Matemática

3ª Série | Ensino Médio

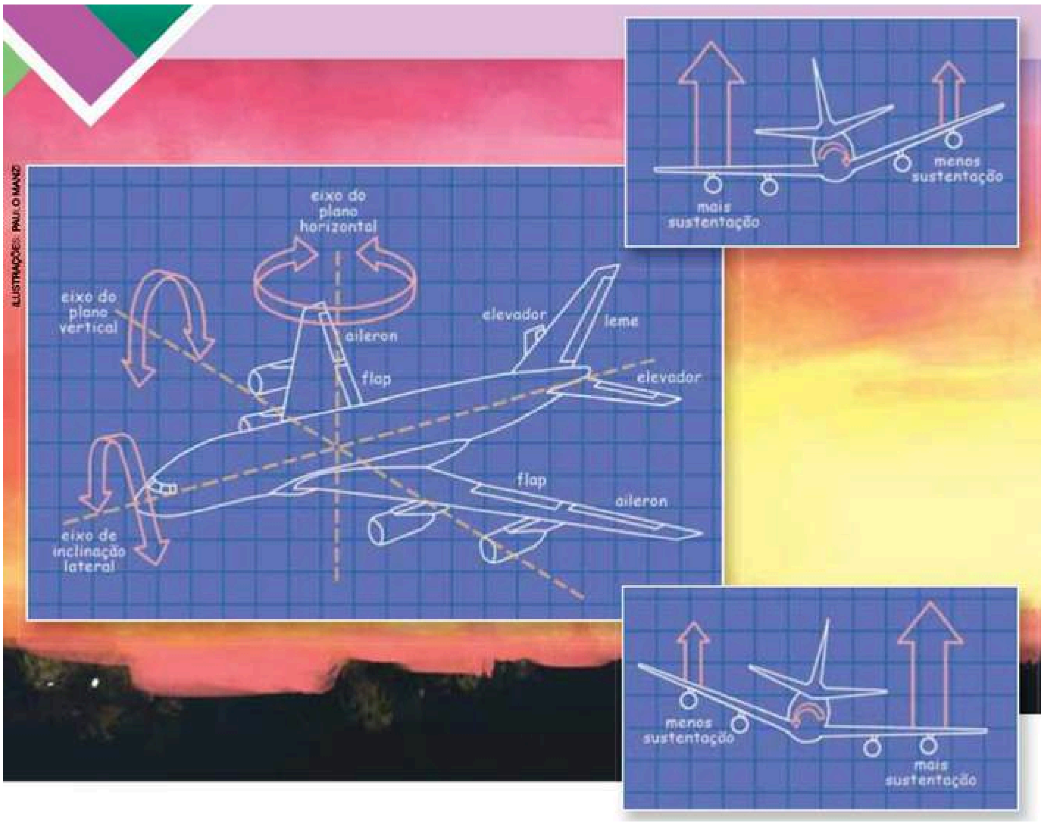
20ª Semana

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: ÁREA TOTAL

DESCRITORES DO PAEBES	**D129_M** Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT309** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**D058_M** Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



A sustentabilidade no ar e a forma aerodinâmica de um avião são frutos do conhecimento humano construído durante milhares de anos.

A forma da fuselagem e das asas, a posição relativa do plano do leme e do plano das pequenas asas traseiras exemplificam o uso de conceitos e relações geométricas na aerodinâmica de um avião.

As asas do avião formam um ângulo que, na Geometria, é conhecido por ângulo **diedro**; graças a ele, quando o avião se inclina, a asa na posição inferior adquire maior sustentação, o que o leva de volta à posição horizontal em uma manobra de estabilização durante o voo.

Neste material, vamos estudar alguns elementos constitutivos da Geometria no espaço tridimensional: **os sólidos geométricos,** focando nos **poliedros** e **corpos redondos** e dando continuidade aos estudos de áreas.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

Nas semanas 17 e 18 nós estudamos como calcular a área de polígonos. Dentre os polígonos que estudamos, destacamos para recordar:

- **ÁREA DO QUADRADO:** $A = l^2$
- **ÁREA DO RETÂNGULO:** $A = b.h$
- **ÁREA DO TRIÂNGULO:** $A = \frac{b.h}{2}$
- **ÁREA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO:** $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
- **ÁREA DO HEXÁGONO REGULAR:** $A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$

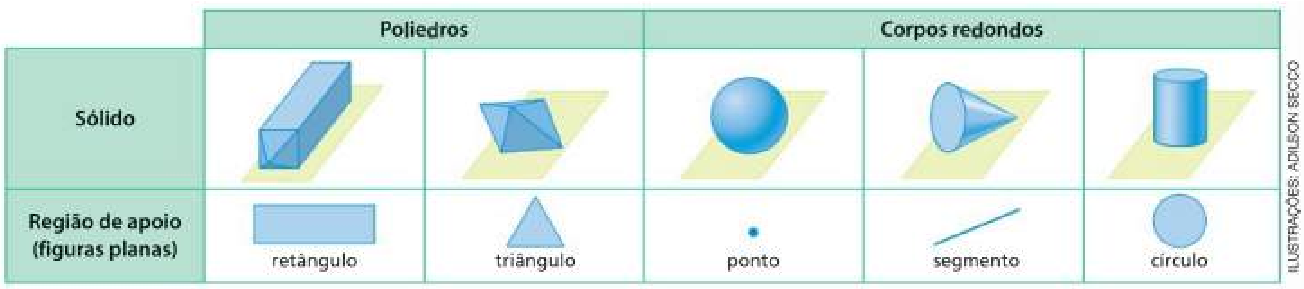
Neste material veremos que é possível calcular também a área de sólidos geométricos, uma vez que a suas faces são polígonos. Por isso, dizemos que calculamos a área total dos sólidos geométricos.
Você lembra o que são sólidos geométricos?

OS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Olhando ao redor, observamos diversos objetos que lembram figuras geométricas planas e não planas. As linhas e as superfícies podem ser planas ou não planas, ao passo que os sólidos são sempre não planos.
Embora os sólidos geométricos exibam formas bastante diversas, é possível classificá-los em três grandes grupos:

- poliedros;
- corpos redondos;
- outros.

Veja nos quadros a seguir algumas figuras planas que podem ser obtidas de alguns sólidos geométricos.



A seguir, vamos estudar um dos tipos de sólidos geométricos: os poliedros.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

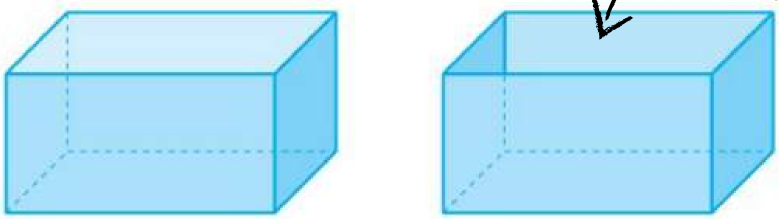
OS POLIEDROS

Todo poliedro apresenta uma superfície chamada **superfície poliédrica fechada**.

> Uma superfície poliédrica fechada é composta de um número finito (maior ou igual a quatro) de superfícies poligonais planas, de modo que cada lado de uma dessas superfícies coincida com apenas um lado da outra.

Observe as figuras abaixo.

superfície não é fechada na parte superior.



