Matemática

3ª Série | Ensino Médio

17ª Semana

Polígonos Regulares: Área

DESCRITORES DO PAEBES	**D058_M** Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT506** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF08MA19** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

VOCÊ SABIA?

www.BibleLandPictures.com/Alamy Stock Photo/Latinstock

Parte de uma das pinturas de parede do túmulo de Mena (por volta de 1400 a.C. a 1350 a.C.), na antiga Tebas (Egito), mostrando o trabalho de alguns agrimensores da época.

O RIO NILO E O CÁLCULO DE ÁREAS

O conceito de área já era utilizado pelos egípcios há milhares de anos. Na época das cheias, quando as águas do rio Nilo começavam a subir, era inundada uma região ao longo de suas margens. Após as águas baixarem, as margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornava o solo mais fértil para o cultivo. No entanto, ao baixarem as águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições.

Essas medições eram realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, em que a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de medida de comprimento.

A ideia de área está relacionada à medida de uma superfície. A área de uma região ou superfície pode ser obtida relacionando quantas unidades de área correspondem a ela.

Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

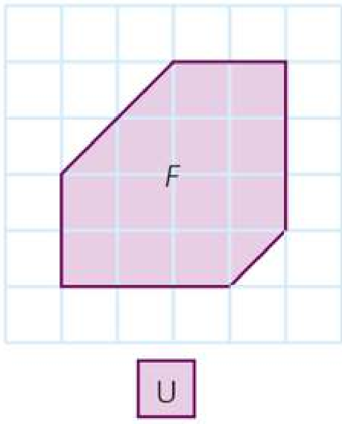
Neste material vamos estudar o cálculo de área de diferentes figuras planas.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A IDEIA INTUITIVA DE ÁREA

Suponha que queiramos medir a região do plano indicada por F na figura abaixo. Para isso, precisamos comparar F com uma unidade de área que chamaremos de U. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região F contém a unidade de área U. Esse número assim obtido é a área de F.

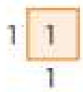


unidade de área: U

Então, a área da região plana F é 13,5 U, ou seja, área de F = 13,5 U.

REGIÃO QUADRADA UNITÁRIA

Vamos estabelecer como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ela será chamada região quadrada unitária.



região quadrada unitária

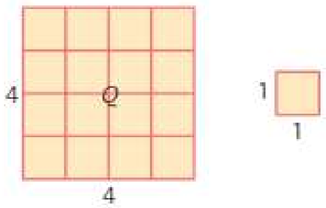
Qualquer região quadrada cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DO QUADRADO

Consideremos um quadrado Q cujo lado mede n, em que n é um número natural. Ele pode ser decomposto em n^2 quadrados justapostos, cada um com lado unitário e, portanto, com área 1. Logo, o quadrado Q tem área n^2.

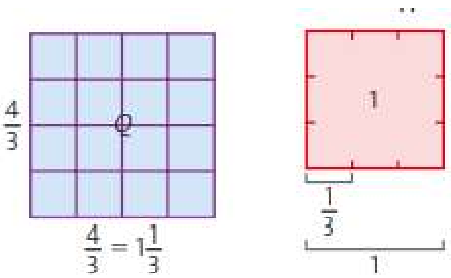
$$\text{área de } Q = n^2$$



Região quadrada de lado 4, decomposta em $16 = 4^2$ quadrados unitários.

Passemos agora para um caso mais geral, em que a medida do lado do quadrado Q é um número racional do tipo $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}^*$

Neste caso, pode-se decompor Q em m^2 quadrados, cada um dos quais com lado $\frac{1}{a}$. Assim, a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{a^2}$.



Quadrado de lado $\frac{4}{3}$, decomposto em $16 = 4^2$ quadrados menores, cada um com lado cuja medida é $\frac{1}{3}$ e cuja área é $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Área do quadrado $Q = \frac{16}{9}\left(\frac{4^2}{3^2}\right)$ ou $\left(\frac{4}{3}\right)^2$.

