

Matemática

2ª Série | Ensino Médio

17ª Semana



Resolvendo problemas
envolvendo
Funções Exponenciais



DESCRIPTORES DO PAEBES	D088_M Utilizar função exponencial na resolução de problemas.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRIPTORES	EM13MAT304 Resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	EF09MA03/ES Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários e decimais (radiciação).

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



Técnicos orientando o carregamento de lixo radioativo depois do acidente com o cézio-137. Goiânia-GO. Fotografia de 1987.

O MAIOR ACIDENTE RADIOATIVO DO BRASIL

Em um acidente radioativo ocorrido no dia 13 de setembro de 1987, em Goiás, centenas de pessoas foram contaminadas acidentalmente por meio das radiações emitidas por uma cápsula que continha cézio-137. Foi o **maior acidente radioativo do Brasil** e o **maior do mundo ocorrido fora das usinas nucleares**. Dois catadores de lixo vasculhavam as antigas instalações do Instituto Goiano de Radioterapia. No local eles encontraram um aparelho de radioterapia. Removeram a máquina e levaram-na até a casa de um deles. Estavam interessados nas partes de metal e chumbo, que podiam ser vendidas em ferros-velhos da cidade; desconheciam completamente aquela máquina e o que havia em seu interior.

No período da desmontagem da máquina, foram expostos ao ambiente 19,26 g de cloreto de cézio-137 (CsCl). A peça foi vendida a um proprietário de ferro-velho. Crendo estar diante de algo sobrenatural, o dono do ferro-velho passou quatro dias recebendo amigos e curiosos interessados em conhecer o pó brilhante. Muitos levaram para casa pedrinhas da substância. Parte do equipamento de radioterapia foi para outro ferro-velho, de forma que gerou uma enorme contaminação com o material radioativo. Após o acidente, cerca de 60 pessoas morreram vítimas da contaminação, entre elas funcionários que realizaram a limpeza do local. O Ministério Público reconhece apenas 628 vítimas contaminadas diretamente, mas a Associação das Vítimas do Césio-137 calcula um número superior a 6 mil pessoas atingidas pela radiação.

Sabendo que o acidente radioativo foi em 1987 e que o local do acidente só poderá ser habitado novamente quando a quantidade de cézio-137 se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{32}$ da quantidade inicialmente presente, então o local poderá ser reabitado a partir de que ano?

Questões como essa são resolvidas utilizando o conhecimento de função exponencial, que é o assunto deste material estruturado.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

Nos materiais estruturados anteriores estudamos a função exponencial e seu gráfico.

Vimos que:

- uma função exponencial é representada por $f(x) = a^x$ para todo x real;
- a base **a** da função é um número positivo diferente de 1;
- para $0 < a < 1$ a função exponencial é decrescente;
- para $a > 1$ a função exponencial é crescente;
- o gráfico da função exponencial é uma figura chamada curva exponencial;
- podemos obter funções a partir da função exponencial com semelhança gráfica, do tipo $f(x) = a^x + b$ e $f(x) = b \cdot a^x$.

Neste material vamos estudar a aplicação da função exponencial e como utilizar o que aprendemos na resolução de problemas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- 1** Numa cultura de bactérias existem, inicialmente, 20.000 bactérias presentes e a quantidade N , após t minutos, é dada pela função $N(t) = 20000 \cdot 3^{0,6t}$. Qual é a quantidade de bactérias nessa cultura após 10 minutos?

Resolução:

Para encontrar a quantidade de bactérias após 10 minutos, podemos substituir $t = 10$ na função $N(t)$:

$$N(10) = 20\,000 \cdot 3^{0,6t}$$

$$N(10) = 20\,000 \cdot 3^{0,6(10)}$$

$$N(10) = 20\,000 \cdot 3^6$$

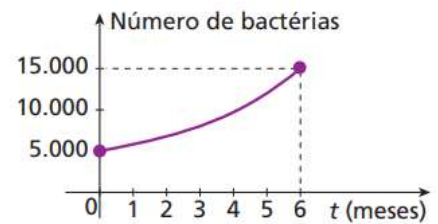
$$N(10) = 20\,000 \cdot 729$$

$$N(10) = 14\,580\,000$$

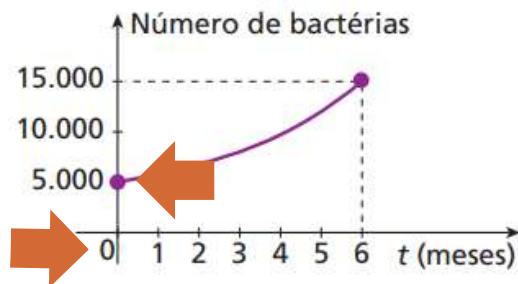
Portanto, após 10 minutos, a quantidade de bactérias na cultura é de 14 580 000 bactérias.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- 2 Em uma pesquisa, obteve-se o gráfico ao lado, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias no decorrer de 6 meses. Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa?