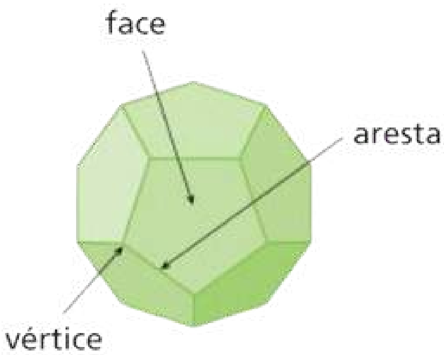
Entre essas duas figuras, apenas a da esquerda representa uma superfície poliédrica fechada.

Considerando que uma superfície poliédrica fechada delimita uma porção do espaço em seu interior, vamos definir o que é um poliedro

> Poliedro (do grego *poli*, "muitas, várias", e *edro*, "face") é o sólido geométrico formado pela reunião de uma superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela.

- **ELEMENTOS DE UM POLIEDRO**

Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:



FACE
É cada uma das superfícies poligonais que compõem a superfície do poliedro.

ARESTA
É o lado comum a duas faces.

VÉRTICE
É o ponto comum a três ou mais arestas.

Um poliedro costuma ser nomeado de acordo o número de faces que possui. Para isso, justapõem-se dois elementos: um de origem grega, indicativo do número de faces, e o elemento de composição edro. Por exemplo, um poliedro de 4 faces chama-se tetraedro: tetra (4) + edro (face).

Veja no quadro abaixo alguns dos nomes de poliedros:

Número de faces	4	5	6	7	8	12	20
Nome do poliedro	tetraedro	pentaedro	hexaedro	heptaedro	octaedro	dodecaedro	icosaedro

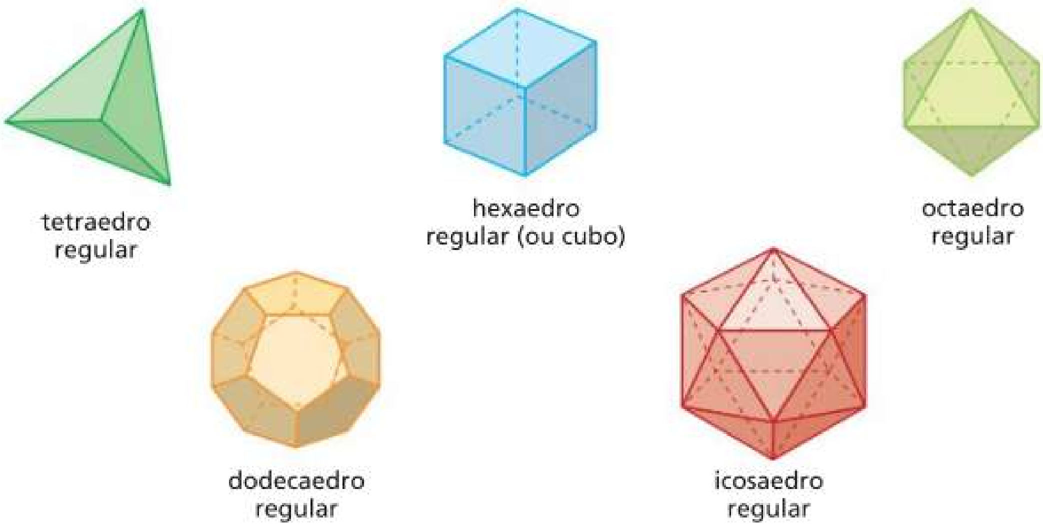
CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **POLIEDROS REGULARES**

Um poliedro convexo é regular quando satisfaz às seguintes condições:

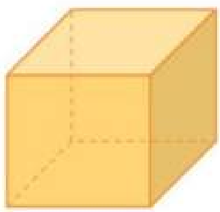
- apresenta todas as faces poligonais regulares e congruentes entre si;
- em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares. Observe abaixo um exemplo de cada uma dessas classes.



- **PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE UM POLIEDRO**

Os poliedros podem ser representados de diferentes maneiras; por exemplo, em perspectiva ou pela planificação de sua superfície. Até agora, você tem observado a representação de alguns poliedros em perspectiva, como o cubo representado abaixo.



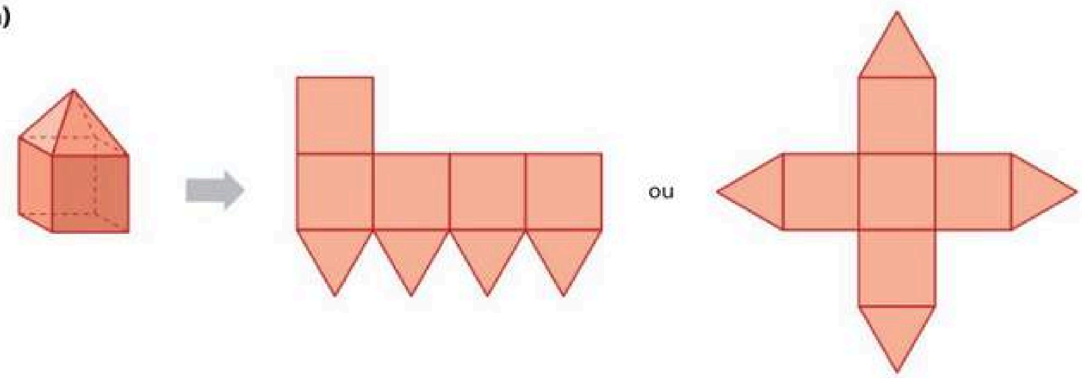
Entretanto, a superfície de um poliedro, que é formada de superfícies poligonais planas, pode ser colocada sobre um plano de tal modo que cada uma das faces do poliedro tenha pelo menos um lado em comum com outra face. Obtemos, assim, uma figura plana, que costuma ser chamada de molde do poliedro, ou planificação da superfície do poliedro, ou simplesmente planificação do poliedro.

De modo geral, as faces de um poliedro podem ser arranjadas de vários modos diferentes, desde que cada face esteja ligada a outra por pelo menos um de seus lados.

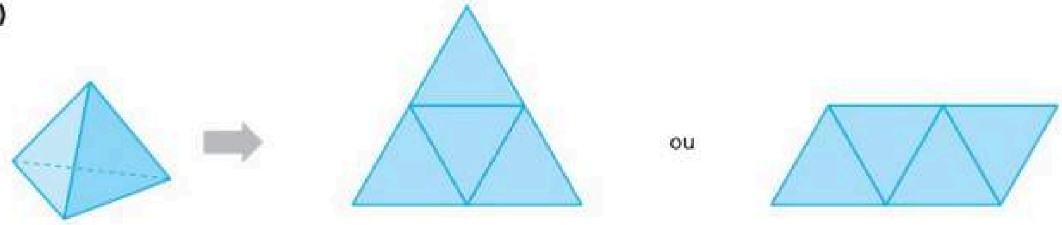
CONCEITOS E CONTEÚDOS

Exemplos:

a)



b)

