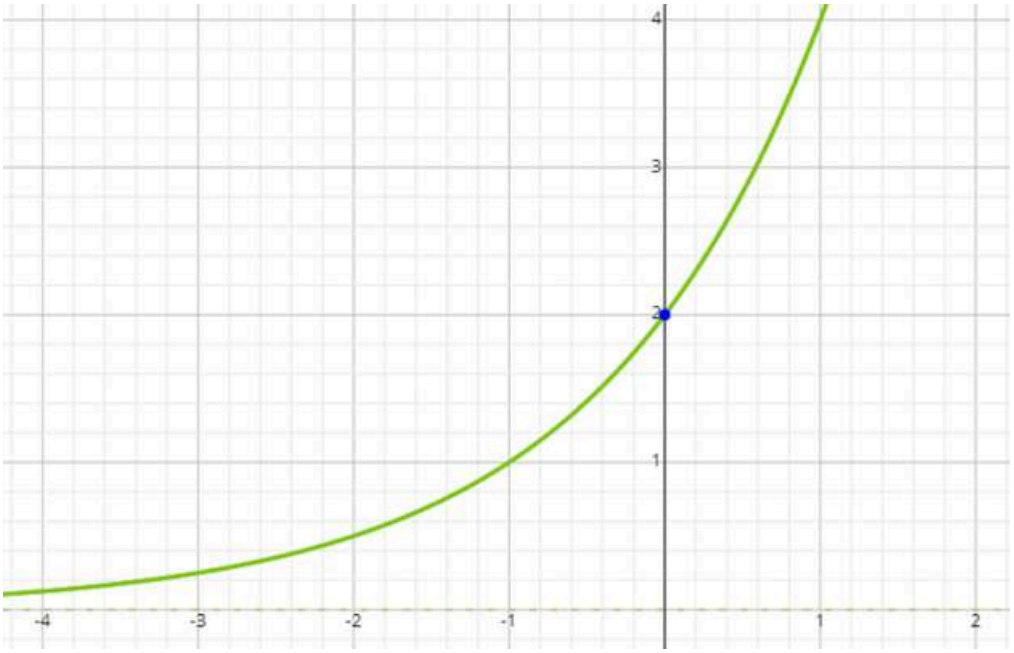
Observe que a função g(x) sofreu uma reflexão em relação à horizontal.

Uma função do tipo $f(x) = -a^x$ terá uma reflexão em relação à horizontal da função $g(x) = a^x$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ASSÍNTOTA DA FUNÇÃO

Observe o gráfico abaixo:

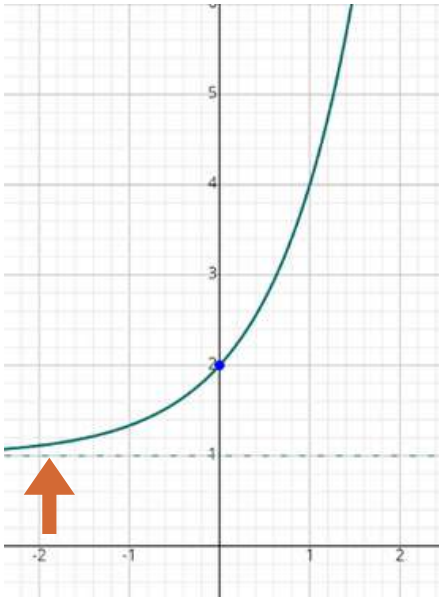


A curva intercepta o eixo y em 2.
Para x = 1, y = 4.

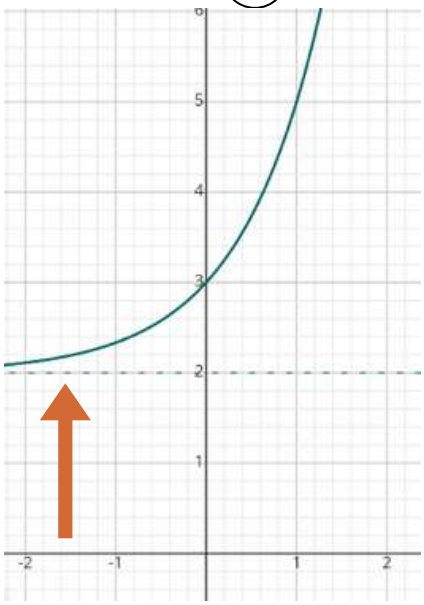
Como determinar a lei dessa função?
Se pensarmos no exemplo 1, teremos uma função do tipo $f(x) = a^x + b$
Se pensarmos no exemplo 2, teremos uma função do tipo $f(x) = b \cdot a^x$

Como diferenciar o exemplo 1 do exemplo 2?
A dica está na assíntota.
Vamos retomar as funções vistas e seus gráficos a seguir:

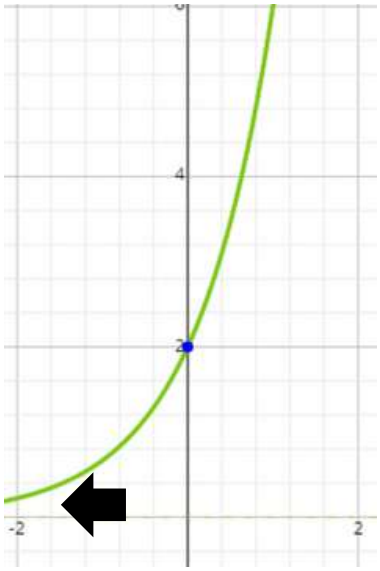
$f(x) = 3^x + 1$



$f(x) = 3^x + 2$



Observe que ao somar 1, temos assíntota y = 1, assim como ao somar 2, temos assíntota y = 2, ou seja, o gráfico foi transladado 1 e 2 casas, respectivamente.



$f(x) = 2 . 3^x$

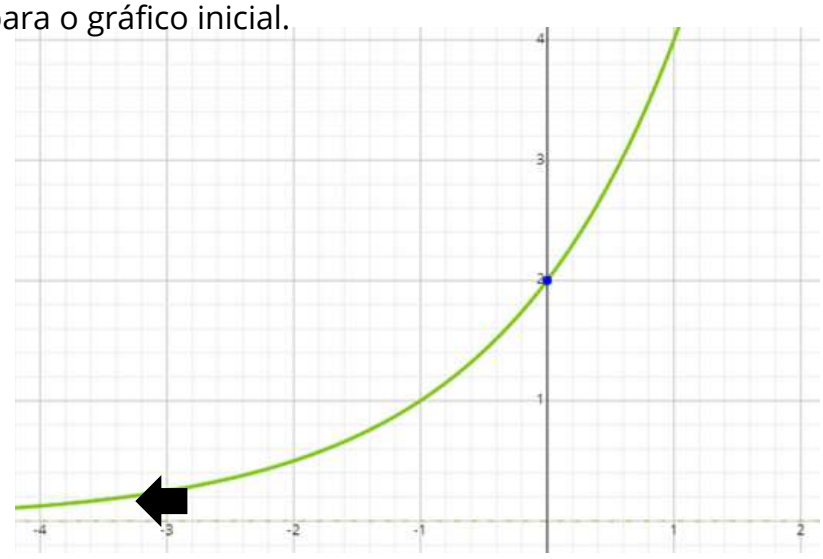
Observe que, mesmo multiplicando por 2, o gráfico não foi transladado para cima, nem para baixo, permanecendo próximo ao eixo x.

Assim, quando analisamos a assíntota, conseguimos determinar que a função do tipo

$f(x) = a^x + b$ tem assíntota em $y = b$.

$f(x) = b . a^x$ o gráfico permanece com referência ao eixo x.

Vamos voltar para o gráfico inicial.



Já sabemos que a curva intercepta o eixo y em 2, ao invés de 1.
Agora precisamos saber se o ponto em que y = 1 foi somado com 1 ou multiplicado por 2, ou seja, saber se a função é do tipo $f(x) = a^x + b$ ou $f(x) = b . a^x$
Ao observar que o gráfico da função não foi transladado em 1 unidade para cima, concluímos que se trata da função do tipo $f(x) = b . a^x$

Como no exemplo 2, podemos determinar a lei da função:
Escolhendo dois pontos do gráfico, temos (0,2) e (1,4).

Em (0,2) temos x = 0 e y = 2

$y = b . a^x$

$2 = b . a^0$

$2 = b . 1$

b = 2

Em (1,4) temos x = 1 e y = 4 e vimos que b = 2

$y = b . a^x$

$4 = 2 . a^1$

$4 = 2 . a$

$a = \frac{4}{2}$

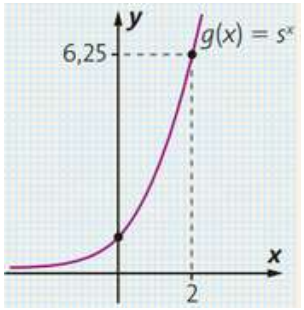
a = 2

Substituindo a = 2 e b = 2, temos **$y = 2 . 2^x$**, que é a nossa lei da função.

