GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO
BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

Matemática

2ª Série | Ensino Médio

18ª Semana

Conceitos de Matemática Financeira. Juros compostos. Funções e gráficos de função exponencial.

DESCRITORES DO PAEBES	**D088_M** Utilizar função exponencial na resolução de problemas. (Descritor do SAEB)
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT303** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EM13MAT304** Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

O PODER DOS JUROS COMPOSTOS

“Os juros compostos são a força mais poderosa do universo”. Há quem atribua essa frase ao grande Albert Einstein, ainda que a sua autoria não seja verdadeiramente conhecida. Não há dúvida, no entanto, sobre a sua veracidade. Se existe uma ferramenta que pode fazer uma grande diferença para as suas finanças, ela com certeza se encontra nos juros compostos. Graças a eles, o seu dinheiro trabalhará para você e as suas economias se multiplicarão pouco a pouco, sem que você precise fazer nada além de ser paciente e disciplinado.

O que são os juros compostos?

O que exatamente são os juros compostos? Algo tão simples quanto reinvestir os juros gerados pelo seu investimento. Por isso mesmo a forma mais simples de definir os juros compostos é compará-los aos juros simples.

Os juros simples são calculados sempre sobre o mesmo valor investido e nunca geram novos juros. Para entender melhor, imagine que você tenha 1.000 reais para investir a uma taxa de 10% ao ano. Em um ano você ganhou 100 reais que usa para atender uma vontade. No ano seguinte, você volta a investir esses mesmos 1.000 reais. Qual será o seu lucro? O mesmo que no primeiro ano e continuará assim ano após ano. Isso é juros simples.

E se em vez de gastar o dinheiro, você o reinvestisse? Isso é exatamente o que faz os juros compostos. Em vez de gastar os 100 reais de lucro, você os mantém e soma ao capital investido. Assim sendo, em vez de investir 1.000 reais, você investirá 1.100 reais e o lucro já não é mais de 100 reais, mas sim de 110 reais. A chave para os juros compostos é que os juros gerados serão somados ao capital inicial, criando um efeito bola de neve.

Texto adaptado do site da Fundación MAPFRE

Neste material vamos compreender como os juros compostos se associam ao estudo da função exponencial.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

"JUROS SOBRE JUROS"

O conceito de juros associa-se ao uso por uma pessoa (física ou jurídica) do patrimônio financeiro de uma outra pessoa (física ou jurídica). Por exemplo, quando um cidadão toma dinheiro emprestado de um banco, ele se compromete a pagar, após certo tempo, o valor emprestado **acrescido de uma remuneração**. Essa remuneração paga pela pessoa ao banco chama-se juro. No caso dos juros compostos, pensamos em um sistema de capitalização que a taxa percentual, que incide em determinado mês, será sempre sobre o montante ao final daquele mês. Vejamos:

EXEMPLO:

Roberto possui uma quantia de R$ 500,00 para aplicar em um investimento, que rende taxa de juros mensais de 1%. Ele resolve aplicar o dinheiro durante 4 meses, no sistema de capitalização composta. Qual quantia resgatada por Roberto, ao final da aplicação?
C = 500
taxa (i) = 1% ao mês = 0,01
t = 4 meses

Vamos entender o que acontece durante esses quatro meses na aplicação.
No **1º mês**: Na quantia de R$ 500,00 multiplicamos o fator de 1,01, que representa o acréscimo de 1% naquele mês, ou seja, o valor de 100% + 1%

$$M_1 = 500 \cdot 1,01$$

No **2º mês**: Ao valor obtido no mês anterior **(montante)** multiplicamos novamente pelo fator 1,01. Lembre-se, no sistema de capitalização composta, aplicamos **juros sobre juros**.

$$M_2 = 500 \cdot 1,01 \cdot 1,01 = 500 \cdot (1,01)^2$$

No 3**º mês**: Ao valor obtido no mês anterior **(montante)** multiplicamos novamente pelo fator 1,01.

$$M_3 = 500 \cdot 1,01 \cdot 1,01 \cdot 1,01 = 500 \cdot (1,01)^3$$

No 4**º mês**: Ao montante obtido no 3º mês, multiplicamos novamente pelo fator 1,01.