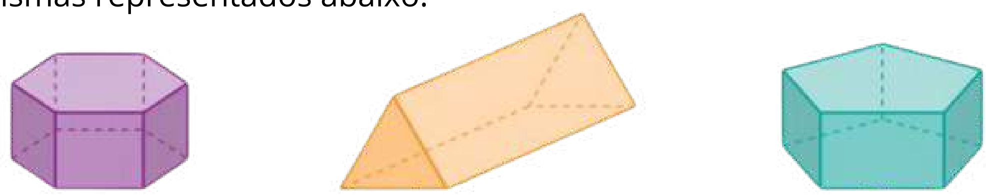


OS PRISMAS

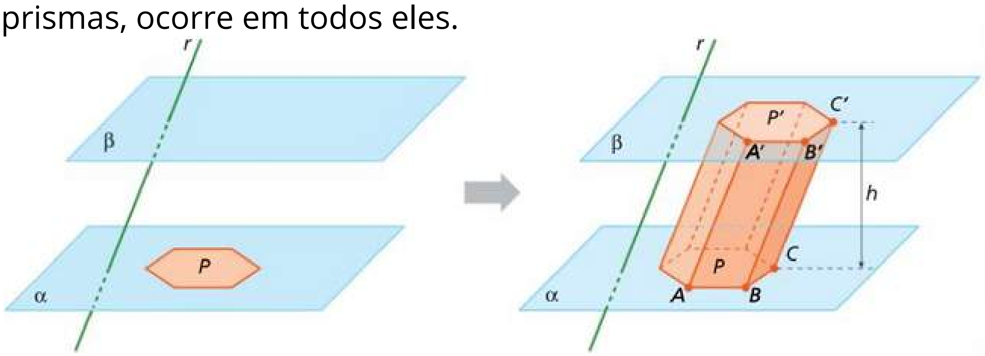
Vários objetos do espaço em que vivemos têm a forma de poliedros, entre os quais destacamos os **prismas**.

Desde as mais simples embalagens até as mais elaboradas edificações, muitos são os exemplos da presença dos prismas no dia a dia.

Observe os prismas representados abaixo.



Note que todos eles possuem pelo menos um par de faces paralelas e congruentes e pelo menos três faces paralelográmicas (lados paralelos dois a dois). Esse fato, embora não seja exclusivo dos prismas, ocorre em todos eles.



Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a ***r*** tais que uma de suas extremidades é um ponto da região ***P*** e a outra extremidade é um ponto no plano β.

Se a reta r é perpendicular aos planos α e β, dizemos que o prisma é reto; caso contrário, ele é oblíquo. Observe que o prisma acima é oblíquo.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **ELEMENTOS DE UM PRISMA**

Considerando o prisma da página anterior, podemos destacar os seguintes elementos:

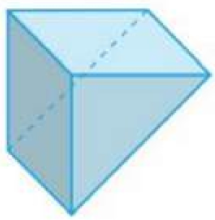
- **Bases** – as regiões poligonais *P* e *P'*, que são congruentes e estão situadas em planos paralelos (α e β, respectivamente).
- **Faces laterais** – as regiões poligonais *AA'B'B*, *BB'C'C* etc.
- **Arestas das bases** – os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ etc.
- **Arestas laterais** – os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ etc.
- **Altura do prisma** – a distância *h* entre os planos das bases (α e β).

- **CLASSIFICAÇÃO DOS PRISMAS**

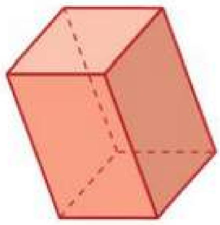
Os prismas podem ser classificados de acordo com alguns critérios. Um deles você já conhece: a inclinação da reta r em relação aos planos α e β, que contêm as bases. É essa reta que define a inclinação das arestas laterais dos prismas em relação às bases. Nos prismas retos, as arestas laterais são perpendiculares às bases; os oblíquos, não.

Outro critério que permite classificar os prismas é o que considera o polígono que determina as bases. Se esse polígono é um triângulo, o prisma é triangular; se é um quadrilátero, o prisma é quadrangular; se é um pentágono, o prisma é pentagonal; e assim por diante.

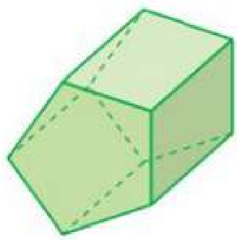
Exemplos:



prisma triangular

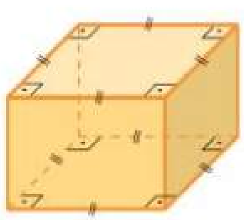


prisma quadrangular

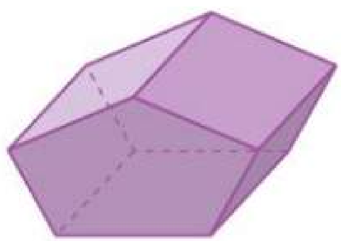


prisma pentagonal

Um prisma reto cujas bases são superfícies poligonais regulares é denominado **prisma regular**.



Esse prisma é regular, pois as bases são quadradas e ele é reto.



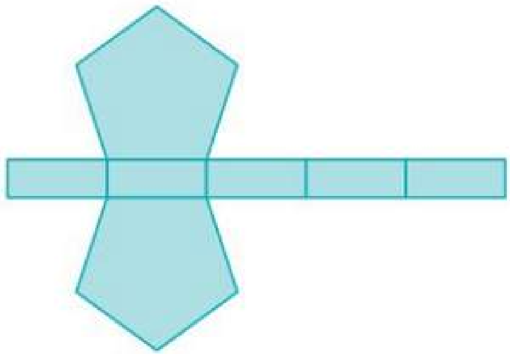
Esse prisma não é regular, pois as bases não são polígonos regulares.

Entre os prismas quadrangulares, aqueles que têm bases paralelogrâmicas são chamados de paralelepípedos; esses, por sua vez, podem ser retos ou oblíquos.
Se um paralelepípedo reto tem bases retangulares, é chamado de paralelepípedo reto-retângulo ou bloco retangular, se tem todas as faces congruentes denomina-se cubo.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE UM PRISMA**

Podemos planificar a superfície de um prisma.
Observe a planificação a seguir.



Pela planificação, podemos identificar muitas características desse prisma:

- tem 7 faces, já que a planificação de sua superfície apresenta 7 regiões poligonais;
- tem bases pentagonais, pois faces desse tipo não podem ser faces laterais de um prisma, as quais necessariamente são quadriláteros;
- tem 5 faces laterais (as faces retangulares), já que as pentagonais são bases;
- tem 10 vértices, uma vez que cada base contém metade dos vértices do prisma;
- é um prisma reto, já que suas faces laterais são retangulares;
- tem altura igual ao comprimento de uma aresta lateral, já que é reto.

ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UM PRISMA

Dado um prisma qualquer, definimos:

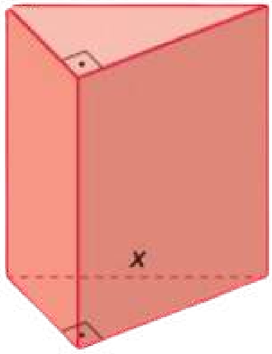
- **Área da base** (A_{base}) – área de uma das faces que é base.
- **Área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das áreas das faces laterais.
- **Área total** (A_{total}) – soma da área lateral com as áreas das duas bases.

$$A_{total} = A_{lateral} + 2.A_{base}$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1

Calcular a área total da superfície de um prisma triangular reto, de altura 12 cm, sabendo que as arestas da base formam um triângulo retângulo de catetos que medem 6 cm e 8 cm.



Resolução:

Como a base do prisma é um triângulo retângulo, temos:

$A_{base} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A_{base} = 24$

Para calcular a área lateral, vamos obter a medida da hipotenusa do triângulo retângulo da base.

