Matemática

1ª Série | Ensino Médio

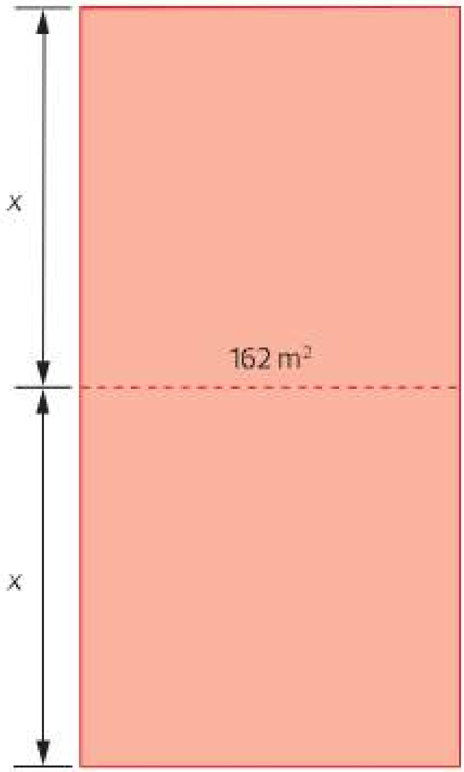
20ª Semana

Resolução de equações polinomiais do 2º grau incompletas

DESCRITORES DO PAEBES	**D087_M** Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EF09MA09** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade. **(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



Um terreno de forma retangular será dividido em dois terrenos quadrados iguais. Se a área do terreno retangular é de 162 m², qual será a medida do lado de cada terreno quadrado?

Observe as indicações:

- medida do lado de cada quadrado: x.
- Área de cada uma das regiões quadradas: x^2.
- Área do terreno retangular: $2x^2 = 162$.

$2x^2 = 162$ é um exemplo de equação do 2º grau com uma incógnita.
Sua resolução nos fornece o valor de x, que indica a medida do lado de cada terreno quadrado.

Nos próximos dois materiais, nós vamos estudar as equações do 2º grau e neste, as equações do 2º grau incompletas.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

Nós já estudamos que a equação do 1º grau é aquela em que o maior expoente de x é 1, como por exemplo, $2x + 48 = 0$.
As equações podem ser classificadas de acordo com o valor do maior expoente da incógnita. Nas equações do 2º grau, o valor do maior expoente da incógnita é 2.
Há equações do 3º grau, 4º grau, 5º grau etc. Mas, no momento, vamos nos limitar ao estudo das equações do 2º grau.

A EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Denomina-se **equação do 2º grau** na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

São exemplos de equação do 2º grau:

$2x^2 + 4x + 8 = 0$ $\quad$ $5y^2 + 7y = 0$ $\quad$ $8 - 10a - a^2 = 4a^2 - 3a$

- **OS COEFICIENTES**

Nas equações do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, os números reais a, b e c são chamados **coeficientes** da equação. Assim, se a equação for na incógnita x:

a será sempre o coeficiente do termo em x^2;
b será sempre o coeficiente do termo em x;
c será o coeficiente sem incógnita ou o termo independente de x.

Exemplo:

$$2x^2 - 2x - 40 = 0$$

$a = 2$ $\quad$ $b = -2$ $\quad$ $c = -40$

- **EQUAÇÃO COMPLETA E EQUAÇÃO INCOMPLETA**

Pela definição, devemos ter sempre $a \neq 0$. Entretanto, podemos ter $b = 0$, $c = 0$ ou b e $c = 0$.
Assim:

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **completa**.

Quando $b \neq 0$ e $c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em c**.

Quando $b = 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em b**.

Quando $b = 0$ e $c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em b e c**.

Exemplos:

$2x^2 - 2x - 40 = 0$ (equação completa, pois $a = 2$, $b = -2$ e $c = -40$).
$2x^2 - 2x = 0$ (equação incompleta em c, pois $a = 2$, $b = -2$ e $c = 0$).
$2x^2 - 40 = 0$ (equação incompleta em b, pois $a = 2$, $b = 0$ e $c = -40$).
$2x^2 = 0$ (equação incompleta em b e c, pois $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$).