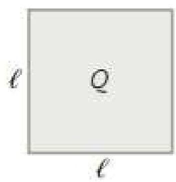
Assim, neste caso, a área do quadrado Q será dada por $a^2\left(\frac{1}{b^2}\right) = \frac{a^2}{b^2}$, ou seja:

$$\text{área de Q} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

É possível provar que, se a medida do lado do quadrado Q for um número irracional k, ainda assim:

$$\text{área de } Q = k^2$$

Conclusão: A área de um quadrado Q cujo lado mede ℓ é dada por:



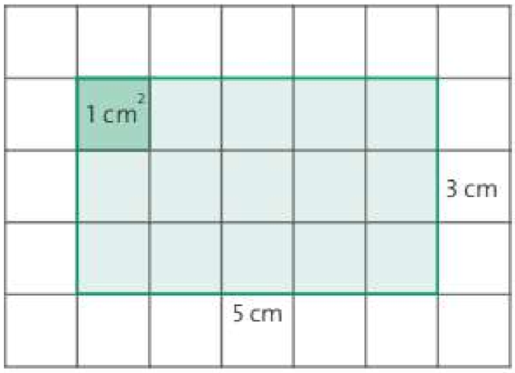
$$\text{área de } Q = \ell^2$$

sendo ℓ um número natural ou fracionário positivo.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DO RETÂNGULO

O retângulo pintado abaixo contém 15 unidades de área. Portanto, sua área é de 15 cm^2 .

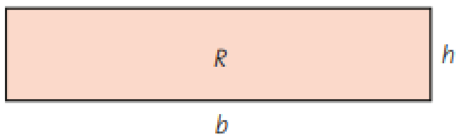


Observe que, em vez de contar quantas unidades de área estão contidas no retângulo, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura: 5 cm . 3 cm = 15 cm^2.

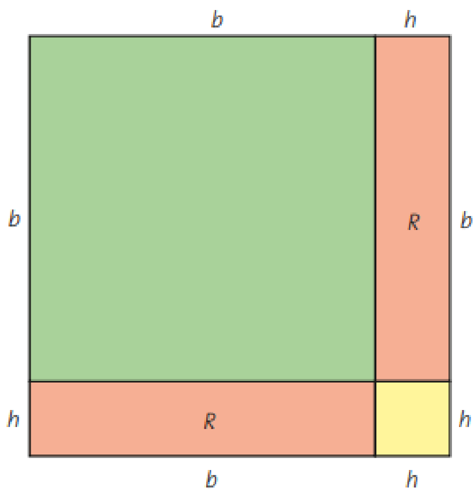
Nesse caso, as medidas do comprimento e da largura são números naturais.
Vamos provar que, se a medida da base (b) e a medida da altura (h) forem números reais quaisquer, a área do retângulo R é dada por:

$$\text{área de R} = b \cdot h$$

Consideremos um retângulo R de base b e altura h, em que b e h são números reais



Construímos um quadrado cuja medida do lado é b + h, que contém duas cópias de R, e mais dois quadrados, um cujo lado mede b e outro cujo lado mede h.



A área desse quadrado (Q) é dada pelo quadrado de uma soma:

$$\text{área de Q} = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \quad \text{(I)}$$

Como os quadrados têm áreas iguais a h^2 e b^2. concluímos que:

$$\text{área de Q} = b^2 + h^2 + 2 \cdot (\text{área de R}) \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), chegamos a:

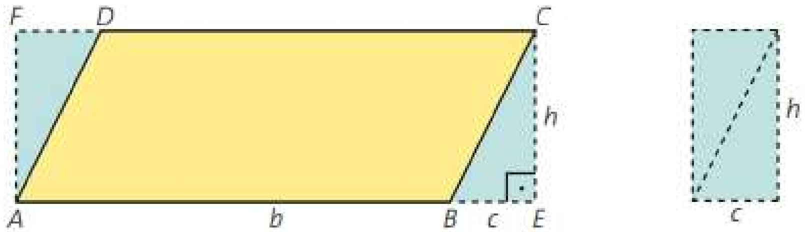
$$\text{área de } R = b \cdot h$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DO PARALELOGRAMO

Vamos calcular a área do paralelogramo ABCD tomando como base $\overline{AB}$ de medida b e sua altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AB}$) de medida h.