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$

A área lateral é dada pela soma das áreas das faces retangulares que compõem a superfície lateral. Assim:

$A_{lateral} = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288$

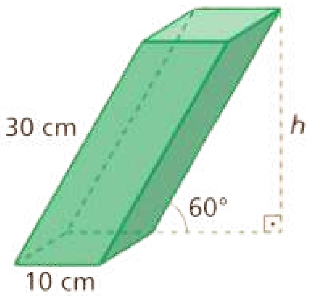
Logo, a área total é dada por:

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 288 + 2 \cdot 24 = 336$

Portanto, a área total da superfície do prisma é 336 cm^2.

2

Calcular a área total da superfície do prisma oblíquo de base quadrada representado abaixo, sabendo que as faces laterais são congruentes.



Resolução:

O prisma tem base quadrada. Assim: $A_{base} = 10^2 \Rightarrow A_{base} = 100$

Para calcular a área lateral, vamos obter a altura h.

$\text{sen } 60° = \dfrac{h}{30} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{30} \Rightarrow h = 15\sqrt{3}$

Assim:

$A_{lateral} = 4 \cdot \underbrace{\left(10 \cdot 15\sqrt{3}\right)}_{\text{área do paralelogramo}} \Rightarrow A_{lateral} = 600\sqrt{3}$

Logo, a área total é dada por:

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$

$A_{total} = 600\sqrt{3} + 2 \cdot 100 = 200\left(1 + 3\sqrt{3}\right)$

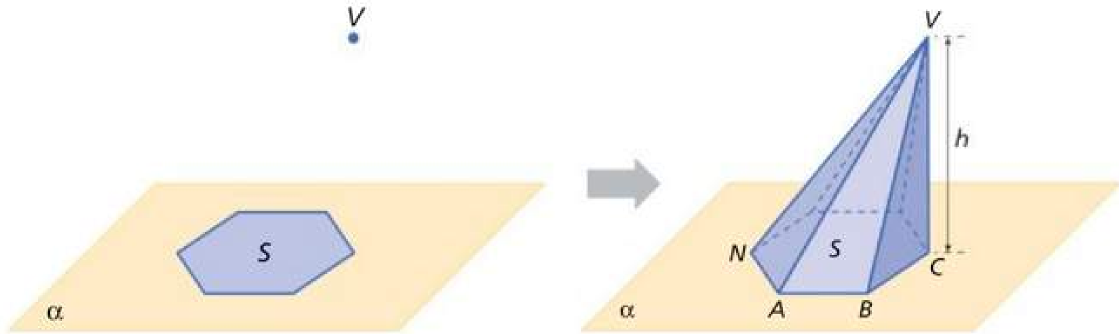
Portanto, a área total da superfície do prisma é $200\left(1 + 3\sqrt{3}\right)$ cm^2.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

AS PIRÂMIDES

Além dos prismas, as pirâmides constituem outro importante tipo de poliedro. Exercendo fascínio sobre o ser humano desde a Antiguidade, a forma piramidal tem ressurgido na arquitetura moderna em edifícios de grande imponência. As pirâmides do Egito, a pirâmide de vidro do Museu do Louvre ou mesmo as pirâmides decorativas, como a apresentada na imagem ao lado, são belos exemplos desse sólido.

Consideremos um plano α, uma região poligonal convexa S contida em α e um ponto V fora de α.



Chama-se **pirâmide** o poliedro convexo formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto *V* e um ponto da região *S*.

- **ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE**

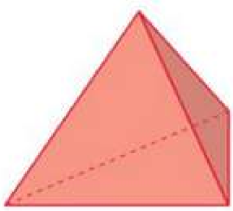
Considerando a pirâmide desenhada acima, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base** – a região poligonal *S*.
- **Vértice da pirâmide** – o ponto *V*.
- **Faces laterais** – as superfícies triangulares *AVB*, *BVC*, ..., *NVA*.
- **Arestas da base** – os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{NA}$.
- **Arestas laterais** – os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, ..., $\overline{VN}$.
- **Altura da pirâmide** – a distância *h* entre o vértice *V* e o plano α.

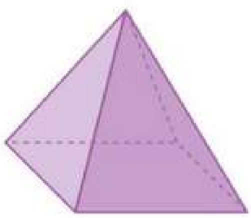
- **CLASSIFICAÇÃO DAS PIRÂMIDES**

As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o número de arestas da base. Se a base tiver 3 arestas, a pirâmide é triangular; se tiver 4 arestas, a pirâmide é quadrangular; se tiver 5 arestas, a pirâmide é pentagonal; e assim por diante.

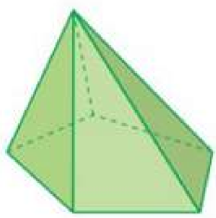
Exemplos:



pirâmide triangular (tetraedro)



pirâmide quadrangular

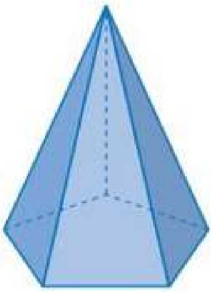


pirâmide pentagonal

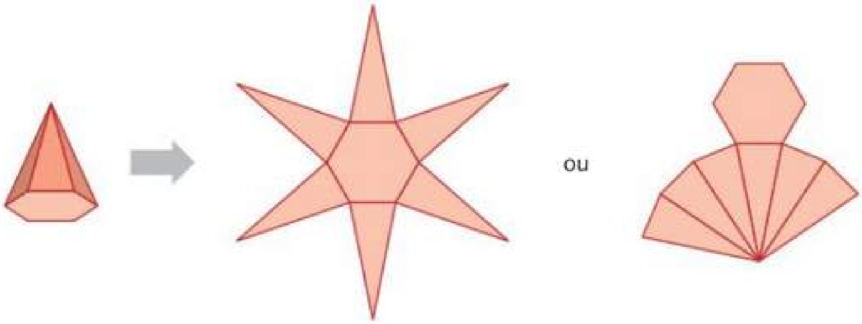
CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE UMA PIRÂMIDE**

Até aqui, temos representado pirâmides em perspectiva, como esta abaixo. Como os demais poliedros, uma pirâmide também pode ser representada por planificações de sua superfície: é possível, em um plano, justapor as faces de uma pirâmide de modos diferentes, desde que cada uma delas tenha pelo menos uma aresta em comum com outra.

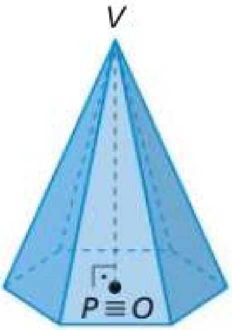


Como exemplo, observe a seguir duas planificações de uma pirâmide hexagonal.



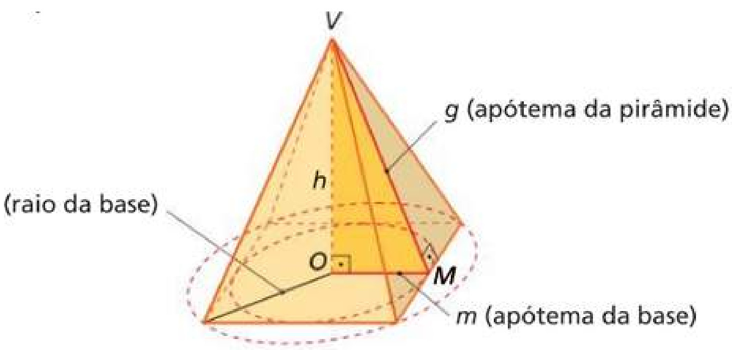
- **PIRÂMIDES REGULARES**

Uma pirâmide cuja base é uma superfície poligonal regular e cuja projeção ortogonal P do vértice sobre o plano da base coincide com o centro do polígono da base é chamada de pirâmide regular



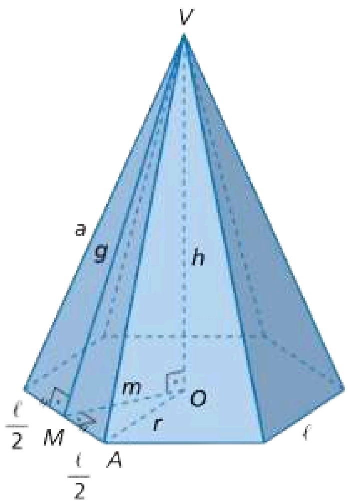
As faces laterais de uma pirâmide regular são determinadas por triângulos isósceles congruentes. Assim, uma pirâmide triangular regular tem quatro faces: uma é a base (um triângulo equilátero) e as outras três são as faces laterais (triângulos isósceles congruentes).

