

Matemática

1ª Série | Ensino Médio

17ª Semana



**Função Afim e
Progressões Aritméticas
(PA)**



DESCRIPTORES DO PAEBES	D096_M Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRIPTORES	EM13MAT507 Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	EF08MA11/ES Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva (ou recorrentes) e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



O COMETA HALLEY E A PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Desde tempos imemoriais, a humanidade olha para o céu com fascínio e curiosidade. E dentre os muitos mistérios que pontuam o firmamento, um dos mais notáveis é o Cometa Halley. Descoberto e documentado ao longo de séculos, esse visitante cósmico nos presenteia com sua presença majestosa a cada 76 anos aproximadamente.

Mas o que pode parecer um evento singular e aleatório na vastidão do universo pode, na verdade, ser entendido por meio de uma das ferramentas mais fundamentais da Matemática: a Progressão Aritmética. Ao explorar a relação entre o retorno periódico do Cometa Halley e os princípios da progressão aritmética, desvendamos padrões surpreendentes que nos conectam ao cosmos de uma maneira única.

Nesta jornada, mergulharemos na órbita do Cometa Halley e nas complexidades da progressão aritmética, descobrindo como esses dois mundos aparentemente distintos se entrelaçam em uma dança cósmica de regularidade e beleza matemática. Ao fazê-lo, esperamos lançar luz sobre o fascínio eterno que o universo exerce sobre nós e celebrar a poderosa sinergia entre a ciência, a matemática e a poesia do cosmos.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

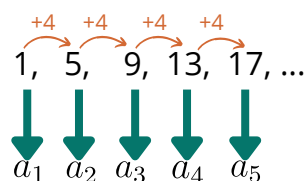
Nos materiais estruturados anteriores nós estudamos **FUNÇÃO AFIM**, que é um caso particular de função. Vimos que a função afim é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

Neste material nós vamos estudar a **progressão aritmética** para no próximo material fazermos uma relação da função afim com a progressão aritmética.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Uma **progressão aritmética** (PA) é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior mais uma constante, chamada razão da progressão aritmética.

Exemplo:



Observe que os termos dessa sequência são obtidos somando a constante 4 ao termo antecedente. Em outras palavras, essa é uma sequência de termos que estão sendo obtidos a partir de somas de 4 em 4. Esse é um exemplo de progressão aritmética.

Essa constante recebe o nome de **razão** da progressão aritmética e cada termo será representado pela letra a , sendo a_1 o 1º termo, a_2 o 2º termo, e assim sucessivamente.

RAZÃO DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Como vimos, a razão de uma progressão aritmética é a constante que será somada ao termo para formar o termo seguinte.

Representaremos a razão pela letra minúscula r .

A razão de uma progressão aritmética pode ser calculada fazendo $r = a_n - a_{n-1}$, para qualquer $n \geq 2$. Em outras palavras, a razão pode ser obtida por meio da diferença entre um termo e seu sucessor.

Exemplos:

a) (-7, -4, -1, 2, 5)

Vamos utilizar o 1º e 2º termos para determinar a razão dessa progressão aritmética.

$$r = a_2 - a_1$$

$$r = -4 - (-7) = 3$$

A razão dessa progressão é 3.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

CLASSIFICAÇÃO DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma PA é classificada em:

- **crescente**, quando $r > 0$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo é maior que o anterior;
- **decrescente**, quando $r < 0$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo é menor que o anterior;
- **constante**, quando $r = 0$, ou seja, quando todos os termos têm o mesmo valor.

Exemplos:

a) (2, 4, 6, 8, 10, ...) é uma PA crescente ($r = 2$)

b) (4, 1, -2, -5, -8, ...) é uma PA decrescente ($r = -3$).

c) (-3, -3, -3, -3, -3, ...) é uma PA constante ($r = 0$).

TERMO GERAL DE UMA PA

Em uma PA ($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$) de razão r , podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PA:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$a_3 = (a_1 + r) + r$$

$$a_4 = (a_1 + 2r) + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, chegaremos à conclusão de que o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS



Gravura de Gauss (1777-1855), matemático alemão.

Carl Friedrich Gauss, um dos matemáticos mais influentes da história, nasceu em 1777 em Brunswick, Alemanha. Desde jovem, Gauss mostrou habilidades excepcionais em matemática.