Note que, pela definição, a sempre será diferente de zero, pois se anulasse o coeficiente do termo em x^2 não teríamos uma equação do 2º grau.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **EQUAÇÃO DO 2º GRAU NA FORMA REDUZIDA**

Observe as equações:
$2x^2 - 2x - 40 = 0$
$y^2 - 25 = 0$
$3t^2 + 4t - 1 = 0$
$-2m^2 + 8m = 0$
Essas equações estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que é denominada **forma reduzida de uma equação do 2º grau.**

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bc + c = 0$, como por exemplo $2x^2 - 7x = 1 - x^2$.
Por meio de transformações, nas quais aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade, tais equações podem passar a ser expressas nessa forma.

Acompanhe:
Escrever a equação $2x^2 - 7x = 1 - x^2$ na forma reduzida.
$2x^2 - 7x = 1 - x^2$ (equação dada)
$2x^2 - 7x - 1 + x^2 = 0$
$3x^2 - 7x - 1 = 0$ (forma reduzida da equação dada)

RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Raiz ou solução de uma equação é o valor que, atribuindo à incógnita, torna a sentença matemática verdadeira.
Por exemplo, as raízes ou soluções da equação $x^2 - 2x = 0$ são 0 e 2, pois esses valores são os números que tornam a sentença verdadeira. Indicamos as raízes assim:
$x' = 0$ e $x'' = 2$.

Veja:

- Substituindo x por 0:

$x^2 - 2x = 0$
$0^2 - 2 . 0 = 0$
$0 - 0 = 0$
$0 = 0$
Logo, $x = 0$ é solução da equação $x^2 - 2x = 0$, pois a igualdade $0 = 0$ é verdadeira.

- Substituindo x por 2:

$x^2 - 2x = 0$
$2^2 - 2 . 2 = 0$
$4 - 4 = 0$
$0 = 0$
Portanto, $x = 2$ é solução da equação $x^2 - 2x = 0$, pois a igualdade $0 = 0$ é verdadeira.

Já $x = 4$, por exemplo, não é solução ou raiz da equação $x^2 - 3x = 0$, pois
$4^2 - 3 . 4 \Rightarrow 16 - 12 = 4$. E, é claro, $4 \neq 0$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Até agora, aprendemos o que é raiz ou solução de um equação do 2º grau e aprendemos a verificar se um número é ou não raiz de uma equação dada. Mas como fazer para encontrar as raízes? É o que vamos estudar agora.

Vamos estudar métodos de resolução de equações do 2º grau incompletas separando em casos, de acordo com os coeficientes nulos que a equação tiver.

1º CASO: EQUAÇÕES INCOMPLETAS EM B

Uma equação incompleta em b tem a forma $ax^2 + c = 0$.

Exemplo: $x^2 - 144 = 0$, que pode ser representada como $x^2 = 144$

$x^2 = 144$

$x = \pm\sqrt{144}$

$x = \pm 12$

É bom saber: utilizamos a notação $= \pm\sqrt{a}$ para representar $n = +\sqrt{a}$ ou $n = -\sqrt{a}$.

A equação acima tem $x = +12$ ou $x = -12$, no entanto, devemos estar atentos ao contexto que nos é dado, como no exemplo a seguir.

ILUSTRA CARTOON

A medida da área de uma praça quadrada é 144 m². Quanto mede o lado dessa praça?

Indicando por x a medida do lado da praça, podemos escrever a equação, como no exemplo anterior.

$x^2 = 144$

$x = \pm\sqrt{144}$

$x = \pm 12$

Como a medida do lado não pode ser um número negativo, neste caso a solução $x = -12$ não serve para o problema. Logo, a medida do lado da praça é 12 m.