- **ELEMENTOS DAS PIRÂMIDES REGULARES**



CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **ALGUMAS RELAÇÕES MÉTRICAS**



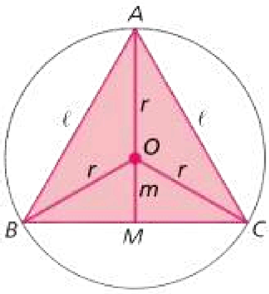
Podemos destacar algumas relações métricas nas pirâmides regulares. Observe a pirâmide regular de altura h, aresta da base medindo ℓ e arestas laterais medindo a representada ao lado.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo:

- VOA, temos $a^2 = h^2 + r^2$.
- MOA, temos $r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$.
- VMO, temos $g^2 = h^2 + m^2$.
- VMA, temos $a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$.

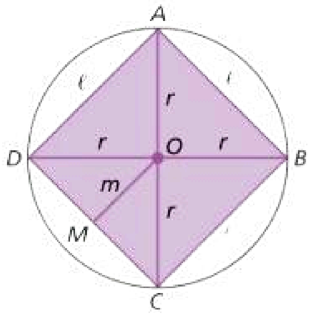
Essas relações métricas são válidas para qualquer pirâmide regular, independentemente do polígono que forma a base. Além disso, há a relação entre as medidas da aresta da base e as do apótema da base de algumas pirâmides regulares.

- A base é um triângulo equilátero.



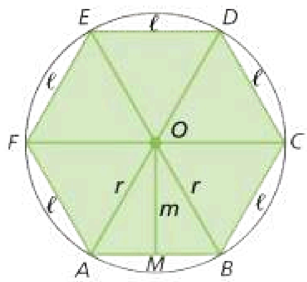
$m = \frac{r}{2}$ ou $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

- A base é um quadrado.



$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{\ell}{2}$

- A base é um hexágono regular.



$m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ ou $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UMA PIRÂMIDE

Dada uma pirâmide qualquer, definimos:

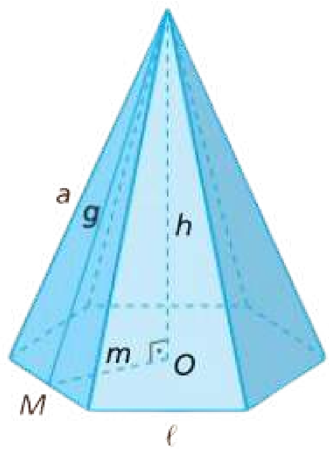
- **Área da base** (A_{base}) – área da superfície poligonal que constitui a base.
- **Área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das áreas das faces laterais (superfícies triangulares).
- **Área total** (A_{total}) – soma da área lateral com a área da base.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

3

Determinar a área total da superfície de uma pirâmide regular hexagonal sabendo que a aresta da base mede l e o apótema da pirâmide mede g.



Resolução:

A base da pirâmide é uma superfície hexagonal regular de lado l. Portanto, a área da base é dada por:

$$A_{base} = 6.\frac{l^2.\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{base} = \frac{3l^2.\sqrt{3}}{2}$$

Como a pirâmide é regular, as faces laterais são formadas por triângulos isósceles e congruentes, que, nesse caso, têm base l e altura g Assim, a área lateral é dada por:
área lateral = 6 vezes a área do triângulo isósceles.

$$A_{lateral} = 6.\left(\frac{lg}{2}\right)$$

$$A_{lateral} = 3lg$$

Logo, a área total é dada por:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

$$A_{total} = 3lg + \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

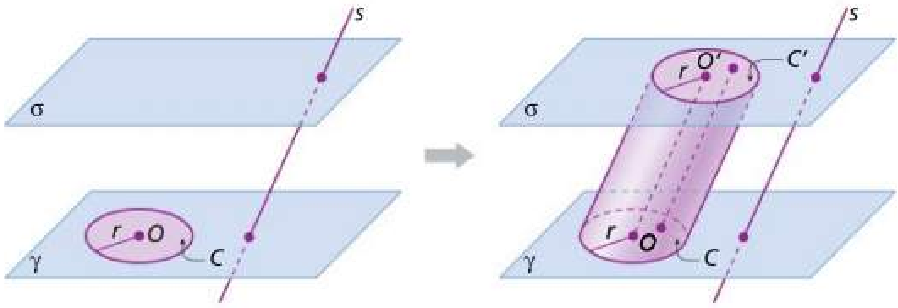
$$A_{total} = 3l.\left(g + \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

OS CORPOS REDONDOS

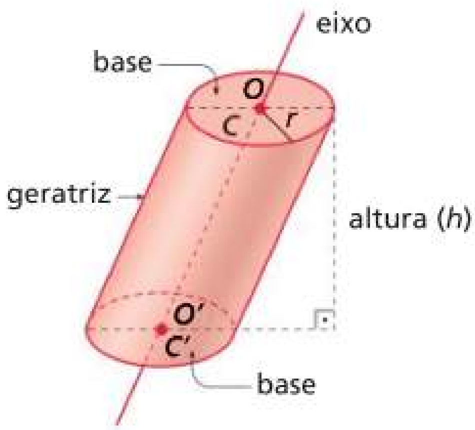
Entre os corpos redondos, distinguimos o cilindro, o cone e a esfera e os corpos obtidos a partir deles, mas focaremos no cilindro e no cone.

OS CILINDROS



Chama-se **cilindro circular**, ou apenas **cilindro**, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta s, com uma extremidade no círculo **C** e a outra no plano σ.

- **ELEMENTOS DE UM CILINDRO**



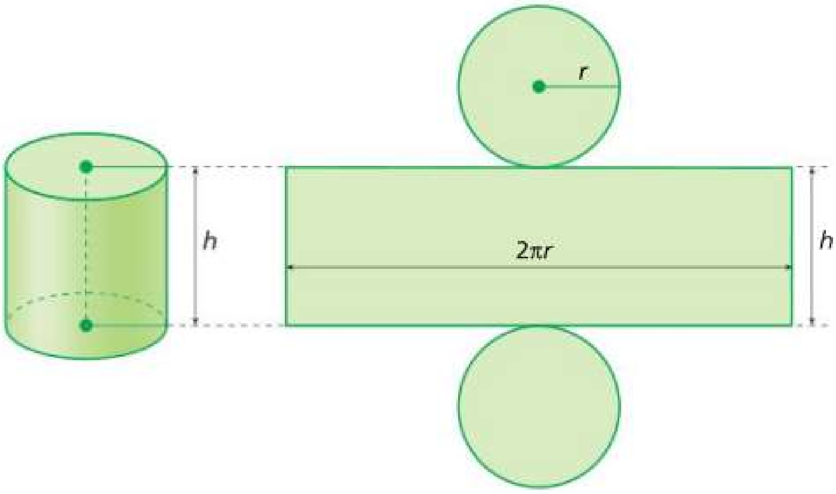
- **Bases** – os círculos **C** e C', de raio r e centros O e O'.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- **Geratrizes** – os segmentos paralelos ao eixo do cilindro cujas extremidades são os pontos correspondentes das circunferências das bases do cilindro. Indicaremos por g o comprimento da geratriz.
- **Altura do cilindro** – a distância h entre os planos que contêm as bases.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UM CILINDRO RETO

Imagine que a superfície de um cilindro reto seja revestida de papel. Recortando o papel nas circunferências das bases e ao longo de uma geratriz, obtemos a planificação da superfície do cilindro.