$$M_4 = 500 \cdot 1,01 \cdot 1,01 \cdot 1,01 \cdot 1,01 = 500 \cdot (1,01)^4$$

Resolvendo a potência $(1,01)^4$ e multiplicando por 500, obtemos o valor final aproximado de R$ 520,30.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

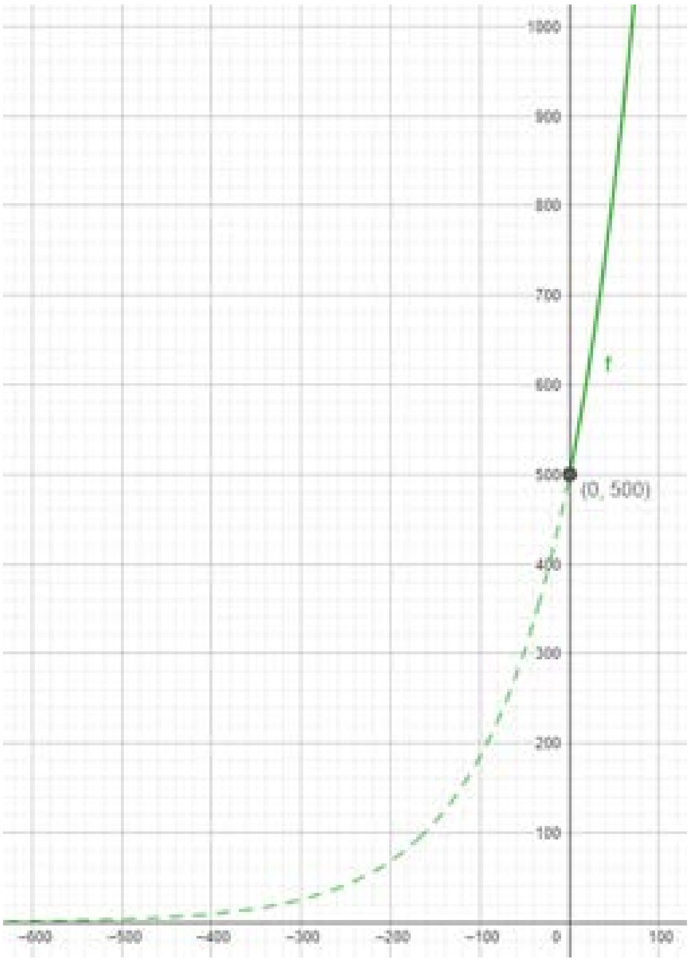
RELACIONANDO O CÁLCULO DE JUROS À FUNÇÃO EXPONENCIAL

No exemplo anterior, para determinarmos a quantia final de Roberto, após os 4 meses de aplicação, podemos utilizar a fórmula geral para o cálculo de juros compostos:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Em que:
M é o montante
C é o capital
i é a taxa de juros na forma decimal
t é o tempo.

No cálculo de Juros compostos, a variável é o tempo, que influenciará no juros que serão gerados. Assim, podemos relacionar o **cálculo de juros compostos com a função exponencial**, caracterizando o crescimento dos juros compostos como um crescimento exponencial.



Na imagem, a função **f**, corresponde à expressão $M = C \cdot (1 + i)^t$. Especificamente, representamos o exemplo em que Roberto investiu 500 reais a uma taxa de 1% ao mês, no sistema de capitalização composta. A parte pontilhada não faz parte da função, pois não estamos considerando o tempo negativo. Mas foi mantida na imagem, pois permite a visualização da curva idêntica à da função exponencial.

A comparação do cálculo de Montante com uma função exponencial é possível quando pensamos no **tempo (x)** , como nosso **conjunto domínio** e o **montante (y = f(x))** como nosso **conjunto imagem**.

COLEÇÃO CONSCIENTE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Prezado(a) professor(a),

O trabalho a ser desenvolvido por meio do presente Material Estruturado também utilizará o livro **Coleção Consciente de Educação Financeira** (2ª série do Ensino Médio) da autora Josi Gomes de Barros. O referido livro foi distribuído para os estudantes das escolas da rede estadual.

Na Unidade 1 - Planejando a vida financeira, página 27, os estudantes deverão fazer o exercício 4.

SUGESTÃO DE ATIVIDADE PEDAGÓGICA

VALE A PENA FINANCIAR?