Examine a figura:



O paralelogramo está contido em um retângulo de base b + c e altura h. A área desse retângulo é dada por:

$$(b + c)\,h = bh + ch$$

Observe que o retângulo é formado pelo paralelogramo mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ch. Assim:

$$bh + ch = (\text{área do paralelogramo}) + ch$$

Portanto:

$$\text{área do paralelogramo} = bh$$

ÁREA DO TRIÂNGULO

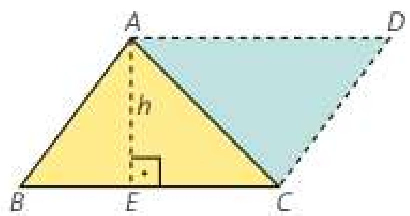
Conhecendo-se a área de um paralelogramo, fica muito simples determinar a área de um triângulo. Sabe por quê? Porque todo triângulo é metade de um paralelogramo de mesma base e mesma altura.

Veja:

Dado o triângulo ABC, cuja área queremos determinar, traçamos paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto D e o paralelogramo ABCD.

Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida h desse paralelogramo.

Já sabemos que, se a medida de $\overline{BC}$ é b, então a área do paralelogramo é bh. Mas os triângulos ABC e ADC são congruentes (pelo caso de congruência de triângulos ALA: têm um lado comum compreendido entre dois ângulos de mesma medida). Logo, esses triângulos têm áreas iguais.



Assim,

$$\text{área de ABCD} = 2 \,.\, \text{área do triângulo ABC}$$

ou

$$bh = 2 \,.\, \text{área do triângulo ABC}$$

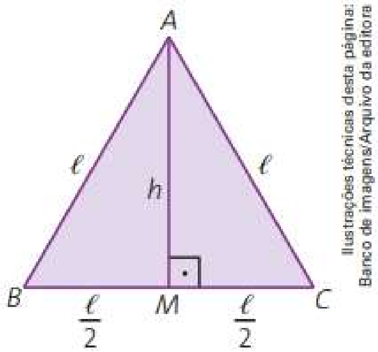
Portanto,

$$\text{área do triângulo } ABC = \frac{bh}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}\,bh$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

No triângulo equilátero, todos os lados são congruentes $(\ell, \ell \text{ e } \ell)$, todos os ângulos internos são congruentes (60º, 60º e 60º), e toda altura é também mediana e bissetriz. Veja o cálculo da área, usando a base (ℓ) e a altura (h):



O triângulo AMC é retângulo em M e, portanto, vale a relação de Pitágoras:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Logo, a área do triângulo ABC é dada por:

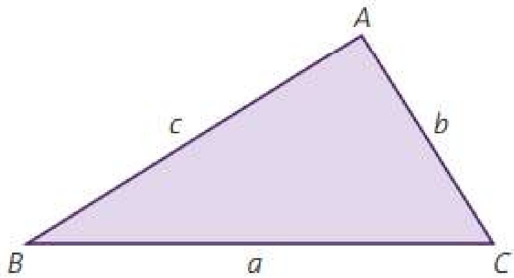
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, $\boxed{A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DE UM TRIÂNGULO SENDO CONHECIDOS OS TRÊS LADOS

Conhecidos os três lados (a, b e c) de um triângulo, a área do triângulo pode ser calculada pela fórmula de Heron.



Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

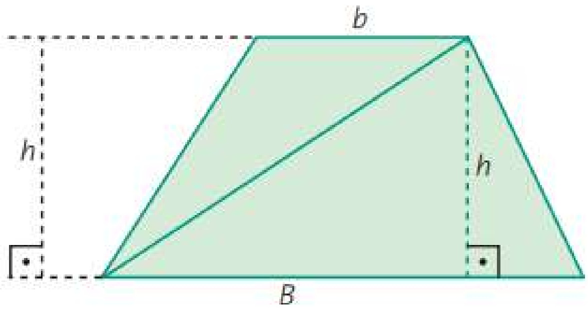
Sendo o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, é possível demonstrar que:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(Fórmula de Heron, muito útil quando não conhecemos a altura do triângulo.)

ÁREA DE UM TRAPÉZIO

Podemos decompor uma figura plana em regiões cujas áreas já sabemos calcular. A área dessa figura plana será a soma das áreas das regiões em que a figura foi decomposta. Por exemplo, vamos decompor a área de um trapézio traçando uma de suas diagonais. Dividimos o trapézio em dois triângulos: um de base B e altura h e outro de base b e altura h.