A planificação é composta de dois círculos e de uma superfície retangular, em que a medida de um dos lados é igual ao comprimento da circunferência da base (2πr), e a medida do outro lado é igual à altura do cilindro (h).



Dado um cilindro reto de altura h e raio da base r, definimos:

- **ÁREA DA BASE**

É a área de um círculo de raio r.

$$A_{base} = \pi r^2$$

- **ÁREA LATERAL**

É a área do retângulo de lados 2πr e h.

$$A_{lateral} = 2\pi r h$$

- **ÁREA TOTAL**

é a soma das áreas das bases com a área lateral.

$$A_{total} = 2.A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2\pi r^2 + 2rh \Rightarrow A_{total} = 2\pi r(r+h)$$

Dica de estudo

Que tal uma revisão da **ÁREA DO CÍRCULO?**

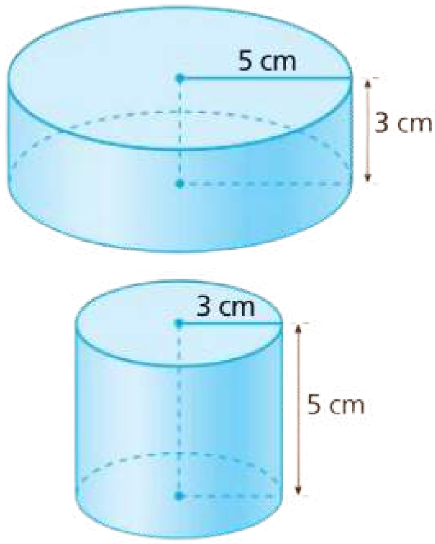
Aponte a câmera do celular para o QR CODE ao lado ou clique no botão abaixo.

Clique aqui

EXERCICIOS RESOLVIDOS

4

Dado um retângulo de dimensões 3 cm e 5 cm, comparar a área lateral e a área total da superfície dos cilindros de revolução dele obtidos.



Resolução:

Fazendo a rotação do retângulo em torno do lado que mede 3 cm, obtemos um cilindro reto de raio 5 cm e altura 3 cm. Então:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi$$
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot (5 + 3) = 80\pi$$

Logo, esse cilindro tem área lateral de 30π cm² e área total de 80π cm².

O outro cilindro de revolução tem raio de 3 cm e altura 5 cm. Então:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi$$
$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot (3 + 5) = 48\pi$$

Logo, esse cilindro tem área lateral de 30π cm² e área total de 48π cm².
Portanto, as áreas laterais dos cilindros obtidos são iguais. No entanto, quando fazemos a rotação do retângulo em torno do lado menor, a área total da superfície do cilindro é maior.

E por falar em sólidos de revolução...

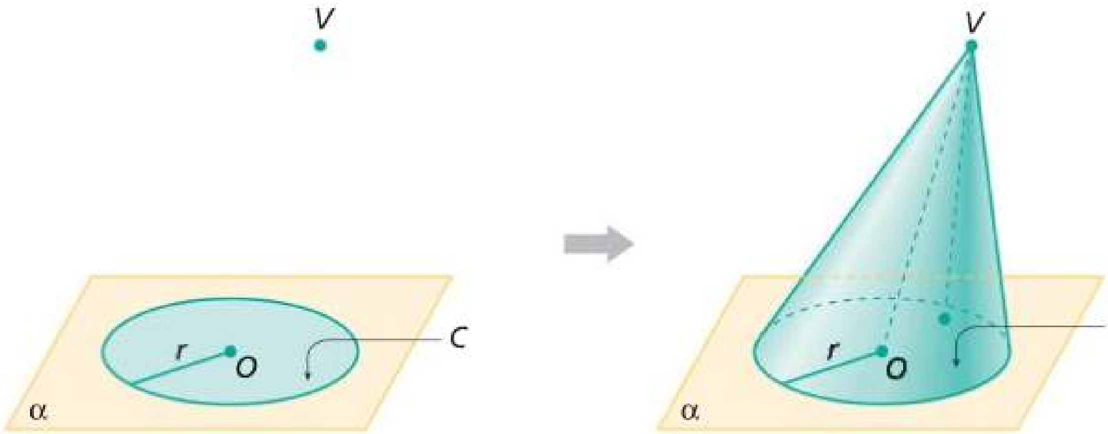
Aponte a câmera do celular para o QR CODE ao lado ou clique no botão abaixo para ver um experimento com a ideia de sólido de revolução.

Clique aqui

CONCEITOS E CONTEÚDOS

OS CONES

A forma cônica aparece em muitos objetos do dia a dia, como a casquinha de sorvete ou o cone de sinalização de trânsito. A seguir, observe a definição geométrica de cone. Consideremos um círculo C, de centro O e raio r, em um plano α, e um ponto V não pertencente ao plano α.

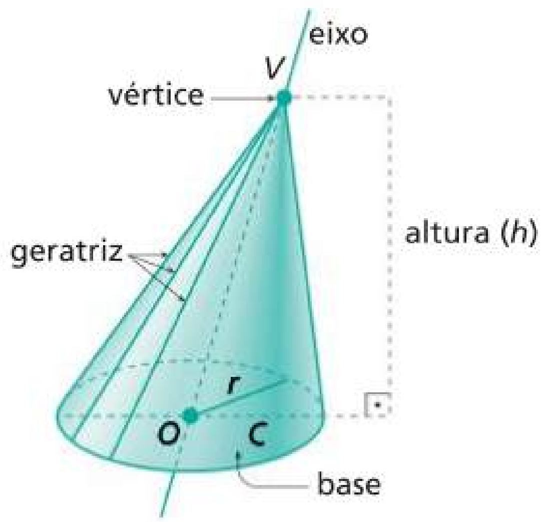


A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em *V* e outra no círculo *C* é denominada **cone circular**, ou simplesmente **cone**.

- **ELEMENTOS DO CONE**

Considerando o cone desenhado ao lado, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base** – o círculo *C* de raio *r* e centro *O*.
- **Vértice** – o ponto *V*.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{VO}$.
- **Geratrizes** – os segmentos com extremidades em *V* e na circunferência da base do cone. No cone reto (que veremos a seguir), indicaremos o comprimento da geratriz por *g*.
- **Altura do cone** – a distância *h* do vértice *V* ao plano que contém a base.

