GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

Matemática

3ª Série | Ensino Médio

13ª Semana

Introdução às Funções Exponenciais:
Potenciação e Equações exponenciais

DESCRITORES DO PAEBES	**D074_M** Corresponder as representações algébrica e gráfica de uma função exponencial. **D088_M** Utilizar função exponencial na resolução de problemas.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT304** Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF07MA04/ES** Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros, incluindo módulos, números opostos e/ou simétricos. **EF08MA05** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica. **EF09MA03/ES** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários e decimais (radiciação).

CONTEXTUALIZAÇÃO

VOCÊ SABIA?

VAI FALTAR COMIDA NO MUNDO?

Desde os tempos de Thomas Malthus, a preocupação com a escassez de recursos tem sido uma sombra pairando sobre a humanidade. Malthus, um economista do século XVIII, alertou para o crescimento populacional exponencial e sua inevitável colisão com os recursos finitos da Terra. Ele argumentou que, enquanto a população aumenta geometricamente, os recursos disponíveis para sustentá-la crescem apenas aritmeticamente, criando um desequilíbrio fundamental.

Essa visão, embora debatida e contestada ao longo dos anos, ressoa de maneira inegável nos desafios contemporâneos que enfrentamos. Em nenhum lugar isso é mais evidente do que na questão crucial da produção de alimentos. Com uma população global em rápida expansão, a demanda por alimentos está aumentando exponencialmente, enquanto os recursos agrícolas e as áreas cultiváveis permanecem relativamente estáticos.

Aqui entra em cena a função exponencial. A matemática por trás do crescimento populacional de Malthus ecoa na natureza intrínseca da função exponencial. Da mesma forma que a população cresce em um ritmo cada vez mais acelerado, a função exponencial descreve um aumento constante proporcional a seu próprio valor atual. Assim como Malthus previu um crescimento populacional desenfreado, a função exponencial nos alerta sobre a rápida ampliação das demandas sobre os recursos.

Mas a função exponencial não é apenas uma ferramenta para prever o apocalipse malthusiano. Ela também nos oferece insights valiosos sobre como podemos enfrentar esses desafios. Ao compreendermos o poder do crescimento exponencial, somos incentivados a buscar soluções inovadoras e sustentáveis para garantir a segurança alimentar global. Desde técnicas agrícolas avançadas até a busca por fontes alternativas de alimentação, a compreensão da função exponencial nos capacita a agir de forma proativa para mitigar os impactos da escassez.

Portanto, enquanto a sombra da escassez de alimentos paira sobre nós, é crucial lembrar que a função exponencial não é apenas um lembrete sombrio do que poderia ser, mas também uma ferramenta poderosa para moldar o que será.

https://www.matematicarlos.com/2024/04/vai-faltar-comida-no-mundo-funcao.html

A partir deste material nós vamos estudar a função exponencial e suas aplicações, começando com a revisão de potenciação e a equação exponencial.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

POTÊNCIA DE EXPOENTE NATURAL

Dados um número real positivo a e um número natural n, $n \geqslant 2$, chama-se **potência de base a** e **expoente n** o número a^n, que é igual ao produto de n fatores iguais a a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Exemplos:

Número natural na base: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Número negativo na base: $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

Fração na base: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{27}\right)$

Número decimal na base: $(0{,}2)^5 = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}00032$

OPERAÇÕES DE POTÊNCIAS

Dados dois números reais, a e b, e dois números naturais não nulos, m e n, valem as propriedades a seguir:

- **Multiplicação de potências:** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemplo: $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 = 2^{2+3+5} = 2^{10}$

- **Divisão de potências:** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exemplo: $\frac{7^5}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7^3 = 7^{5-2}$

- **Potência de potências** $(a^m)^p = a^{mp}$

Exemplo: $\underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^2}_{7 \text{ fatores}} = (3^2)^7 = 3^{14}$

- **Potência de fração** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Exemplo: $\left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9 \cdot 9}{5 \cdot 5} = \frac{9^2}{5^2}$

EXPOENTE ZERO

Sendo $a \neq 0$, vamos definir a^0 de modo que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ continue válida quando m ou n (ou ambos) sejam iguais a zero.

Para que $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$ é preciso definir $\boldsymbol{a^0 = 1}$.