A área de um triângulo você já aprendeu a calcular. Portanto, a área do trapézio é dada por:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Então:

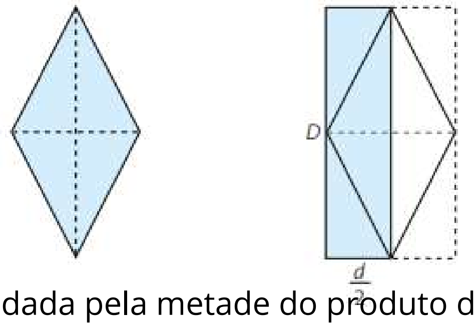
$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

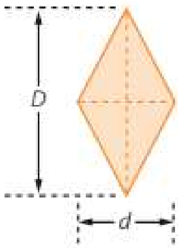
ÁREA DE UM LOSANGO

Todo losango é um paralelogramo, daí a área dele pode ser calculada como o produto da base pela altura. Entretanto, em geral, as dimensões de um losango são expressas pelas medidas de suas diagonais D e d.

Todo losango tem a mesma área de um retângulo com altura D e base $\frac{d}{2}$, como mostram as figuras:



Assim, a área de um losango é dada pela metade do produto das medidas das diagonais. Veja:

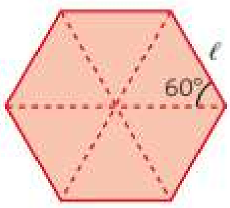


$$A = D \cdot \frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{Dd}{2}$$

ÁREA DE UM HEXÁGONO REGULAR

O hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros. Temos que a área do triângulo equilátero é dada por:

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$



Logo, a área de um hexágono regular é dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

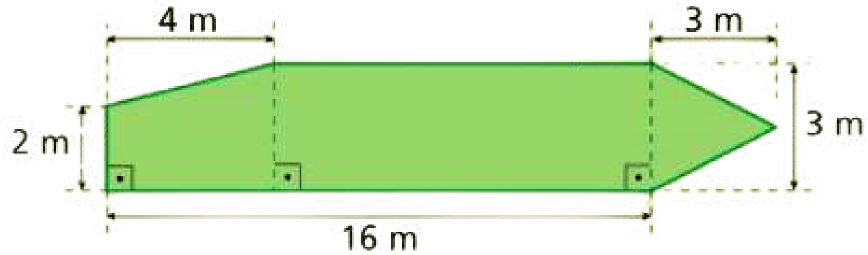
ou seja,

$$\boxed{A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

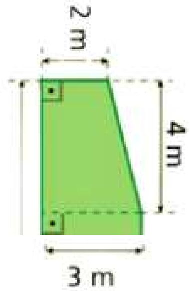
Determinar a área da figura a seguir.



Resolução:
Podemos decompor a figura em três: um trapézio, um retângulo e um triângulo.
Assim:

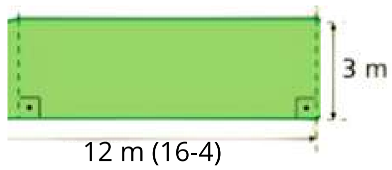
$$A = A_{\text{trapézio}} + A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}}$$

- Área do trapézio: $A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(B+b)h}{2}$



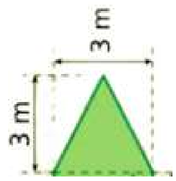
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(3+2)4}{2} = \frac{(5)4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

- Área do retângulo: $A_{\text{retângulo}} = b.h$



$$A_{\text{retângulo}} = 12\,.\,3 = 36$$

- Área do triângulo: $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b.h}{2}$



$$A_{\text{triângulo}} = \frac{3\,.\,3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$A = A_{\text{trapézio}} + A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}}$$