Financiamento de motos registra crescimento de 20,9% em 2023. Crédito para veículos de duas rodas tem alta pelo segundo ano consecutivo, de acordo com dados da B3. As vendas financiadas de veículos em 2023 somaram 5,9 milhões de unidades, entre novos e usados, de acordo com dados da B3. O número, que inclui autos leves, motos e pesados em todo o país, representa um crescimento de 10% na comparação 2022.

"O crescimento de 10% em 2023 mostra uma recuperação do mercado de financiamento de veículos após a queda registrada em 2022. Além da medida provisória do governo de incentivo ao setor automotivo, a ampliação da oferta de crédito, com os índices de inadimplência sob controle, e a redução das taxas de juros desempenharam papéis preponderantes nessa retomada", comenta Gustavo de Oliveira Ferro, gerente de Planejamento e Inteligência de Mercado na B3.

O preço à vista, na versão mais simples, é R$ 16 890,00. Existe a opção de pagar 48 parcelas de R$ 490,00 sem entrada. Desse modo, no pagamento parcelado o total devido será de R$ 23.520,00 e, portanto, os juros totalizarão R$ 6 630,00. Sabemos que a compra de um veículo é o sonho de muitas pessoas e que uma das principais hipóteses para o crescimento dos financiamentos é devido ao desemprego e à necessidade de muitos brasileiros trabalharem de forma autônoma, por meio de aplicativos de transportes de pessoas e produtos, por exemplo. Porém, é necessário que algumas reflexões sejam feitas antes de optar por um financiamento.

Reflita sobre essas questões e pesquise estratégias alternativas ao financiamento ou, ainda, se o financiamento for necessário, quais são as melhores opções e cuidados a serem tomados.

a) Registre aqui algumas estratégias alternativas ao financiamento.

____

____

____

b) Registre aqui os cuidados a serem tomados ao financiar um veículo.

____

____

____

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1

A quantia de R$ 400,00 é emprestada a uma taxa de juros de 12% ao mês. Aplicando-se juros compostos, qual será o valor que, dois meses depois, deverá ser pago para quitação da dívida? Qual o valor dos juros cobrados?

Sugestão de Resolução 1:

Capital: R$ 400,00
taxa: 12% ao mês = 0,12
tempo: 2 meses
Montante: M

$M_1 = 400 . (1,12) = 448$
$M_2 = 400 . (1,12) . (1,12) = 501,76$

O valor a ser pago é de R$ 501,76.
O valor dos juros é:
$J = M - C$
$J = 501,76 - 400 = 101,76$

Sugestão de Resolução 2:

Capital: R$ 400,00
taxa: 12% ao mês = 0,12
tempo: 2 meses
Montante: M

$M = C . (1 + i)^t$

$M = 400 . (1 + 0,12)^2$

$M = 400 . (1,12)^2$

$M = 400 . 1,44$

$M = 501,76$

O valor a ser pago é de R$ 501,76.

O valor dos juros é:
$J = M - C$
$J = 501,76 - 400 = 101,76$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2

Por um empréstimo de R$ 700,00, à taxa de 10% ao mês, foi pago, de uma única vez, após t meses, o montante de R$ 847,00. Sabendo-se que foram aplicados juros compostos, determine o valor de t.

Sugestão de Resolução:
Capital: R$ 700,00
taxa: 10% ao mês = 0,10 = 0,1
tempo: t meses
Montante: R$ 847,00

Aplicando na fórmula de juros compostos, temos:

$847 = 700 \cdot (1{,}1)^t$

$\frac{847}{700} = (1{,}1)^t$

$1{,}21 = (1{,}1)^t$

Nessa situação, recorremos aos conhecimentos adquiridos no estudo de **equações exponenciais**. Devemos igualar as bases para que os expoentes sejam iguais.

$(1{,}1)^2 = (1{,}1)^t$
$2 = t$
Logo, o pagamento foi realizado 2 meses após ter sido feito o empréstimo.