Exemplo: $5^0 = 1$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

POTÊNCIA COM EXPOENTE NEGATIVO

Dado qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, devemos ter, para $a \neq 0$:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Portanto, $a^{-n} \cdot a^n = 1$, ou seja, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exemplos:

a) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{8}} = 8$

c) $(\sqrt{2})^{-2} = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{2}$

O INVERSO DE UM NÚMERO

Observe que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{a} = 1$, ou seja, $a \cdot a^{-1} = 1$, com $a \neq 0$.

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ é chamado o **inverso de *a***.

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO

Veremos agora que significado pode ser dado à potência a^r, com a positivo, quando $r = \dfrac{m}{n}$ é um número racional (em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$), de modo que continue válida a propriedade fundamental $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

Inicialmente, vejamos como podemos definir, por exemplo, $2^{\frac{1}{2}}$, mantendo a propriedade fundamental:

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

Assim, $2^{\frac{1}{2}}$ é um número positivo cujo quadrado é igual a 2. Portanto, pela definição de raiz quadrada:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \text{ pois } \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

De modo geral, partindo da propriedade fundamental ou da potência de potência:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \text{ ou } (a^r)^n = a^{r \cdot n}$$

e fazendo $r = \dfrac{1}{n}$, teremos:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}} = a^{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)} = a^{\frac{n}{n}} = a$$

ou seja, $a^{\frac{1}{n}}$ é o número real positivo cuja enésima potência é igual a a. Pela definição de raiz, esse número é $\sqrt[n]{a}$, a raiz enésima de a. Logo:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{com } a \text{ real e } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Exemplos:

a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1} = \sqrt{9} = 3$

c) $3^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equações exponenciais são aquelas em que a incógnita aparece no(s) expoente(s).

Veja alguns exemplos:

a) $4^x = 32$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

c) $25^{x+1} = \sqrt{5^x}$

d) $2^{2x} = 2^x + 12$

Como resolver uma equação exponencial simples?

Exemplo 1:

$$27^x = 3$$

1º passo: represente os dois números de tal forma que ambos tenham a mesma base.

Observe que o 27 pode ser representado na base 3: 3^3

$$27^x = 3$$
$$(3^3)^x = 3$$
$$3^{3x} = 3$$

2º passo: Como duas potências iguais e de mesma base têm, necessariamente, expoentes iguais, podemos igualar os expoentes e teremos uma equação do 1º grau em x. Em outras palavras, vamos trabalhar com a equação formada pelos expoentes.

Observe que o expoente do 1º membro é 3x enquanto o expoente do 2º membro é 1, embora esteja implícito.

$$3^{3x} = 3^{1}$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2:

$$9^x = 27$$

No exemplo anterior foi necessário transformar apenas 1 número de tal forma que ambos ficassem com a mesma base. Neste caso, observe que será necessário transformar os dois números.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Observe que o 9 pode ser representado como 3^2 enquanto o 27 pode ser representado como 3^3.

$$(3^2)^x = 3^3 \Rightarrow 3^{2x} = 3^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Exemplo 3:

$$0{,}75^x = \frac{9}{16}$$

É interessante representar os números decimais em frações ao invés de representar frações em números decimais. O número 0,75 pode ser representado na forma fracionária 75/100, obtendo a fração irredutível 3/4.
9/16 pode ser representado na forma $3^2/4^2$.

$$0{,}75^x = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3^2}{4^2} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow x = 2$$

Exemplo 4:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$$

Nos casos em que apareçam raízes não exatas, usa-se o conhecimento de potências com expoente fracionário.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \Rightarrow (2^{-1})^x = 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2^{-x} = (2^2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2^{-x} = (2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow -x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Exemplo 5:

$$4^x = 1$$

O número 1 pode ser chamado de “coringa” nas equações exponenciais. Ele pode ser representado como qualquer número (exceto zero) elevado a zero . Assim, ao invés de representar o 4 na base 1, nós representamos o 1 na base 4, ou seja 4^0.

$$4^x = 1 \Rightarrow 4^x = 4^0 \Rightarrow x = 0$$

Exemplo 6:

$$3^{x-1} = 81$$

Neste exemplo há dois termos no expoente (x-1), mas conseguimos resolver nromalmente.

$$3^{x-1} = 81 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^4 \Rightarrow x-1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1