Resolução:



O início da pesquisa é $t = 0$.

Para $t = 0$, o número de bactéria é 5 000.

Portanto, no início da pesquisa haviam **5 000 bactérias**.

- 3 Em determinada cidade, o número de habitantes é dado pela função H , sendo $H(r) = k \cdot 2^{3r}$, em que k é constante e r (que é o raio de distância a partir do centro dessa cidade) é positivo e dado em quilômetro.

Sabendo que existem 12 288 habitantes em um raio de 4 km contados desde o centro, quantos habitantes há em um raio de 6 km?

Resolução:

Primeiramente, empregando a função dada, precisamos descobrir o valor da constante k :

$$H(r) = k \cdot 2^{3r}$$

$H(r) = 12\,288$ habitantes quando $r = 4$ km. Substituindo, temos:

$$12\,288 = k \cdot 2^{3(4)}$$

$$12\,288 = k \cdot 2^{12}$$

$$12\,288 = k \cdot 4\,096$$

$$\frac{12\,288}{4\,096} = k$$

$$3 = k$$

$$k = 3$$

Assim, para calcular o número de habitantes em um raio de 6 km, substituímos a constante k por 3 e o raio r por 6.

$$H(r) = k \cdot 2^{3r}$$

$$H(6) = 3 \cdot 2^{3(6)}$$

$$H(6) = 3 \cdot 2^{18}$$

$$H(6) = 786\,432$$

Portanto, há 786 432 pessoas em um raio de 6 km.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- 4 A principal forma de reprodução das bactérias é a divisão binária. Nesse tipo de divisão, o material genético é duplicado, e a bactéria se divide ao meio, originando duas novas bactérias idênticas a ela. Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, duplica a cada 20 minutos, quantas bactérias existirão após 2 horas e 40 minutos?

Uma resolução:

Após um período de 20 minutos, teremos 2 bactérias. Após dois períodos de 20 minutos, ou seja, 40 minutos, teremos 4 bactérias. Vamos fazer um esquema:

1 período de 20 min	→	2 bactérias	→	2^1
2 períodos de 20 min	→	4 bactérias	→	2^2
3 períodos de 20 min	→	8 bactérias	→	2^3
4 períodos de 20 min	→	16 bactérias	→	2^4

Então, após 2 horas e 40 minutos, ou seja, após 8 períodos de 20 minutos, teremos 256 bactérias.

- 5 O tempo de meia-vida de uma substância radioativa é de 9h.
- Escreva uma expressão que representa a quantidade dessa substância em função da quantidade inicial e do tempo.
 - Se uma amostra dessa substância tem inicialmente 640g, quantos gramas restarão após 36 horas?

Resolução:

a) Observe a tabela:

Q(quantidade da substância)	T(tempo em horas)
Q_0	$0 = 0 \cdot 9$
$Q_0 \cdot \frac{1}{2}$	$9 = 1 \cdot 9$
$Q_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$18 = 2 \cdot 9$
$Q_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$27 = 3 \cdot 9$
...	...
$Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$t = n \cdot 9$

A meia vida de um elemento radioativo é o intervalo de tempo em que uma amostra deste elemento se reduz à metade.

O tempo t é dado por n períodos de 9 horas

A quantidade inicial da substância cai pela metade n vezes.

A partir da última linha da tabela, coluna "Tempo", podemos concluir que $n = t/9$. Substituindo essa equação na expressão algébrica da última linha, coluna "Quantidade da substância", temos que a quantidade de substância em função do tempo ($Q(t)$) é dada por:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{9}}$$

- b) Pela relação encontrada anteriormente, temos $Q(36) = 640 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{36}{9}} = 640 \cdot \left(\frac{1}{16}\right) = 40$
Restarão 40 gramas após 6 horas.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(M120200A8) Joana, que estava com o bolso cheio de sementes, resolveu brincar ao subir a escada do prédio em que mora. No primeiro degrau, ela colocou uma semente; no segundo degrau, ela colocou duas sementes; no terceiro, quatro sementes; e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de sementes colocadas no degrau anterior.

Mantendo-se essas condições, quantas sementes Joana colocou no décimo degrau dessa escada?

- A) 20 sementes.
- B) 200 sementes.
- C) 512 sementes.
- D) 1 024 sementes.
- E) 2 000 sementes.

Atividade 2

(M120575A9) Os médicos usam a fórmula $y = 4(0,5)^x$ para calcular a quantidade de y (mg) de um medicamento no sangue de um pessoa após x horas de sua ingestão.

Qual é a quantidade desse medicamento no sangue de uma pessoa, 2 horas após sua ingestão?

- A) 1,0 mg
- B) 1,5 mg
- C) 2,0 mg
- D) 2,5 mg
- E) 4,0 mg

Atividade 3

(M120237A9) O crescimento da população de uma cidade pode ser previsto pela lei $P(t) = 20(1,4)^t$, em que P é a população, em milhões de pessoas, e t é o número de anos decorridos. A população atual é obtida para $t = 0$.