Conta-se que antes de completar 10 anos de idade, em uma aula, seu professor, querendo manter os alunos por um bom tempo em silêncio, pediu que somassem todos os números de 1 a 100, isto é, $1+2+3+4+\dots+99+100$.

Para surpresa do professor, depois de alguns minutos Gauss disse que a soma era 5 050.

Para descobrir o resultado tão rapidamente, Gauss utilizou um raciocínio como veremos a seguir.

Ao agrupar os termos dessa adição de forma conveniente, o resultado dá sempre 101.

$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$

 50 parcelas de 101
 $50 \cdot 101 = 5050$

Assim, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100 = 5\,050$.

Essa história ilustra uma característica muito importante das PAs, como estudaremos a seguir.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A soma dos n primeiros termos de uma PA, sendo conhecidos o primeiro e o último termos da progressão, é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Exemplo: Calcular a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos.

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{45} = \frac{45 \cdot (a_1 + a_{45})}{2}$$

$$S_{45} = \frac{45 \cdot (2 + 90)}{2}$$

$$S_{45} = \frac{45 \cdot (92)}{2}$$

$$S_{45} = \frac{4\,140}{2}$$

$$S_{45} = 2\,070$$

Portanto, a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos é 2 070.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O cometa Halley orbita em torno do Sol. Ele pode ser visto da Terra a olho nu quando está na parte de sua órbita que fica mais próxima do Sol. Isso ocorre, em média, de **76** em **76** anos. Sabendo que após o descobrimento do Brasil, a **terceira** vez que ele foi visto da Terra a olho nu foi em **1683** e a **sétima** vez foi em **1986**, quando foi a quinta vez, após o descobrimento do Brasil, que ele foi visível da Terra a olho nu?

Resolução:

Temos

$$a_3 = 1683$$

$$a_7 = 1986$$

$$r = 76$$

Como $a_5 = a_3 + 2r$, temos que

$$a_5 = 1683 + 2 \cdot 76$$

$$a_5 = 1683 + 152$$

$$a_5 = 1835$$

Portanto, o quinto ano após o descobrimento do Brasil que ele foi visto da Terra a olho nu foi em 1835.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Descrever a sequência (8, 15, 22, 29, 36, ...) por meio da expressão de seu termo geral.

Resolução:

Observe que nessa sequência, cada um dos termos, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com 7. Então, essa sequência é uma PA de razão $r = 7$ e primeiro termo $a_1 = 8$.

O termo geral dessa PA pode ser dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 7$$

$$a_n = 8 + 7n - 7$$

$$a_n = 1 + 7n$$

2

1

Qual é a razão da PA que se obtém inserindo 5 termos entre 2 e 38?

Resolução:

Temos $a_1 = 2$ e $a_7 = 38$.

Como $a_7 = a_1 + 6r$, temos que:

$$38 = 2 + 6r$$

$$6r = 36$$

$$r = 6$$

Logo, a razão da PA é 6.

3

Em uma PA, o 5º termo vale 30 e o 20º termo vale 50. Quanto vale o 8º termo dessa progressão?

Resolução:

Vamos primeiro determinar a razão da PA.

$$a_{20} = a_5 + 15r$$

$$50 = 30 + 15r$$

$$r = 4/3$$

Conhecendo a razão, podemos determinar o 8º termo da progressão.