O valor de x que faz a equação $2^{x+1} = 32$ é:

Resolução:

Sabemos que 32 = 2^5, logo, temos que:

$$2^{x+1} = 2^5$$

Igualando os expoentes, temos que:

$$x + 1 = 5$$

$$x = 5 - 1$$

$$x = 4$$

2

Resolva a equação exponencial $\sqrt[5]{2^x} = \frac{1}{32}$

Resolução:

Vamos igualar as bases das potências utilizando fatoração, propriedades de potências e radiciação.

$$\sqrt[5]{2^x} = \frac{1}{32}$$

$$2^{\frac{x}{5}} = (32)^{-1}$$

$$2^{\frac{x}{5}} = (2^5)^{-1}$$

$$2^{\frac{x}{5}} = 2^{-5}$$

Como as potências são iguais e possuem a mesma base, igualamos os expoentes.

$$\frac{x}{5} = -5$$

$$x = -5 \,.\, 5$$

$$x = -25$$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(M090263G5) Observe a expressão no quadro abaixo.

$$(-2)^2 - (-4)^2 + 8\,(-3) - 25$$

Qual é o resultado dessa expressão?

A) – 69
B) – 61
C) – 37
D) – 29

Atividade 2

(M090056A8) Carlos resolveu a expressão $4.(-3)^2 + (-48) : (-2)^3$ e chamou de x o resultado que ele encontrou.

O valor correto de x é

A) -30

B) -16

C) 30

D) 42

Atividade 3

(IVIN)Qual o valor de $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{2}{4}}$?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{5}{6}$

C) $\frac{6}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{3}{2}$

Atividade 4

(IESES) Assinale a propriedade operatória das potências que está INCORRETA:
A) $a^1 = a$
B) $a^n \,.\, a^m = a^{n.m}$
C) $(a^n)^m = a^{n.m}$
D) $a.b)^n = a^n \,.\, b$

Atividade 5

Ao simplificarmos a expressão $3^{x-5} . 3^{x+5}$ obteremos como resposta:

A) 3^{2x+10}
B) 3^{2x}
C) 3^{x}
D) 9^{x2}

Atividade 6

Analise as equações representadas a seguir:

I. $3x + 4 = x^3$

II. $x^2 + 2x + 1 = 0$

III. $2^x + 1 = 5$

Analisando as equações, podemos classificar como equação exponencial:
A) somente a equação I.
B) somente a equação II.
C) somente a equação III.
D) somente as equações I e III.
E) as equações I, II e III.

Atividade 7

O valor de x que torna a igualdade verdadeira na equação $5^{x} = \frac{1}{125}$ é:

A) -3
B) -2
C) -1
D) 2
E) 3

Atividade 8

A solução da equação $3^{x-2} = 9$ é:

A) S = {-1/4}
B) S = {-4}
C) S = {1/4}
D) S = {4}
E) S = {6}

Atividade 9

Considere a equação $3^{2-x} = \frac{1}{27}$.

É CORRETO afirmar que o conjunto solução dessa equação é

A) S = {-5}
B) S = {-1/2}
C) S = {0}
D) S = {1/2}
E) S = {5}

Atividade 10

O valor de *x* que satisfaz a equação $3^{x+1} = 81$ é:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Atividade 11

Dados $a = 0,5^{3x+4}$ e $b = (\frac{1}{2})^{8x-6}$, o valor de *x* que faz com que a = b é:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Atividade 12

O valor de x que torna a igualdade verdadeira na equação $\sqrt[3]{3^{x-5}} = 27$ é:

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 14

GABARITO

ATIVIDADE 1: B
ATIVIDADE 2: D
ATIVIDADE 3: C
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: B
ATIVIDADE 6: C
ATIVIDADE 7: A
ATIVIDADE 8: D
ATIVIDADE 9: E
ATIVIDADE 10:C
ATIVIDADE 11:B
ATIVIDADE 12:E

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Giovanni Júnior, José Ruy. A Conquista da Matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. - 1.ed. - São Paulo : FTD, 2022.

Matemática : ciência e aplicações, volume 1: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Matematicarlos. Disponível em: https://www.matematicarlos.com/2024/04/vai-faltar-comida-no-mundo-funcao.html. Acesso em 19 de abril de 2024.