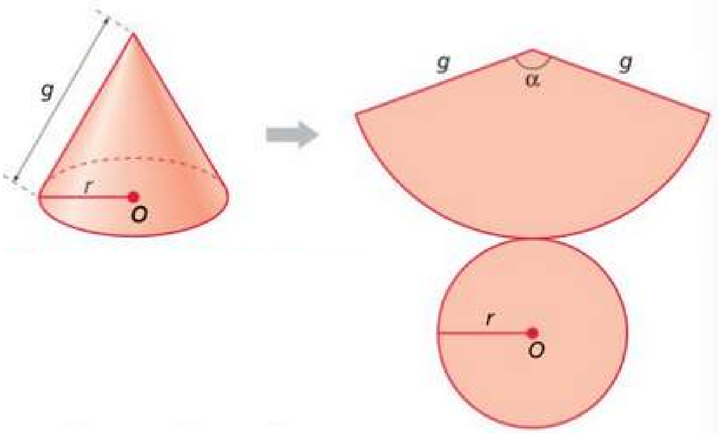


CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE UM CONE RETO**

Assim como fizemos com o cilindro, vamos supor que a superfície de um cone reto seja revestida de papel. Para obter a planificação dessa superfície, vamos imaginar um recorte do papel na circunferência da base e, em seguida, um recorte ao longo de uma de suas geratrizes.

A planificação da superfície de um cone reto é formada por um círculo de raio r e centro O e por um setor circular de raio g, ângulo α e arco de comprimento 2πr.



ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UM CONE RETO

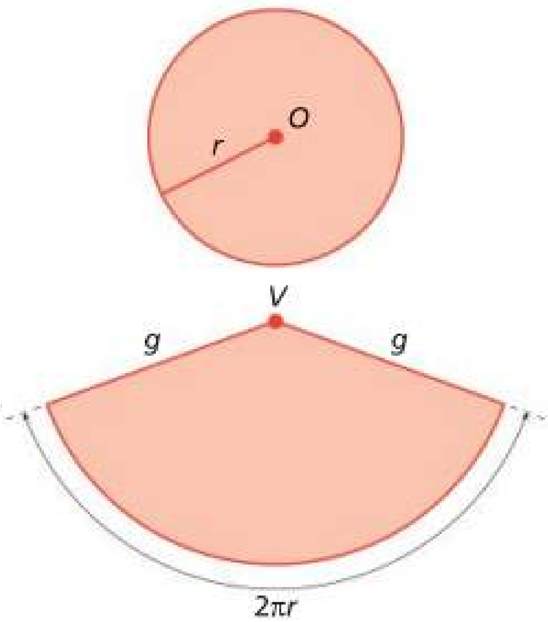
Pela planificação da superfície de um cone, podemos obter a área total dessa superfície. Para isso, vamos considerar um cone reto de raio da base r e comprimento da geratriz g.

A **área da base** (A_{base}) é a área de um círculo de raio r e centro O.

$$A_{base} = \pi r^2$$

A **área lateral** ($A_{lateral}$) é a área de um setor circular tal que o raio é o comprimento g da geratriz e o arco tem comprimento igual a $2\pi r$ (o comprimento da circunferência da base do cone).

Como a área desse setor é diretamente proporcional ao comprimento $2\pi r$ do arco que o define, temos:



$$\frac{\text{comprimento do arco do setor}}{\text{comprimento da circunferência de raio } g} = \frac{\text{área do setor}}{\text{área do círculo}}$$

$$\frac{2\pi r}{2\pi g} = \frac{A_{lateral}}{\pi g^2} \Rightarrow A_{lateral} = \frac{(2\pi r)\cdot(\pi g^2)}{2\pi g} \Rightarrow \boxed{A_{lateral} = \pi r g}$$

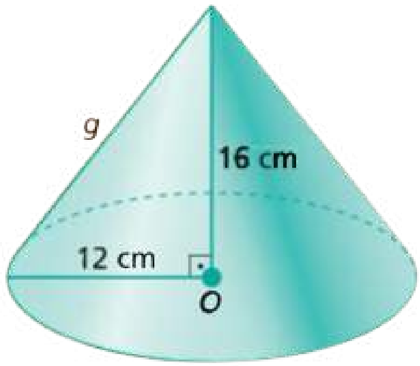
A **área total** (A_{total}) da superfície do cone reto é a soma da área da base com a área lateral.

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow \boxed{A_{total} = \pi r(r+g)}$$

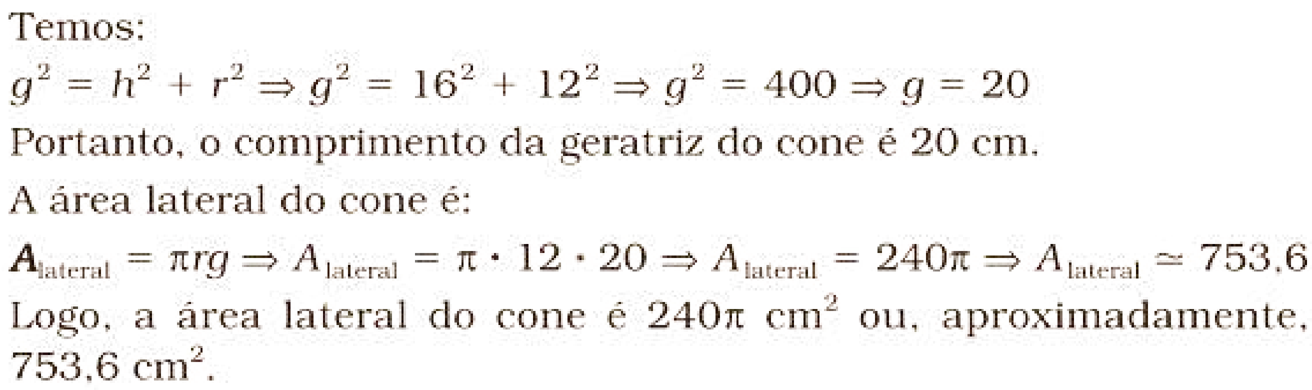
EXERCICIOS RESOLVIDOS

5

Determine a área lateral e a área total de um cone reto com 16 cm de altura e 12 cm de raio da base.



Resolução:



Temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = 400 \Rightarrow g = 20$

Portanto, o comprimento da geratriz do cone é 20 cm.

A área lateral do cone é:

$A_{lateral} = \pi r g \Rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow A_{lateral} = 240\pi \Rightarrow A_{lateral} \simeq 753{,}6$

Logo, a área lateral do cone é 240π cm^2 ou, aproximadamente, 753,6 cm^2.