$$a_8 = a_5 + 3r$$

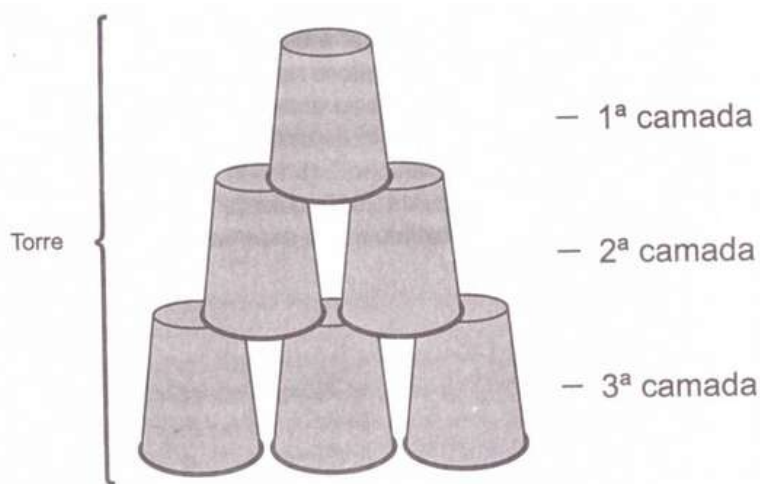
$$a_8 = 30 + 3 \cdot 4/3 = 34$$

Logo, $a_8 = 34$.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(M100728H6) Como passatempo, Felipe empilha copos formando torres. Ele pretende montar uma torre com 31 camadas, de maneira que a quantidade de copos em cada uma das camadas dessa torre siga o padrão representado no desenho abaixo.



A quantidade de copos que Felipe utilizará para montar essa torre com 31 camadas de copos é

- A) 10.
- B) 31.
- C) 481.
- D) 496.
- E) 992.

Atividade 2

(M100721H6) Matheus fez um experimento que necessitou de observação a cada 4 minutos. Ele fez a primeira observação às 08:11h da manhã e a última observação às 08:59h da manhã do mesmo dia. Ao preencher o relatório, ele precisou indicar quantas observações foram feitas ao todo durante esse experimento.

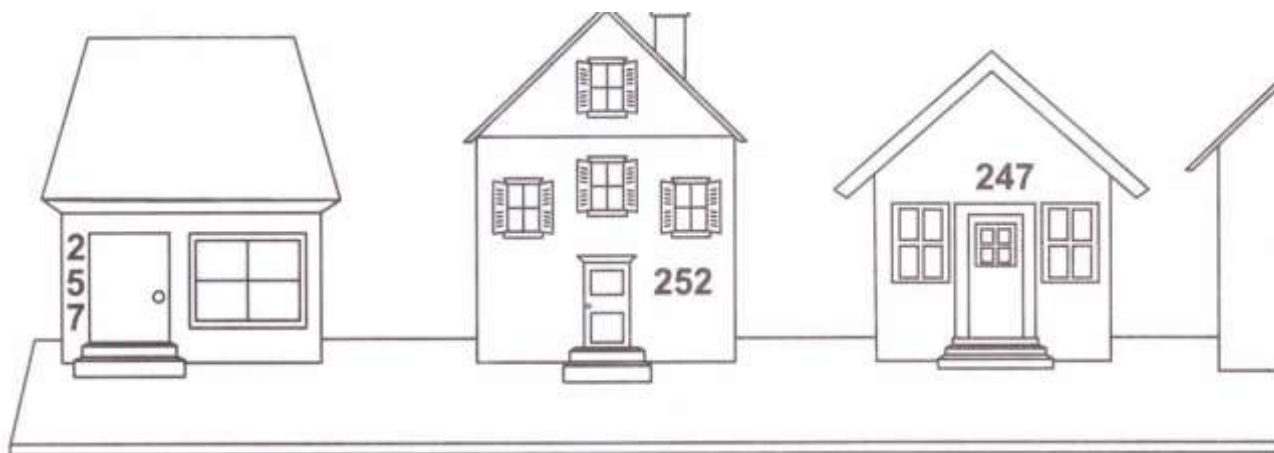
Quantas observações foram feitas por Matheus durante esse experimento?

- A) 2.
- B) 4
- C) 12.
- D) 13.
- E) 48.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 3

(M100725H6) João mora na vigésima casa de uma rua e que foram construídas casas somente em uma das calçadas. A identificação numérica dessas casas forma uma progressão aritmética, sendo 257 o número da primeira. Observe no desenho abaixo, as três primeiras casas dessa rua.



Qual é o número da casa onde João mora?

- A) 157.
- B) 162.
- C) 237.
- D) 281.
- E) 352.

Atividade 4

(M100727H6) Laura comprou um livro de 840 páginas e precisa realizar sua leitura antes de uma prova. Para alcançar seu objetivo, ela elaborou um cronograma de leitura no qual as quantidades de páginas a serem lidas por dia seguem uma progressão aritmética. De acordo com esse cronograma, no primeiro dia de leitura ela deverá ler 13 páginas desse livro e no último dia, 71 páginas.