Qual será aproximadamente a população dessa cidade daqui a 3 anos?

- A) 20 milhões.
- B) 39,2 milhões.
- C) 54,8 milhões.
- D) 76,8 milhões.
- E) 84 milhões.

Atividade 4

(M100036B1) A população de uma cidade é prevista segundo a expressão $P = 20\,000(1,2)^{\frac{t}{10}}$, em que t é o número de anos decorridos a partir do ano 2 000.

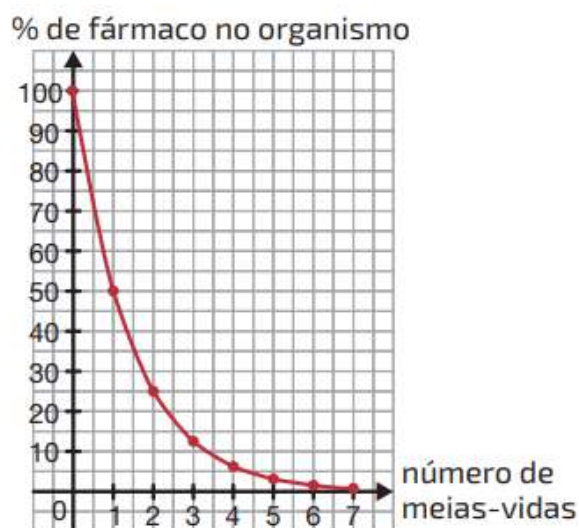
Qual é a população prevista nessa cidade no ano 2 020?

- A) 24 000
- B) 28 800
- C) 48 000
- D) 240 000
- E) 288 000

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

(Enem, 2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher I. Wannma. *Farmacologia Clínica*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será aproximadamente de:

- A) 10%
- B) 15%
- C) 25%
- D) 35%
- E) 50%

Atividade 6

(UFMG, 2004) A população de uma colônia da bactéria **E. coli** dobra a cada 20 minutos. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1 000 bactérias por mililitro. No final do experimento, obteve-se um total de $4,096 \cdot 10^6$ bactérias por mililitro.

Assim, o tempo do experimento foi de:

- A) 3 horas e 40 minutos.
- B) 3 horas.
- C) 3 horas e 20 minutos.
- D) 4 horas.

Atividade 7

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

(SEAPE) Em uma experiência em um laboratório, uma população de ratazanas apresentou um crescimento exponencial por um determinado período. Durante esse tempo, o número de ratazanas podia ser calculado por meio da função $N(t) = 9 \cdot 3^{\frac{4t}{300}}$, onde t é o tempo dado em dias. Ao final desse período, a população de ratazanas era de 27 indivíduos. Por quanto tempo essa população de ratazanas apresentou esse crescimento exponencial?

- A) 10 dias.
- B) 27 dias.
- C) 75 dias.
- D) 150 dias.
- E) 375 dias.

Atividade 8

(PAEBES) A evolução prevista para uma certa cultura de bactérias é dada por $N(t) = 2 \cdot 3^t$, em que N é o número de bactérias, e t é o tempo em anos.

Qual será o tempo necessário para que o número de bactérias seja de 486?

- A) 1 ano.
- B) 2 anos.
- C) 3 anos.
- D) 4 anos.
- E) 5 anos.

Atividade 9

(APA-CE) Em uma determinada região do Nordeste, a área territorial onde acontecem queimadas tem aumentado consideravelmente nos últimos anos, conforme a lei da função $y = 2^x \cdot 300$, em que y representa a área, em metros quadrados, onde acontecem as queimadas e a variável x representa o tempo em anos.

Em quanto tempo a área onde acontecem as queimadas chegará a 1200 m²?

- A) 1 ano.
- B) 2 anos.
- C) 3 anos.
- D) 4 anos.
- E) 12 anos.

Atividade 10

(SAEPE) Estudos indicam que o número N de camarões criados em cativeiro, decorridos x meses, é dado pela fórmula $N(x) = 500 \cdot 2^{0,5x}$.

Qual é a quantidade de camarões criados em cativeiro após 10 meses?

- A) 1 000.
- B) 2 000.
- C) 3 200.
- D) 5 000.
- E) 16 000.

GABARITO

ATIVIDADE 1: C

ATIVIDADE 2: A

ATIVIDADE 3: C

ATIVIDADE 4: B

ATIVIDADE 5: D

ATIVIDADE 6: D

ATIVIDADE 7: C

ATIVIDADE 8: E

ATIVIDADE 9: B

ATIVIDADE 10: E

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Giovanni Júnior, José Ruy. A Conquista da Matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. - 1.ed. - São Paulo : FTD, 2022.

Matemática : ciência e aplicações, volume 1: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.