Há outra maneira de resolver a equação $x^2 - 144 = 0$. Podemos fatorar essa expressão $x^2 - 144$, utilizando a fatoração da diferença de dois quadrados.

Mas, como fazer a fatoração da diferença de dois quadrados?

O polinômio $x^2 - 144$ representa uma diferença de dois quadrados, Observe como Fatorar esse polinômio:
Como $144 = 12^2$, temos: $x^2 - 144 = x^2 - 12^2 = (x + 12)(x - 12)$.
Então, **(x + 12) . (x - 12)** é a forma fatorada da $x^2 - 144$.

$$(x - 12)(x+12) = 0$$

Para que o produto seja zero, um dos fatores precisa ser zero:

- Se $x - 12 = 0$, então, $x = 12$;
- Se $x + 12 = 0$, então, $x = -12$

Assim, $x = 12$ ou $x = -12$.

Esteja atento na utilização do **ou** e do **e** na resposta. Podemos dizer que $x = 12$ ou $x = -12$, e podemos também dizer que as raízes são $x' = 12$ **e** $x'' = -12$.

Vimos que nesse problema, como x indica a medida de comprimento, desprezamos o valor negativo e ficamos apenas com o valor de $x = 12$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

EQUAÇÕES DO 2º GRAU SEM SOLUÇÃO

Pensando nos números reais, existem equações sem solução. Por exemplo: $x^2 = -4$ não tem solução ou raiz real, pois não existe número real que elevado ao quadrado resulte -4.

Observação:
Números como $\sqrt{-4}$ fazem parte do conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, que contém o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$.

Veja outro exemplo:

$$5x^2 + 45 = 0 \Rightarrow 5x^2 = -45 \Rightarrow x^2 = -\frac{45}{5} \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$$

Não existe número real para x, ou seja, a equação dada não tem raiz real.

2º CASO: EQUAÇÕES INCOMPLETAS EM B E C

Neste caso, temos $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, $b = 0$ e $c = 0$.

Aqui, a ideia para a resolução é a mesma do caso anterior: determinar o valor de x^2 e depois o de x. Mas a conclusão será um pouco diferente. Veja:

a) $3x^2 = 0$

$$x^2 = \frac{0}{3}$$

$$x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{0}$$

$$x' = x'' = 0$$

b) $-5x^2 = 0$

$$x^2 = \frac{0}{-5}$$

$$x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{0}$$

$$x' = x'' = 0$$

Como +0 e - 0 indicam o mesmo número, podemos concluir que esse tipo de equação sempre tem duas raízes reais e iguais a zero.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

3º CASO: EQUAÇÕES INCOMPLETAS EM C

Neste caso, temos $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$.

Veja a questão proposta a seguir e analise a resolução por meio de uma equação do 2º grau incompleta com $b \neq 0$ e $c = 0$.

Qual é o número que tem o dobro de seu quadrado igual ao seu quádruplo?

- x: número procurado
- x^2: quadrado do número
- 4x: quádruplo do número

Agora, montamos a equação e resolvemos:

$$2x^2 = 4x$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$x \cdot (2x - 4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

Em x . (2x - 4) = 0, se o produto é zero, pelo menos um dos fatores é zero.
Portanto, x = 0 ou 2x - 4 = 0, ou seja, x = 0 ou x = 2.

Verificação:
Vamos fazer a verificação de x = 0 e de x = 2 na equação $2x^2 = 4x$:

- Para x = 0:

$2x^2 = 4x$
$2 . 0^2 = 4 . 0$
$0 = 0$

- Para x = 2:

$2x^2 = 4x$
$2 . 2^2 = 4 . 2$
$8 = 8$

Então, existem dois números que satisfazem as condições da questão: 0 e 2.