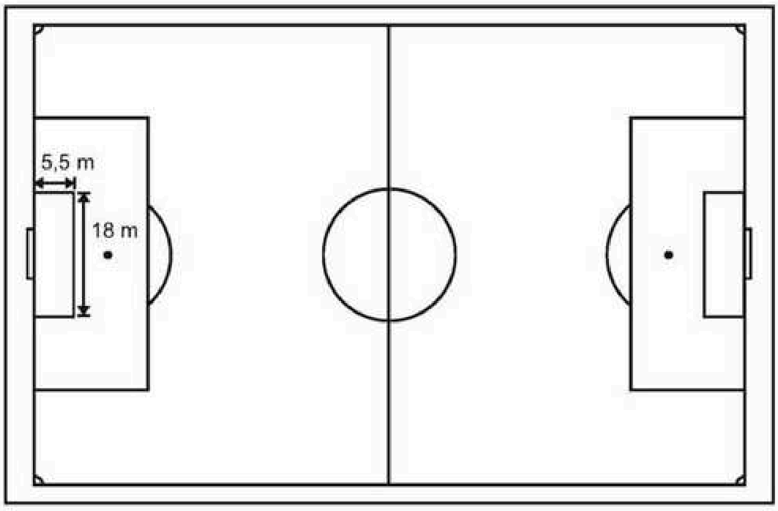
A = 10 + 36 + 4,5 = 50,5

Portanto, a área da figura é 50,5 m².

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(M120225G5) As duas pequenas áreas de meta (pequena área) do Maracanã sofreram, com a presença constante de jogadores naquela região, uma perda considerável de grama e, por isso, o administrador do estádio contratou uma empresa especializada para repor totalmente a grama dessas duas partes retangulares do campo, conforme ilustrado abaixo.

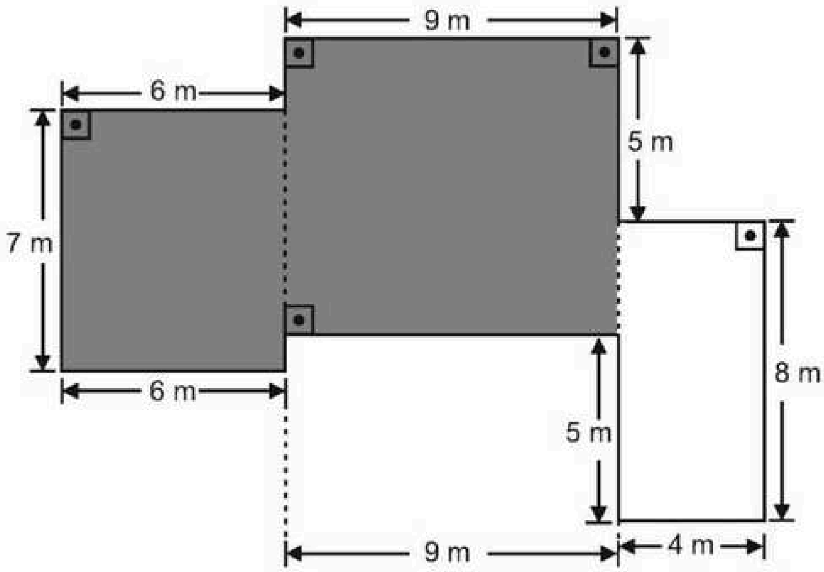


Qual é a medida da área, em m², a ser recuperada nessas duas regiões do Maracanã?

A) 47
B) 94
C) 99
D) 198
E) 990

Atividade 2

(M120223G5) O desenho abaixo representa a vista superior da casa de Emerson, na qual a região em cinza representa a parte da casa que é coberta por laje.

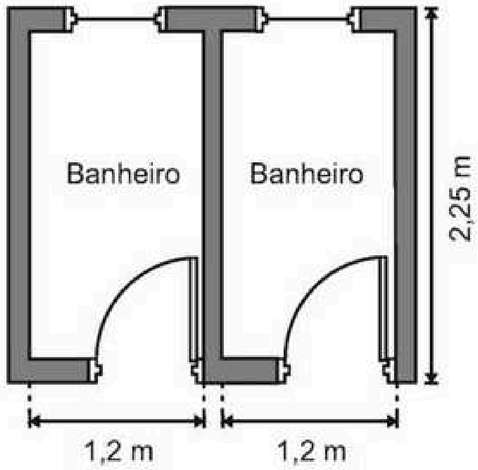


Qual é a medida da área coberta por laje nessa casa?

A) 42 m^2
B) 87 m^2
C) 105 m^2
D) 114 m^2
E) 146 m^2

Atividade 3

(M120226G5) O desenho abaixo representa a planta baixa de dois banheiros que serão construídos numa área de lazer de um clube. Os pisos desses banheiros serão revestidos por peças quadradas de cerâmica de 0,27 m² de área.