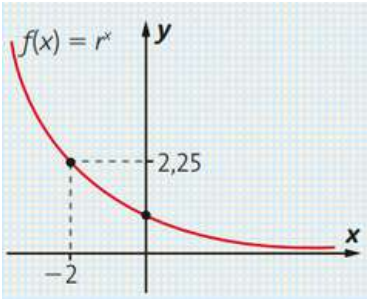
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Classifique as funções representadas pelos gráficos a seguir como crescente ou decrescente.

a)



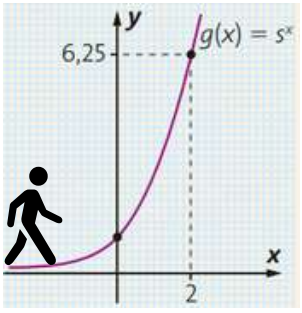
b)

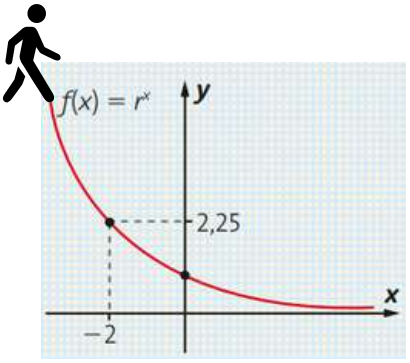


Resolução:

a) Função crescente, pois $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x1} > a^{x2}$

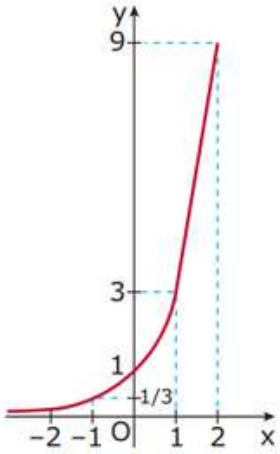
b) Função decrescente, pois $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x1} < a^{x2}$





Utilizando a técnica dos alunos, na opção (A) a pessoa subirá, então, função crescente. Na opção (B) a pessoa descerá, função decrescente.

2 Determine a lei de formação da função exponencial representada pelo gráfico abaixo.

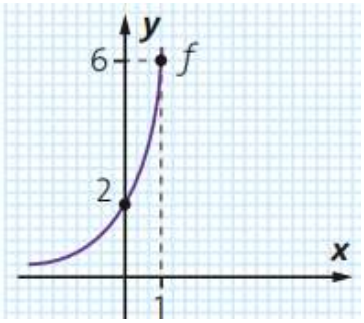


Resolução:
1º passo:
Confira que a curva exponencial intercepta o eixo y em 1.

2º passo:
Para x = 1, temos y = 3.
Logo, temos a lei de formação

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Determine a lei de formação da função do tipo $f(x) = b \cdot a^x$ representada no gráfico abaixo.



Resolução:
Uma função do tipo $f(x) = b \cdot a^x$ nos indica que temos uma função $b \cdot g(x) = a^x$

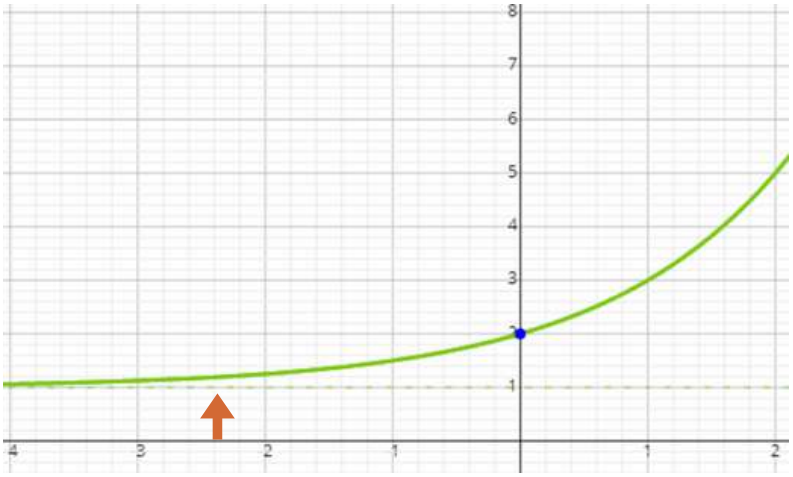
Confira que a curva intercepta o eixo y em 2, enquanto uma função do tipo $g(x) = a^x$ deveria interceptar em 1. Temos, então, b = 2.