Examine agora este outro exemplo em que usamos a fatoração para resolver uma equação do 2º grau:

Quais são as raízes da equação $-4x^2 + 12x = 0$?

$$-4x^2 + 12x = 0 \qquad \cdot(-1)$$
$$4x^2 - 12x = 0$$
$$x(4x - 12) = 0 \qquad \text{(fatoramos o 1º membro)}$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x - 12 = 0$$
$$4x = 12$$
$$x = \frac{12}{4} \Rightarrow x = 3$$

Para facilitar os cálculos, sempre que o coeficiente do termo x^2 for negativo, podemos obter uma equação equivalente com sinais trocados multiplicando os dois membros por - 1.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Verificação:

Vamos fazer a verificação de $x = 0$ e de $x = 2$ na equação $-4x^2 + 12x = 0$:

- Para $x = 0$:

$- 4x^2 + 12x = 0$
$- 4 . 0^2 + 12 . 0 = 0$
$0 + 0 = 0$
$0 = 0$

- Para $x = 3$:

$- 4x^2 + 12x = 0$
$- 4 . 3^2 + 12 . 3 = 0$
$- 36 + 36 = 0$
$0 = 0$

Portanto, as raízes são 0 e 3 e indicamos assim: $x' = 0$ e $x'' = 3$.

RESUMO

Resolução de equações incompletas do 2º grau em IR

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ om } a, b \text{ e } c \text{ reais e } a \neq 0.$$

- $b = 0$ e $c \neq 0 \rightarrow$ $ax^2 + c = 0$: a equação não tem raiz real ou tem duas raízes reais distintas e opostas.
- $b = 0$ e $c = 0 \rightarrow$ $ax^2 = 0$: a equação tem sempre duas raízes reais iguais a zero.
- $b \neq 0$ e $c = 0 \rightarrow$ $ax^2 + bx = 0$: a equação tem sempre duas raízes reais distintas, e uma delas é o zero.

Dica de estudo

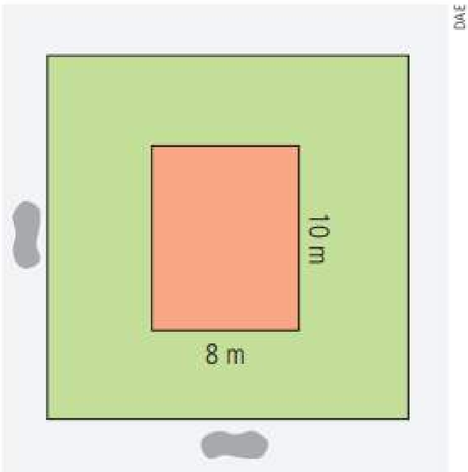
Aponte a câmera do celular para o QR CODE ao lado para fazer uma revisão de fatoração de expressões algébricas ou clique no botão abaixo.

Clique aqui

CONCEITOS E CONTEÚDOS

PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Num terreno quadrado foi construída uma casa que ocupa a área de um retângulo de medidas 8 m por 10 m. Na planta, a medida do lado do terreno está ilegível, mas sabe-se que a área livre $(A_{terreno} - A_{casa})$ é de 320 m².



Quanto mede o lado do terreno?

Resolução:

A área da casa é $A_{casa} = 8 . 10 = 80$ m²

O terreno é quadrado. Representando por x a medida do seu lado:

$A_{terreno} = x^2$

Como $A_{terreno} - A_{casa} = 320$ m², temos:

$\mathbf{x^2 - 80 = 320}$

$x^2 = 320 + 80$

$x^2 = 400$

$x = \pm\sqrt{400}$

$x = \pm 20$

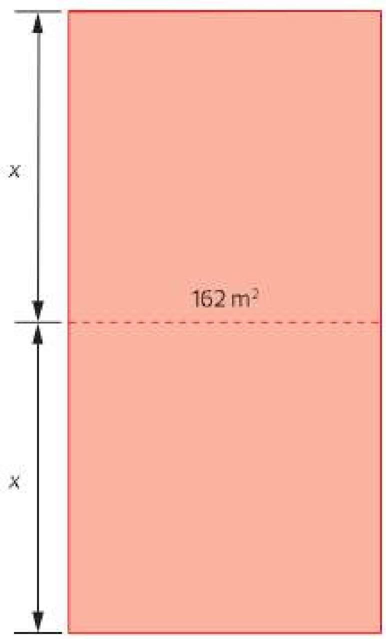
A solução - 20 não serve, pois a medida do lado de um terreno não pode ser negativa.
Então, o lado do terreno mede 20 m.