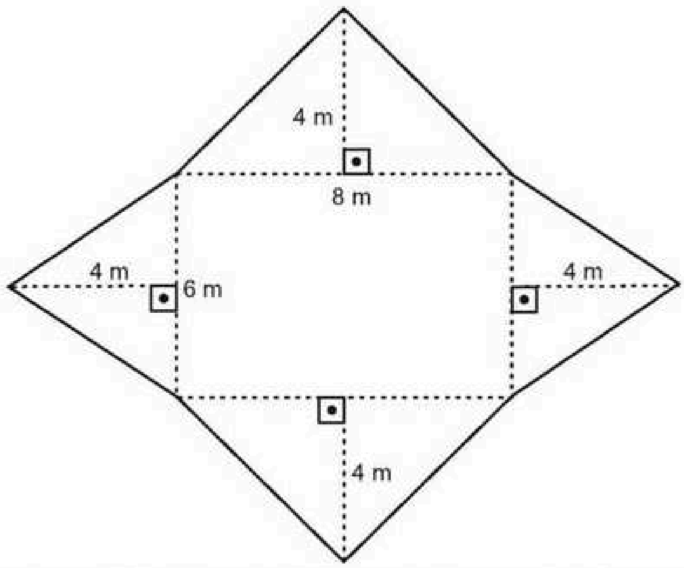


A quantidade mínima de peças de cerâmica necessárias para revestir os dois pisos dos banheiros é de

A) 10
B) 20
C) 26
D) 35
E) 52

Atividade 4

(M120222G5) Um arquiteto projetou uma piscina composta pela junção de um retângulo e quatro triângulos, conforme representado abaixo. Nesse projeto, o fundo dessa piscina será todo revestido com ladrilhos.

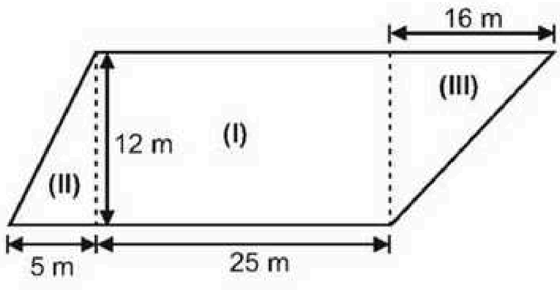


Qual é a quantidade mínima de ladrilhos necessária para revestir todo o fundo dessa piscina?

A) 64 m²
B) 76 m²
C) 80 m²
D) 104 m²
E) 160 m²

Atividade 5

(M120224G5) Jorge adquiriu três lotes, um retangular (I) e dois triangulares (II e III) que, juntos, passam a formar um único terreno representado no desenho abaixo.

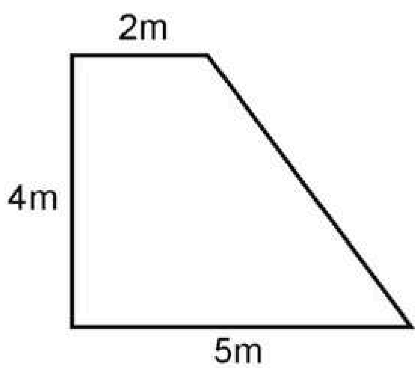


A área, em metros quadrado, do terreno adquirido por Jorge é

A) 104.
B) 360.
C) 426.
D) 552.
E) 852.

Atividade 6

(M120172A8) A figura abaixo representa um pátio em forma de trapézio.



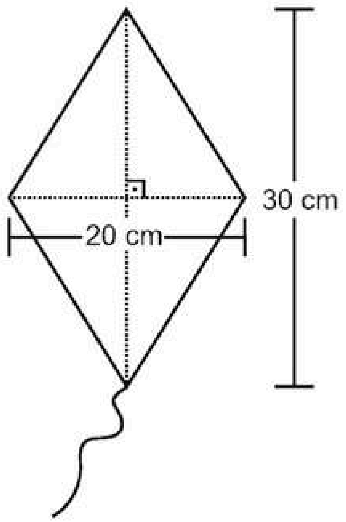
Para pavimentar esse pátio, quantos metros quadrados de cerâmica são necessários?

A) 11 m^2
B) 14 m^2
C) 16 m^2
D) 20 m^2
E) 22 m^2

Atividade 7

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

(M090029PE) Pedro confecciona papagaios usando papel de seda e pedaços finos de madeira. O desenho abaixo mostra como ficou um de seus papagaios depois de pronto.