Na função f(x), para x = 1 temos y = 6.
Como b = 2, concluímos que a = 3 ($2 \cdot 3$). Ou resolvendo algebricamente temos:

$$f(x) = 2 \cdot a^x \Rightarrow f(1) = 2 \cdot a^1 \Rightarrow 6 = 2 \cdot a \Rightarrow \frac{6}{2} = a \Rightarrow 3 = a$$

Assim, a lei da função é **$f(x) = 2 \cdot 3^x$**

4 Determine a lei de formação da função exponencial representada pelo gráfico abaixo.



Resolução:
Observe que a curva **não** intercepta o eixo y em 1, o que **não** nos faz pensar numa função exponencial do tipo $f(x) = a^x$

Essa função tem assíntota y = 1, então temos uma função do tipo $f(x) = a^x + 1$

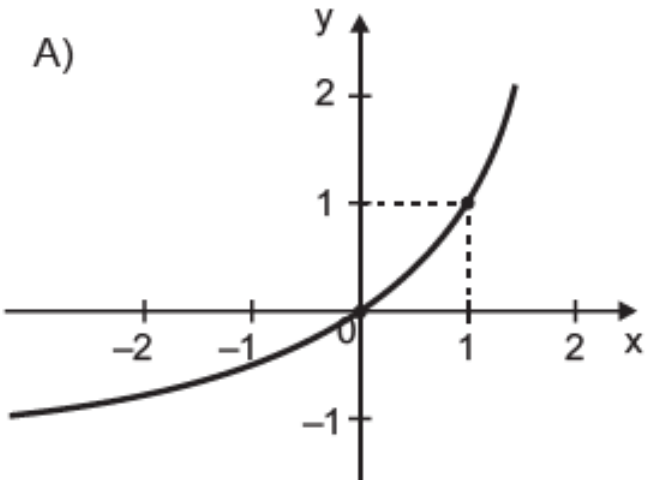
Para x = 1, temos y = 3, em que, se fosse uma função do tipo $f(x) = a^x$, a valeria 3. No entanto, como sabemos que o gráfico foi transladado 1 unidade para cima, sabemos que y = 3 também sofreu essa alteração de 1 unidade, o que nos faz concluir que o valor de **a = 2** (resultante de 3 - 1).

Portanto, a lei de função representada pelo gráfico é **$f(x) = 2^x + 1$**

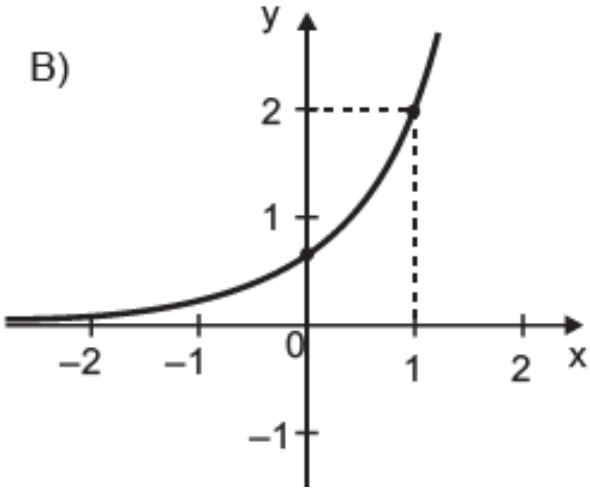
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 (SEAPE). O gráfico que representa a função exponencial definida por $f_{(x)} = 2^x - 1$ com x∈R, é

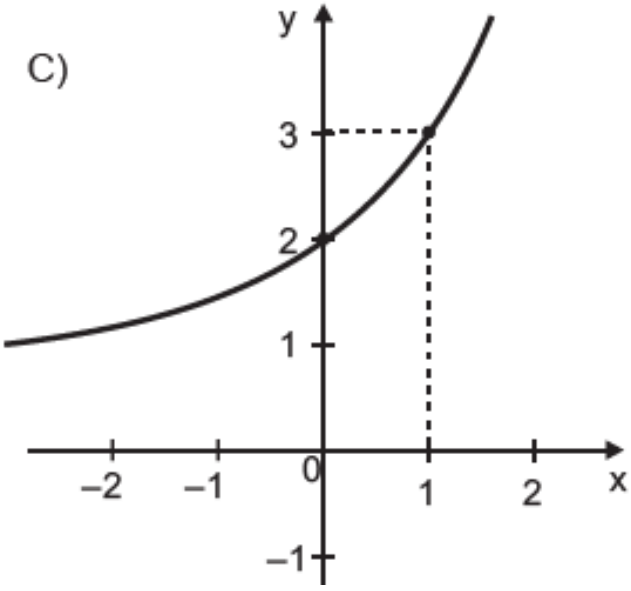
A)