A seguir, veremos exemplos de alguns problemas envolvendo a equação do 2º grau incompleta.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 RETOMANDO O PROBLEMA DO INÍCIO

Um terreno de forma retangular será dividido em dois terrenos quadrados iguais. Se a área do terreno retangular é de 162 m². Qual será a medida do lado de cada terreno quadrado?



Resolução:
Podemos representar a medida do lado de cada quadrado como x.
Assim, temos uma área $(x)^2 = x^2$.
A área do retângulo é 162 m² e é igual à área dos dois quadrados, ou seja,
$2x^2 = 162$
Temos então:

$$2x^2 = 162 \Rightarrow x^2 = \frac{162}{2} \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt{81} \Rightarrow x = \pm 9$$

A solução - 9 não serve, pois, como já vimos, a medida do lado de um terreno não pode ser negativa.

Então, a medida de cada lado do terreno quadrado é 9 metros.

2

Para que valores reais de k a equação $(4k - 12)x^2 - 6x = 0$ é uma equação de 2º grau?

Resolução:

O coeficiente de x^2 na equação dada é $(4k - 12)$. Essa equação será de 2º grau com uma incógnita se esse coeficiente for diferente de zero.

Determinamos para que valores reais de k esse coeficiente é igual a zero, resolvendo a equação $4k - 12 = 0$.

$$4k - 12 = 0 \text{ —— } 4k = 12 \text{ —— } k = \frac{12}{4} \text{ —— } k = 3$$

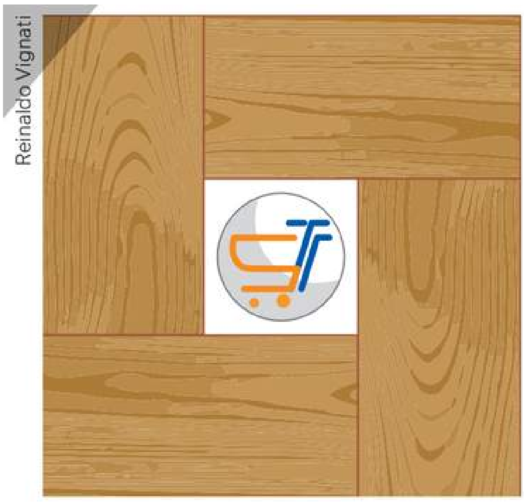
Então, o coeficiente de x^2 será diferente de zero para $k \neq 3$.

A equação apresentada será de 2º grau para $k \neq 3$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3

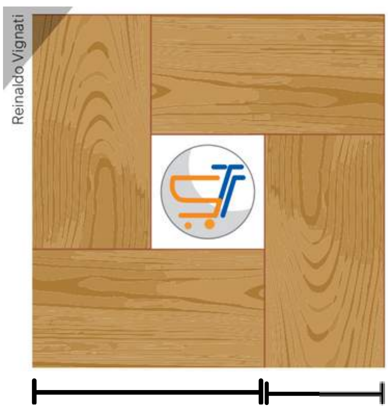
Uma reforma estava sendo planejada para o calçamento de um grande supermercado. Bruna era a arquiteta responsável por apresentar uma peça para a composição do piso. Entre várias sugestões dela, os donos do supermercado decidiram por uma peça formada por 4 retângulos iguais e um quadrado ao centro com o símbolo do supermercado, como ilustrado a seguir.



Ficou estabelecido que cada peça teria 900 cm² de área. Considerando que as medidas de cada retângulo eram (10 + x) cm por 10 cm e que a medida do lado do quadrado era x cm, qual é a medida desconhecida x?