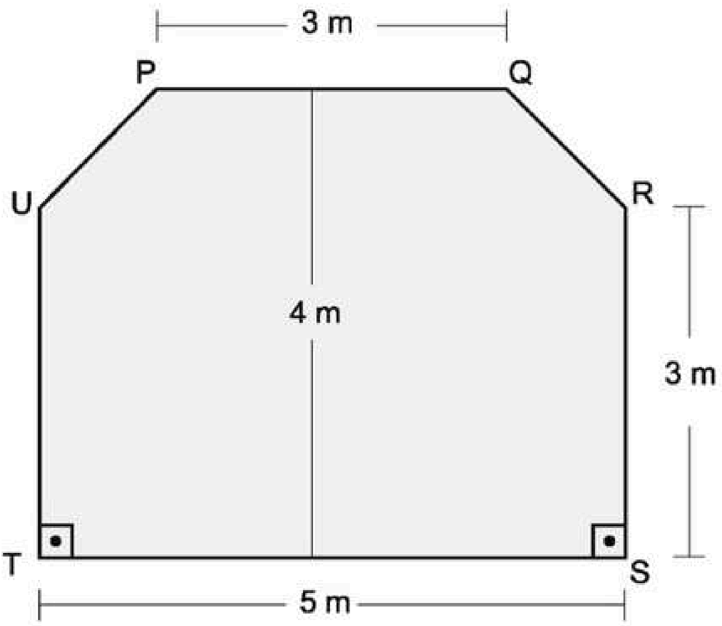


Quantos centímetros quadrados de papel de seda Pedro gastou para confeccionar esse papagaio?

A) 25
B) 50
C) 300
D) 600
E) 3000

Atividade 8

(M100230A9) No polígono da figura abaixo, PQ é paralelo a TS, e UT é paralelo a RS.

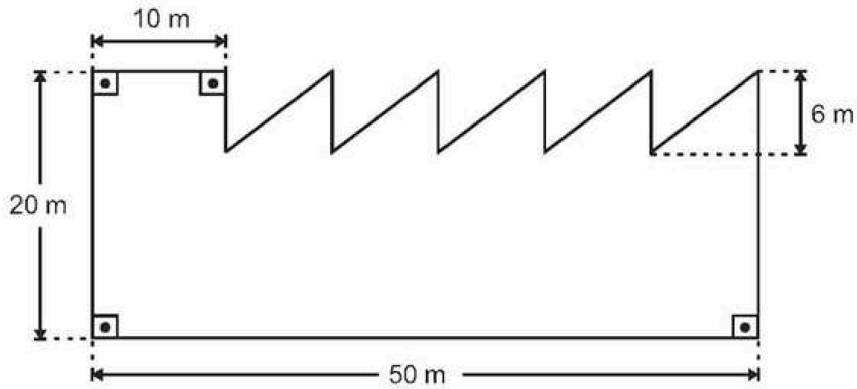


A medida da área desse polígono, em metros quadrados, é

A) 15
B) 19
C) 20
D) 23
E) 24

Atividade 9

(M11067SI) O desenho abaixo representa a vista frontal da fachada de uma indústria. Os cinco triângulos que compõe essa fachada são retângulos e congruentes.

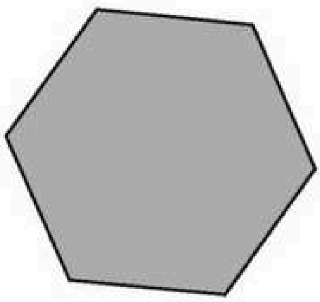


Qual é a medida da área total dessa fachada?

A) 180 m^2
B) 760 m^2
C) 800 m^2
D) 880 m^2
E) 1 000 m^2

Atividade 10

(M120274G5) O desenho abaixo representa o piso de um ringue de luta livre que possui a forma de um hexágono regular, sendo que cada aresta mede 2 m.



A área, em metros quadrados, desse ringue é

A) $12\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $\sqrt{3}$

GABARITO

ATIVIDADE 1: D
ATIVIDADE 2: D
ATIVIDADE 3: B
ATIVIDADE 4: D
ATIVIDADE 5: C
ATIVIDADE 6: B
ATIVIDADE 7: C
ATIVIDADE 8: B
ATIVIDADE 9: D
ATIVIDADE 10: B

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática : ciência e aplicações, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.