Conforme exposto, nos cones podemos determinar a área total somando a área da base à área lateral. Calculando a área da base que é um círculo de raio 12 cm:

$$A_{base} = \pi \cdot 12^2 = 144\pi cm^2$$

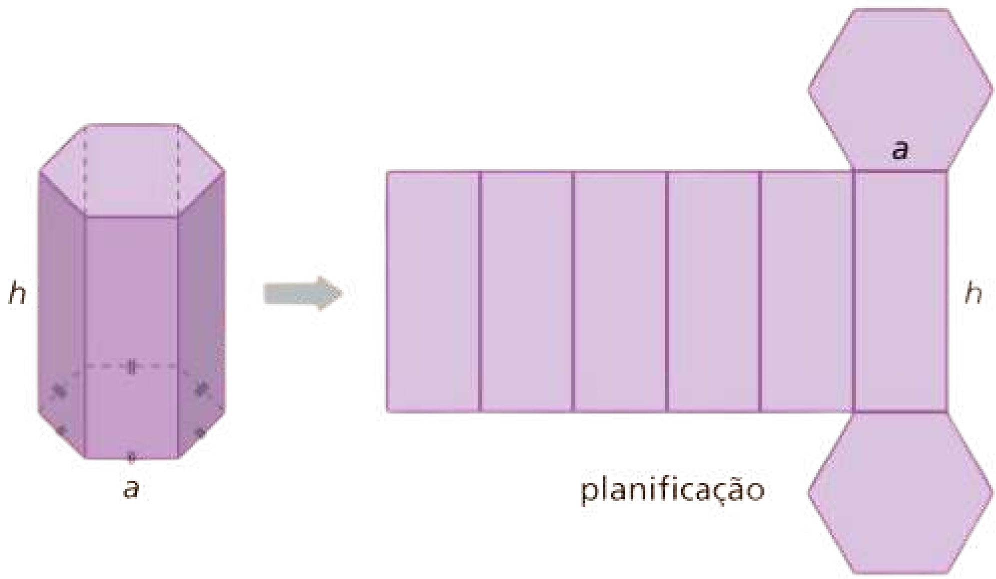
Dessa forma, podemos concluir que a área total é:

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$$
$$A_{total} = 144\pi + 240\pi$$
$$A_{total} = 384\pi$$
$$A_{total} \cong 1205,76cm^2$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

6

Calcular a área total da superfície do prisma hexagonal regular representado abaixo.



Resolução:

Como vimos, um prisma regular é um prisma reto e, portanto, suas faces laterais são retangulares e congruentes, de dimensões a e h Assim, a área lateral é dada por:

$$A_{lateral} = 6.a.h$$

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado a.
Portanto, a área da base é dada por:

$$A_{base} = \frac{3a^2.\sqrt{3}}{2}$$

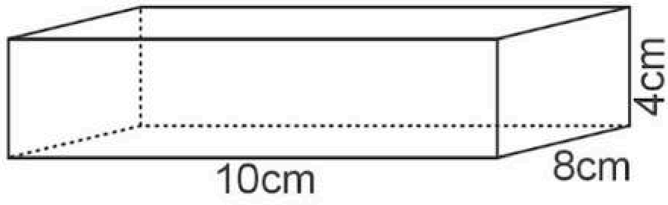
Logo, a área total da superfície desse prisma hexagonal é:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2.A_{base} = 6ah + 2.\frac{3a^2.\sqrt{3}}{2} = 6ah + 3a^2.\sqrt{3}$$

$A_{total} = 3a(2h + a\sqrt{3})$ unidades de área.

Atividade 1

(PAMA11044AC) Observe o paralelepípedo abaixo.



A área total desse paralelepípedo, em cm^2, será

A) 22
B) 32
C) 80
D) 304
E) 320

Atividade 2

(M120534A9) Um pianista famoso fará uma série de espetáculos por todo o mundo e levará o seu piano. Para segurança de seu instrumento, ele confeccionou um caixote grande e resistente com 4 metros de comprimento, 3 metros de largura e 1,5 metros de altura.
Quantos metros quadrados de madeira, no mínimo, o pianista gastou?

A) 9
B) 17
C) 18
D) 36
E) 45

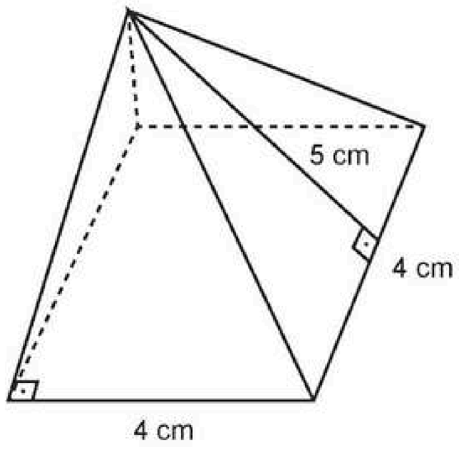
Atividade 3

(M11424SI) Um professor de Matemática recortou vários cartões de forma quadrada, cujo lado mede 1 cm.
De quantos cartões ele precisará para revestir um cubo de aresta igual a 3 cm?

A) 6
B) 9
C) 18
D) 36
E) 54

Atividade 4

(M11120SI) Na figura a seguir você vê uma peça em forma de pirâmide de base quadrada cujas faces são triângulos isósceles de altura 5 cm.

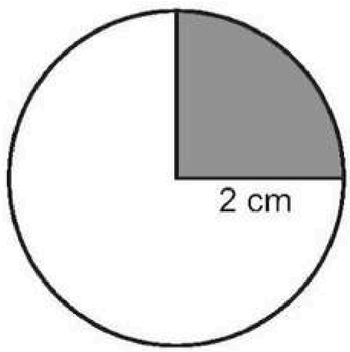


Nestas condições, concluímos que a área total dessa peça mede:

A) 36 cm^2
B) 40 cm^2
C) 56 cm^2
D) 80 cm^2
E) 96 cm^2

Atividade 5

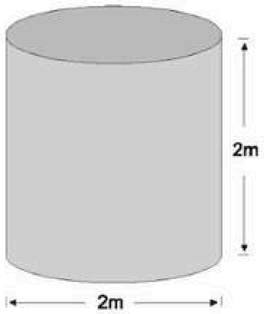
(M11320MG) A área da figura plana abaixo, representada pela região sombreada, é:



A) 8π cm^2
B) 4π cm^2
C) 2π cm^2
D) π cm^2
E) $\frac{\pi}{2}$ cm^2

Atividade 6

(M120649A9) Veja o cilindro da figura abaixo.

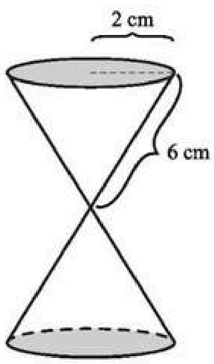


A área total da superfície externa desse cilindro, em metros quadrados mede

A) 2π
B) 4π
C) 5π
D) 6π
E) 8π

Atividade 7

(M120074A9) A ampulheta é um objeto constituído por 2 cones do mesmo tamanho, utilizada na antiguidade para medir o tempo. Atualmente, ela é utilizada como objeto de decoração.
Um artesão vai construir uma ampulheta, utilizando polietileno flexível, com as medidas indicadas na figura abaixo.



Dado: $\pi \cong 3,1$.

A quantidade necessária desse material, em centímetros quadrados, é

A) 23,1cm²
B) 24,8 cm²
C) 49,6 cm²
D) 74,4 cm²
E) 99,2 cm²

Atividade 8

(M11274SI) Uma importadora adquiriu 6 144 dm^3 de um produto, cuja distribuição é feita em caixas cúbicas, de 4 dm de aresta.
Quantas dessas caixas são necessárias para embalar a quantidade de produto adquirido?

A) 96
B) 312
C) 384
D) 768
E) 1536

GABARITO

ATIVIDADE 1: D
ATIVIDADE 2: E
ATIVIDADE 3: E
ATIVIDADE 4: C
ATIVIDADE 5: D
ATIVIDADE 6: D
ATIVIDADE 7: C
ATIVIDADE 8: A

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Ferretto. Canal do YouTube acessado em 12/06/2024.

Matemática, primeira série, ensino médio: autores. Ana Lúcia Bordeaux... [et al.], coordenação João Bosco Pitombeira; - Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. 376p. :il. - (Multicurso; Coleção completa; v.1)

Mundo Educação. Acesso em https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/area-poligono-regular.htm no dia 06/06/2024.