3

Aplica-se um capital de R$ 50 000,00 a juros compostos com taxa de 4% ao mês. Qual será aproximadamente o montante acumulado em 3 anos? (Dado: considere $(1{,}04)^{36} = 4{,}10$)

Sugestão de Resolução:
Capital: R$ 50.000,00
taxa: 4% ao mês = 0,04
tempo: 3 anos = 36 meses
Montante: M

$M = 50.000 \cdot (1{,}04)^{36}$
$M = 50.000 \cdot 4{,}10$
$M = 205.000$

O montante é de R$ 205.000,00.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

4

Claudio fez um investimento de R$ 2.500,00, a uma taxa de 1,5% ao mês. Ao final, resgatou um montante de R$ 3.306,25. Qual o período, em meses, dessa aplicação?

Sugestão de Resolução:
Montante: R$ 2.575,56
Capital: R$ 2.500,00
taxa: 1,5% ao mês = 0,015
tempo: t meses

Aplicando na fórmula de juros compostos, temos:

$2.575,56 = 2.500 \cdot (1,015)^t$

$\frac{2.575,26}{2.500} = (1,015)^t$

$1,030225 = (1,015)^t$

$(1,015)^2 = (1,015)^t$
$2 = t$
O tempo de aplicação é de 2 meses.

5

(ENEM/2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800 \cdot (1,03)^t$.
De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,
a) 7 416,00
b) 3 819,24
c) 3 709,62
d) 3 708,00
e) 1 909,62.

Sugestão de Resolução:
$S(2) = 1800 \cdot (1,03)^2$
$S(2) = 1800 \cdot 1,0609$
$S(2) = 1909,62$

Letra E.

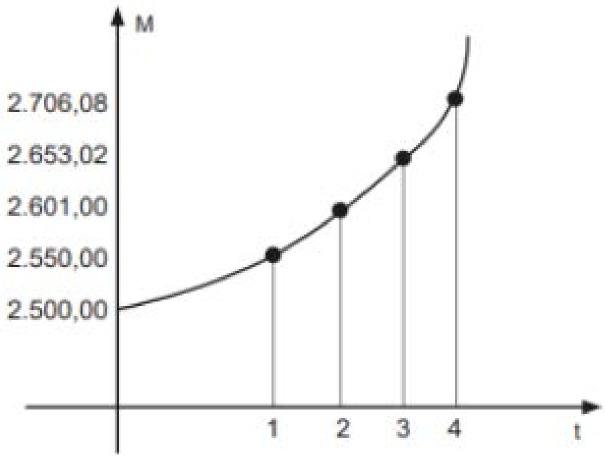
Atividade 1

Um capital de R$ 4.500,00 foi aplicado, a juros compostos, em um investimento, durante 2 anos, a uma taxa de 15% ao ano. O montante gerado ao término desse tempo será de:

A) R$ 6.580,00.
B) R$8.480,25.
C) R$4.450,00.
D) R$8.980,45.
E) R$5.951,25.

Atividade 2

Maria Eduarda investiu R$ 2.500,00 e, após quatro meses, obteve um montante de R$ 2.706,08.



Observe que o capital aplicado cresce exponencialmente em função do tempo. Determine o valor dos juros no investimento de Maria Eduarda nesses quatro primeiros meses.

A) R$ 301,08.
B) R$ 271,09.
C) R$ 206,08.
D) R$ 198,06.
E) R$ 156,08.

Atividade 3

Um investidor aplica R$ 1 000,00 a juros compostos de 1% ao mês, sem qualquer tipo de desconto. Ao final de dois anos, esse investidor terá, nessa aplicação, em reais:

A) $1\,000.(1{,}1)^{23}$
B) $1\,000.(1{,}1)^{24}$
C) $1\,000.(1{,}1)^{25}$
D) $1\,000.(1{,}01)^{23}$
E) $1\,000.(1{,}01)^{24}$

Atividade 4

Em um depósito a prazo efetuado em um banco, o capital acumulado ao fim de certo tempo é dado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^{t}$, em que C representa o capital acumulado, D o valor do depósito, t a taxa de juros ao ano e n o número de anos. Supõe-se que, ao final de cada ano, os juros capitalizados sejam sempre acumulados ao depósito. Para um depósito de R$ 2000,00, a uma taxa de 12% ao ano, qual o capital acumulado ao final de 5 anos?