Seguindo esse cronograma, Laura precisará de quantos dias para ler esse livro?

- A) 10.
- B) 20.
- C) 24.
- D) 29.
- E) 58.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

Uma indústria de peças metálicas onde sua produção da primeira hora do dia até a oitava hora aumenta de modo a obedecer a uma progressão aritmética. Desta forma, a primeira hora produz 20 peças metálicas e no final da oitava hora produz 76 peças e produzindo nessas oito horas um total de 384 peças. De quanto é a razão r que representa o aumento de produção de peças neste caso?

- A) 12
- B) 18
- C) 8
- D) 23
- E) 10

Atividade 6

(M100593H6) Simone deseja comprar um determinado produto. Pesquisando as opções de pagamento em algumas lojas, ela se deparou com uma loja que lhe ofereceu uma opção de financiamento que consiste no pagamento de 24 parcelas mensais, sendo a primeira de R\$ 98,00, a segunda de R\$ 115,00, a terceira de R\$ 132,00, e as demais seguindo esse mesmo padrão de aumento até o final do financiamento.

O valor total, em reais, que Simone pagará por esse produto caso escolha, nessa loja, essa opção de pagamento será

- A) R\$ 345,00.
- B) R\$ 489,00.
- C) R\$ 2 352,00.
- D) R\$ 7 044,00.
- E) R\$ 7 248,00.

Atividade 7

(M100347H6) Paula criou uma conta poupança para seu filho, em que todo ano ela deposita uma quantia. No primeiro ano Paula depositou 100 reais e, a cada ano seguinte, ela deposita o valor depositado no ano anterior mais 80 reais.

O valor depositado nessa conta poupança por Paula no 22º ano, contado da criação dessa conta, é

- A) R\$ 1 780,00
- B) R\$ 1 860,00
- C) R\$ 2 180,00
- D) R\$ 3 960,00
- E) R\$ 9 680,00

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 8

(M100346H6) Um paisagista criou um projeto de um jardim, que consiste em plantar mudas de flores sobre 15 circunferências de mesmo centro e raios distintos. Sobre a primeira circunferência, planta-se 3 mudas; sobre a segunda, planta-se 5 mudas; e assim por diante, de forma que a quantidade de mudas representam os termos de uma progressão aritmética.

O número de mudas de flores que devem ser plantadas nesse jardim, de acordo com esse projeto, é

- A) 31
- B) 34
- C) 255
- D) 465
- E) 510

Atividade 9

(M100054H6) Existem dois telefones instalados ao longo do estacionamento de uma rodovia: um no km 7 e outro no km 167. Entre eles serão instalados novos telefones ao longo dessa rodovia de modo que, a cada 8 km, se tenha um telefone disponível.

Quantos novos telefones serão instalados?

- A) 19
- B) 20
- C) 21
- D) 22
- E) 24

Atividade 10

M100053G5) Paula abriu uma caderneta de poupança e fez um depósito inicial de 200 reais. A partir daí, ela depositou a cada mês 10 reais a mais que o valor depositado no mês anterior, até que o último depósito atingiu o valor de 500 reais. Ao final desses depósitos, qual foi o valor total depositado por Paula em sua caderneta de poupança?

- A) 6 500 reais
- B) 6 700 reais
- C) 10 500 reais
- D) 10 850 reais
- E) 21 700 reais

GABARITO

ATIVIDADE 1: D
ATIVIDADE 2: D
ATIVIDADE 3: B
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: C
ATIVIDADE 6: D
ATIVIDADE 7: A
ATIVIDADE 8: C
ATIVIDADE 9: A
ATIVIDADE 10: D

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Giovanni Júnior, José Ruy. A Conquista da Matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. - 1.ed. - São Paulo : FTD, 2022.

Matemática : ciência e aplicações, volume 1: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Matematicarlos. Disponível em: <https://www.matematicarlos.com/2024/04/vai-faltar-comida-no-mundo-funcao.html>. Acesso em 06 de maio de 2024.

Symbolab. Disponível em: <https://pt.symbolab.com/graphing-calculator>. Acesso em 26 de abril de 2024.