Resolução:

Observe que a figura formada pelos quatro retângulos e pelo quadrado central resulta num quadrado cuja medida do lado é o comprimento maior do retângulo adicionado à largura do retângulo. Assim, como a área deve ser igual a 900 cm², escrevemos:



x + 10 10

$$l^2 = 900 \Rightarrow (10 + x + 10)^2 = 900 \Rightarrow (20 + x)^2 = 900 \Rightarrow 20 + x = \pm\sqrt{900}$$

$$20 + x = 30 \Rightarrow x = 10$$

$$20 + x = -30 \Rightarrow x = -50$$

Embora 10 e - 50 representem as soluções da equação, apenas 10 deve ser considerado, pois, no contexto, x é uma medida de comprimento.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(INQC) Das alternativas abaixo, qual apresenta uma equação do segundo grau?

A) $9x + 2 = 4$
B) $5x^2 - 9x + 1 = -1$
C) $-x^3 + 2x + 12 = -7$
D) $-13x - 13x + 7 = 5$
E) $\text{sen}\ x + 3 = -9$

Atividade 2

Analise as equações a seguir:

I $2x^2 + 3x - 0 = 0$
II $x^2 + 3 = 2x$
III $x^2 + x - 1 = 0$

São consideradas equações do 2º grau incompletas:

A) Somente I
B) Somente II
C) Somente III
D) Somente I e II
E) Somente II e III

Atividade 3

Dada a equação do 2º grau a seguir, podemos afirmar que o conjunto de soluções dessa equação é igual a:

$$2x^2 - 8 = 0$$

A) S = {-2,2}
B) S = {-4,4}
C) S = {-1,1}
D) S = {0,4}
E) S = {0,2}

Atividade 4

As raízes da equação $-4x^2 + 12x = 0$ é:

A) S = {0,1}
B) S = {3,4}
c) S = {0,2}
D) S = {3,2}
E) S = {0,3}

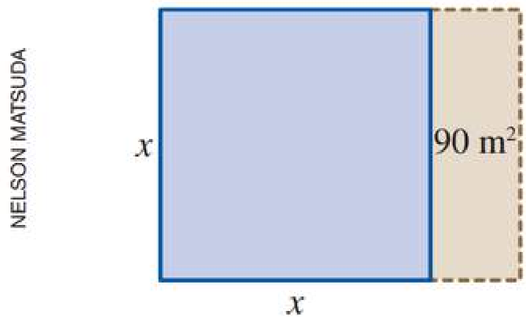
Atividade 5

A soma das raízes da equação $2x^2 - 10x = 0$ é:

A) 0
B) 2
C) 5
D) 7
E) 12

Atividade 6

Luís tem um terreno em forma de quadrado. Ele pretende comprar um terreno de 90 m² que faz divisa com o dele. Desse modo, ele ficaria com um terreno retangular de 414 m².



A medida do lado do terreno em forma quadrangular de Luís é:

A) 414
B) 324
C) 30
D) 18
E) 16

Atividade 7

Um terreno quadrado foi cercado, porém, Paula constatou que a área desse terreno ficou menor do que o esperado. Ao ampliar para 12 metros comprimento, a superfície do terreno ficou 5 vezes maior do que a área do terreno quadrado.

A medida de cada lado do terreno quadrado era:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 12

Atividade 8

(M090316A9) Em um canteiro quadrado, a medida da área vale o dobro da medida do perímetro. Quanto mede o lado desse canteiro?