A) 3245,67
B) 3297,80
C) 3524,68
D) 3652,68
E) 3678,45

Atividade 5

A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando C seu capital inicial, a expressão que fornece esse capital M, ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem, é:

A) $M = C\ (1{,}1)^{t}$
B) $M = C\ (1{,}1)^{t}$
C) $M = C\ (0{,}1)^{t}$
D) $M = C(0{,}1)^{t}$
E) $M = C.(10)^{t}$

Atividade 6

Um capital de R$ 10.000,00 será aplicado à taxa de juros compostos de 50% a.m. Por quanto tempo esse capital deve ser aplicado para que seja resgatado o valor de R$ 3375,00?

A) 1 meses
B) 2 meses
C) 3 meses
D) 4 meses
E) 5 meses

Atividade 7

Uma pessoa tem uma dívida no valor de R$2.000,00, vencendo no dia de hoje. Com dificuldade de quitá-la, pediu o adiamento do pagamento para daqui a 3 meses. Considerando-se uma taxa de juros compostos de 2% a.m., qual é o valor equivalente, aproximadamente, que o gerente do banco propôs que ela pagasse, em reais?

A) 2.020,40
B) 2.040,00
C) 2.080,82
D) 2.120,20
E) 2.122,42

Atividade 8

Analistas do mercado imobiliário preveem que o valor v (em reais) de um imóvel localizado no litoral seja dado pela lei: $v(t) = 120.000 \cdot (0,9)^t$, em que t é o número de décadas (10 anos) contadas a partir de hoje.

a) Qual é, em reais, a desvalorização desse imóvel da primeira para a segunda década?

b) Qual é a desvalorização percentual do imóvel por década?

RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

Atividade 1

$M = 4500 \cdot (1 + 0{,}15)^2$
$M = 4500 \cdot 1{,}3225$
$M = 5951{,}25$
Letra E

Atividade 2

O valor investido por Maria foi de R$ 2500,00. Ao final dos 4 meses, ela obteve um montante de R$ 2706,08. Assim, o juros do investimento é de R$ 206,08.

Letra C

Atividade 3

Substituindo os valores na expressão do montante $M = C \cdot (1 + i)^t$
Temos que:
$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}01)^{24} = 1000 \cdot (1{,}01)^{24}$

Letra E

Atividade 4

Substituindo os dados informados no problema na fórmula, temos
$M = C \cdot (1 + i)^t$
$C = 2000 \cdot (1 + 0{,}12)^5$
$C = 2000 \cdot (1{,}12)^5$
$C = 3524{,}68$
Letra C

Atividade 5

Conforme os dados apresentados no enunciado, temos
$M = C\,(1{,}1)^t$

Letra A

Atividade 6

$33750 = 10000.(1 + 0,5)^t$

$\frac{33750}{10000} = (1 + 0,5)^t$

$3.375 = (1,5)^t$

$(1,5)^3 = (1,5)^t$

t = 3 anos

Letra C

Atividade 7

$M = 2000 . (1 + 0,02)^3$

$M = 2000 . (1,02)^3$

M = 2000 . 1,061208

M = 2.122,42

Letra E

Atividade 8

a) $v(1) = 120.000 .(0,9)^1$

v(1) = 108.000

$v(2) = 120.000 . (0,9)^2$

v(2) = 120.000 . 0,81

v(2) = 97.200

v(1) - v(2) = 108.000 - 97.200 = 10.800.

b)

Resolução 1

$\frac{108.000}{120.000}$ = 0,9% = 90%. Houve uma redução de 10% no valor de uma década para a outra.

Resolução 2

12.000 (120.000-108.000)

12.000 ______________ x

120.000_____________ 100%

x = 10%.

GABARITO

ATIVIDADE 1: E
ATIVIDADE 2: C
ATIVIDADE 3: E
ATIVIDADE 4: C
ATIVIDADE 5: A
ATIVIDADE 6: C
ATIVIDADE 7: E

REFERÊNCIAS

Lezzi, Gelson, [et al.]. Matemática: Volume único. 4 ed. - São Paulo: Atual, 2007

MUNIZ, Carla. Dostoiévski: biografia e resumo das principais obras. **Toda Matéria**, 2019. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/dostoievski/. Acesso em: 25 set. 2019.

Paiva, Manoel. Matemática: Paiva/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

Smole, Kátia Cristina Stocco. Matemática: ensino médio: volume 1/ Kátia Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz - 6 ed. - São Paulo: Saraiva, 2010.