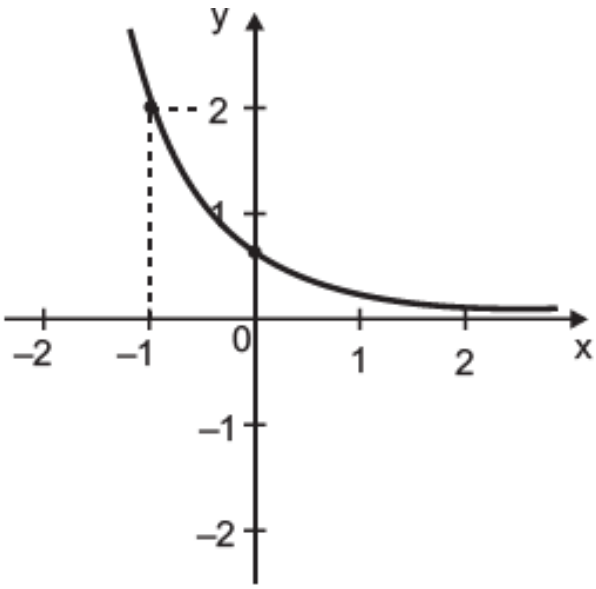
B)



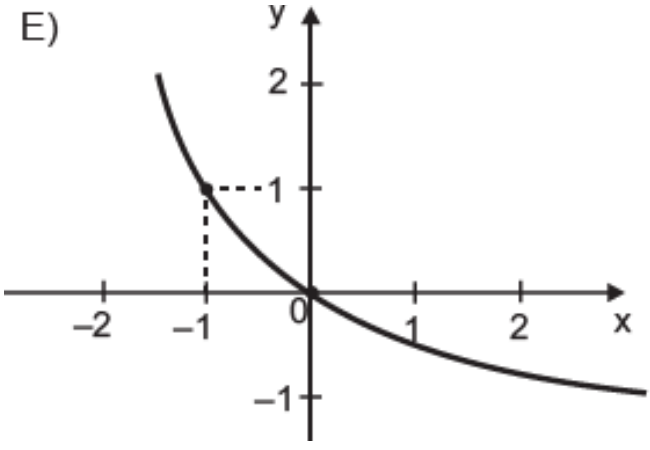
C)



D)



E)



Resolução:

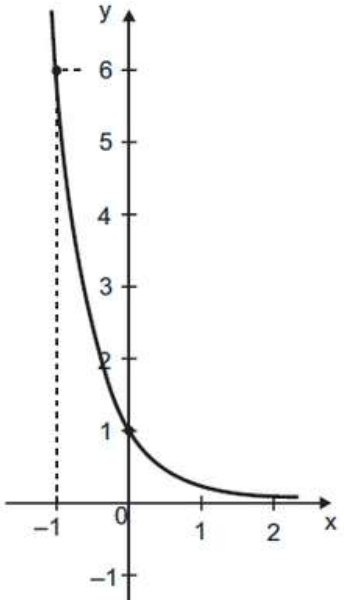
Observe no gráfico o intervalo do domínio apresentado. Podemos inferir os valores -1, 0 e 1 e encontrar as imagens

x	f(x)
-1	-0,5
0	0
1	1

Logo o gráfico que melhor representa a função dada é o da alternativa letra A

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 (SEAPE). Observe abaixo o gráfico de uma função exponencial $f : R \to R_+^*$



$A) f_{(x)} = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

$B) f_{(x)} = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}$

$C) f_{(x)} = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 1$

$D) f_{(x)} = 6^x$

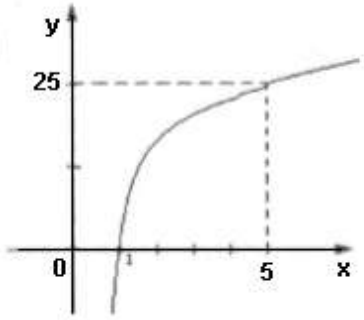
$E) f_{(x)} = 6^{x+1}$

Resolução:

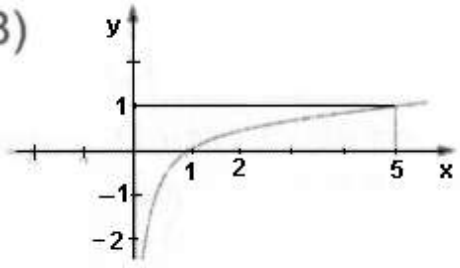
Observe o gráfico apresentado, nele podemos observar que a função é decrescente logo a função deve ter coeficiente maior que zero e menor que 1. A imagem para x= -1 é 6, logo a resposta correta é alternativa letra A.