A) 2 m
B) 4 m
C) 6 m
D) 8 m
E) 12 m

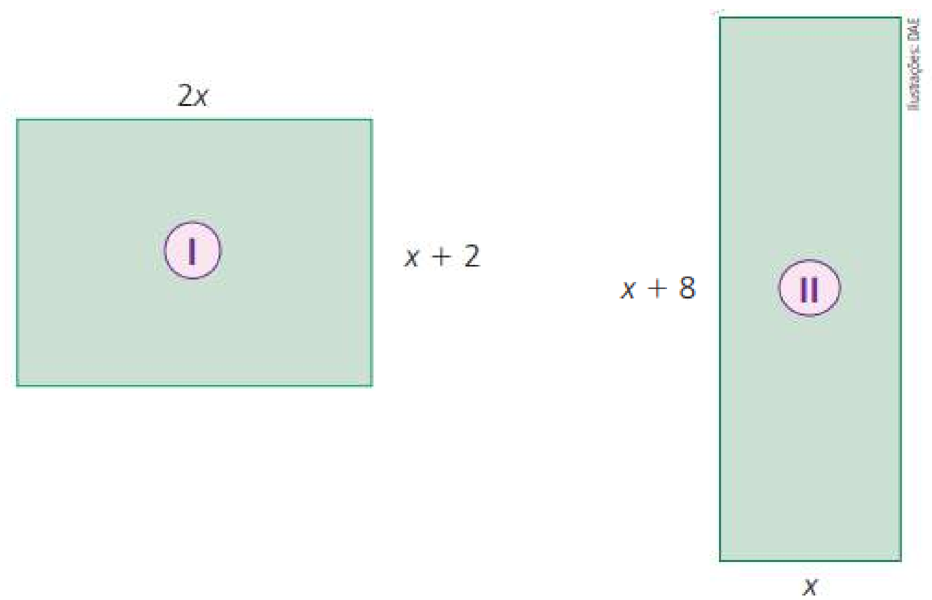
Atividade 9

Se do quadrado da idade de Luísa subtrairmos o dobro da idade dela, obteremos 10 vezes a idade de Lúcia, a irmã gêmea de Luísa. Qual é a idade de Luísa?

A) 5 anos
B) 6 anos
C) 12 anos
D) 20 anos
E) 24 anos

Atividade 10 Desafio

Os retângulos ilustrados abaixo têm a mesma área. A medida x do lado do retângulo II é:



A) 4 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 12 cm
E) 30 cm

GABARITO

ATIVIDADE 1: B
ATIVIDADE 2: A
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: E
ATIVIDADE 5: C
ATIVIDADE 6: D
ATIVIDADE 7: B
ATIVIDADE 8: D
ATIVIDADE 9: C
ATIVIDADE 10: A

Resolução do desafio:

- Área do retângulo I
  $A_I = 2x(x + 2) = 2x^2 + 4x$

- Área do retângulo II
  $A_{II} = x(x + 8) = x^2 + 8x$

Como $A_I = A_{II}$, temos

$2x^2 + 4x = x^2 + 8x$ Subtraímos x^2 de ambos os membros da equação:
$2x^2 + 4x - x^2 = x^2 + 8x - x^2$
$x^2 + 4x = 8x$ Subtraímos $8x$ de ambos os membros da equação:
$x^2 + 4x - 8x = 8x - 8x$
$\mathbf{x^2 - 4x = 0}$ Colocamos x em evidência no primeiro membro da equação:
$x(x - 4) = 0$
Para que o produto $x(x - 4)$ seja igual a zero, devemos ter:
$x = 0$ ou
$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$
A solução $x = 0$ não serve, pois os retângulos não existiriam.
Então $x = 4$ cm.

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Projeto Teláris: matemática : ensino fundamental 2 / Luiz Roberto Dante. - 2. ed, - São Paulo: Ática. 2015. - (Projeto Teláris : matemática).

Ferretto. Acessado em https://www.youtube.com/watch?v=3amBZupsIdc, no dia 11/06/2024.

Giovanni Júnior, José Ruy. A Conquista da Matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. - 1.ed. - São Paulo : FTD, 2022.

Logen, Adilson. Interação matemática: o tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. - São Paulo: Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

Matemática : ciência e aplicações, volume 1: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Matemática, primeira série, ensino médio: autores. Ana Lúcia Bordeaux... [et al.], coordenação João Bosco Pitombeira; - Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. 376p. :il. - (Multicurso; Coleção completa; v.1)