3 (SAEPE). O gráfico que pode representar a função $f_{(x)} = 5^x$ é:

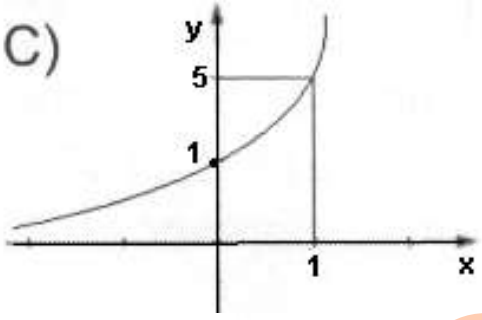
A)



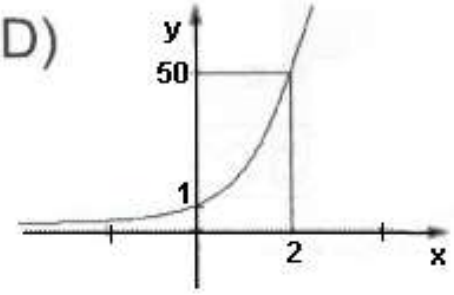
B)



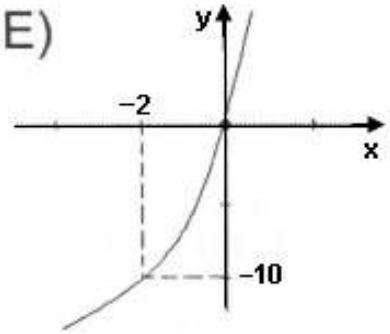
C)



D)



E)



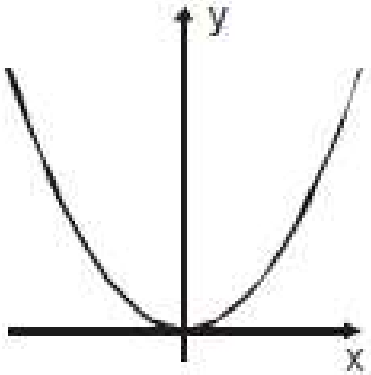
Resolução:

Observe no gráfico o intervalo do domínio apresentado. Podemos atribuir x = 0 e x =1 e encontrar suas respectivas imagens.

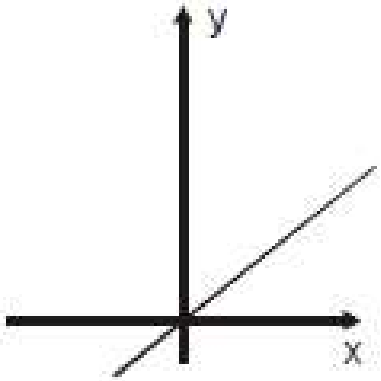
x	f(x)
0	1
1	5

Logo o gráfico que melhor representa a função dada é alternativa letra C

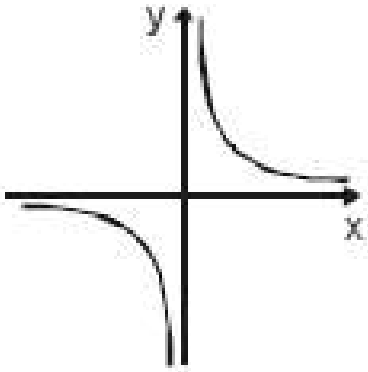
Atividade 1 Entre os seguintes gráficos, aquele que representa adequadamente a função $f_{(x)} = 7^x$ é:



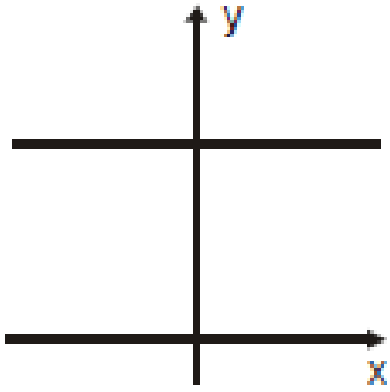
(A)



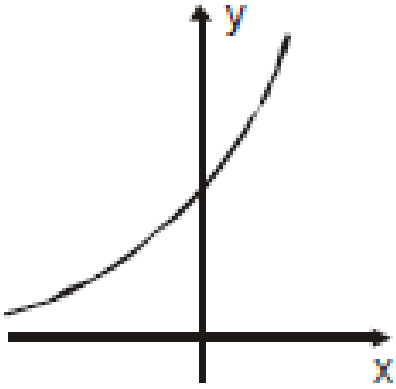
(B)



(C)



(D)



(E)

Atividade 2 Abaixo estão relacionadas algumas funções. Entre elas, a única alternativa que mostra uma função exponencial crescente é:

$A) f_{(x)} = 5^{-x}$

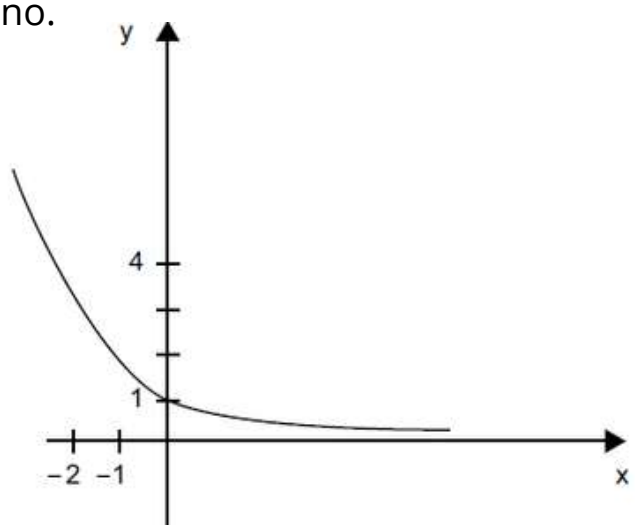
$B) f_{(x)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$C) f_{(x)} = 0,1^x$

$D) f_{(x)} = 10^x$

$E) f_{(x)} = 0,5^x$

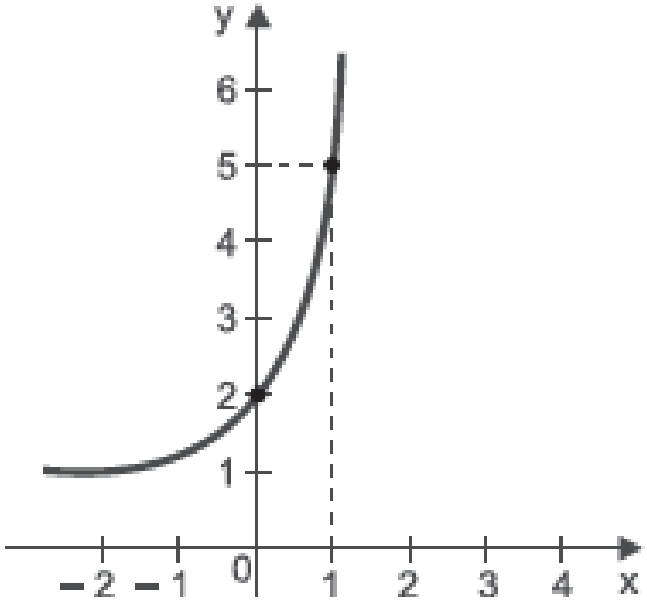
Atividade 3 (SAEPE). O gráfico abaixo representa uma função real no plano cartesiano.



Qual é a representação algébrica dessa função?

$A) f_{(x)} = 2^x \quad B) f_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad C) f_{(x)} = \frac{1}{2}x \quad D) f_{(x)} = x^2 \quad E) f_{(x)} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

Atividade 4 (SAEPE). No gráfico abaixo está representada uma função exponencial $f : R \to R_+^*$.

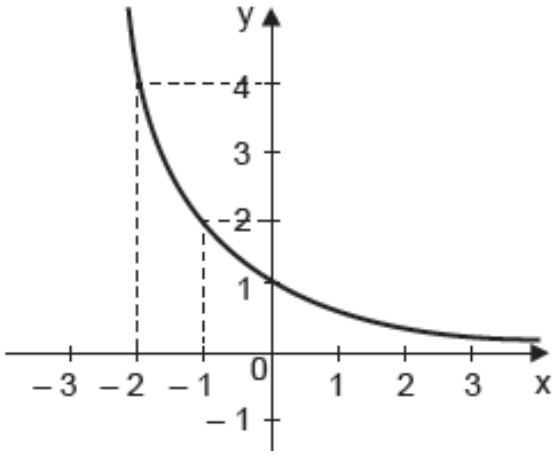


A representação algébrica dessa função é

$A) f_{(x)} = 5^x \quad B) f_{(x)} = 4^x + 1 \quad C) f_{(x)} = 3^x + 1 \quad D) f_{(x)} = 2^x + 3 \quad E) f_{(x)} = 2^x$

Atividade 5

(SAEPE - adaptada). Observe o gráfico a seguir de uma função exponencial. Qual é a expressão algébrica que representa essa função?



A) $f(x) = 2^x$

B) $f(x) = 2^{-x}$

C) $f(x) = (-2)^x$

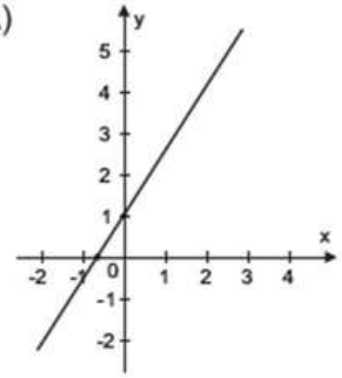
D) $f(x) = (-2)^{-x}$

E) $f(x) = -2^x$

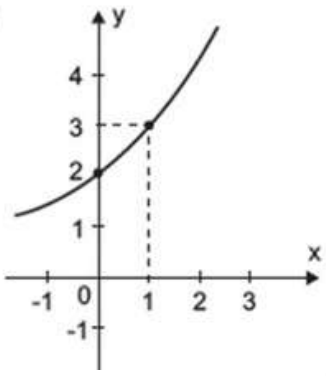
Atividade 6

(SAEPE). Luciana representou no plano cartesiano a função $f : R \to R_+^*$ dada por $f_{(x)} = 2^x + 1$. A representação gráfica dessa função é:

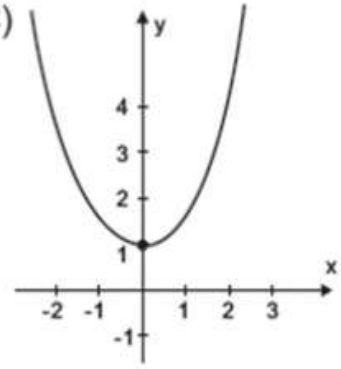
A)



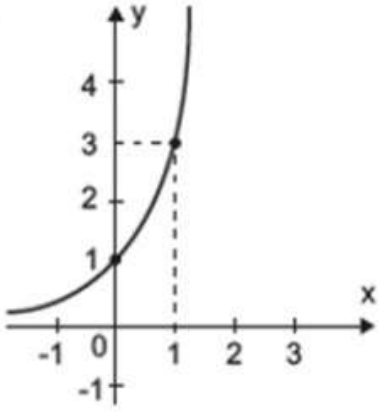
B)



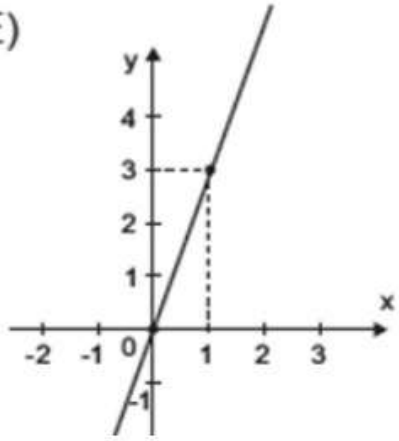
C)



D)

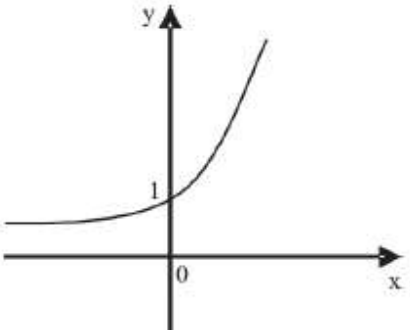


E)



Atividade 7

Veja o gráfico a seguir de uma função $f : R \to R_+^*$. Qual alternativa mostra o o formato da função representada?



$A) f_{(x)} = a^x, a > 1$
$B) f_{(x)} = a^x + 1, a > 1$
$C) f_{(x)} = a^x + 1, 0 < a < 1$
$D) f_{(x)} = \log_a x + 1, a > 1$
$E) f_{(x)} = \log_a x, 0 < a < 1$

Atividade 8

Seja uma função exponencial, cuja lei de formação é $f_{(x)} = a^x$, e cujo gráfico é uma curva crescente. Um possível valor para a é:

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

Atividade 9 O gráfico da função $f_{(x)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$ é:

A) uma parábola.
B) uma reta crescente.
C) uma curva crescente.
D) uma reta decrescente.
E) uma curva decrescente.

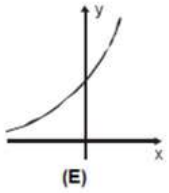
Atividade 10

Considerando a função exponencial f(x) = $(3/2)^x$, determine f(-2) * f(3).

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{9}{8}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{27}{4}$

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1



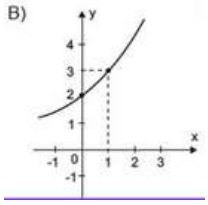
Atividade 2 $D) f_{(x)} = 10^x$

Atividade 3 $B) f_{(x)} = 2^{-x}$

Atividade 4 $B) f_{(x)} = 4^x + 1$

Atividade 5 $B) f_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Atividade 6



Atividade 7 $A) f_{(x)} = a^x, a > 1$

Atividade 8 E) 2

Atividade 9 D) uma reta decrescente.

Atividade 10 A) 3/2

REFERÊNCIAS

https://fastercapital.com/pt/contente/Funcoes-exponenciais--link-da-media-geometrica-para-exponenciacao.html acessado em 01 mai 2024

https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-exponencial-1.htm acessado em 01 mai 2024

https://profwarles.blogspot.com/2016/03/3-serie-por-descritor-matematica-ensino.html

https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=94 Acessado em 01 mai 2024