Matemática

1ª Série | Ensino Médio

18ª Semana

Função Afim e Progressões Aritméticas (PA)

DESCRITORES DO PAEBES	**D096_M** Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT507** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF08MA11/ES** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva (ou recorrentes) e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

VOCÊ SABIA?

A COPA DO MUNDO E A PROGRESSÃO ARITMÉTICA

A Copa do Mundo, evento esportivo de magnitude global, transcende fronteiras e unifica nações em torno do amor pelo futebol. Desde sua primeira edição em 1930, esse torneio tem sido palco de momentos memoráveis, onde talento, paixão e rivalidade se entrelaçam em uma dança de emoções.

Em meio a essa cadência previsível, houve um momento singular em que os Estados Unidos e o Irã compartilharam o palco da Copa do Mundo. Foi em 1998, na França, quando essas duas nações, com suas diferenças políticas e culturais, se encontraram nos gramados para competir pelo título mundial. Essa partida ficou conhecida como "jogo da paz" e chamou a atenção do mundo diante a situação política vivida pelas duas nações. Na entrada os jogadores das seleções posaram juntos para uma foto histórica. Houve também entrega de flores brancas pelos iranianos e estadunidenses. Esse encontro esportivo transcendeu as fronteiras geopolíticas, destacando a capacidade do futebol de unir pessoas de origens diversas em torno de um objetivo comum.

Entretanto, os conflitos da Segunda Guerra Mundial foram maiores do que o espírito esportivo, o que fez com que duas edições da Copa do Mundo não acontecessem entre 1939 e 1945. Por isso, até a última copa em 2022, aconteceram 22, ao invés de 24 competições. Para listar em quais países essas copas aconteceram seria necessária uma pesquisa, mas listar os anos é tarefa fácil, tendo em vista que a Copa do Mundo acontecem a cada 4 anos, formando uma progressão aritmética de razão 4, cujo primeiro termo é a primeira copa, em 1930.

Neste material vamos dar continuidade dos estudos de progressão aritmética, desta vez, associando ao estudo já realizado sobre função afim.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

- **FUNÇÃO AFIM**

Um caso particular de função é a **função afim,** que é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma **f (x) = ax + b**, em que **a** e **b** são números reais e x pode ser qualquer número real. Os valores **a** e **b** são os coeficientes da função.

Alguns exemplos de função afim:

f(x) = 2x + 1, em que a = 2 e b = 1.
f(x) = -3x + 4, em que a = -3 e b = 4.
f(x) = -2x, em que a =-2 e b = 0.

- **TAXA DE VARIAÇÃO**

Dada uma função, podemos estudar seu comportamento analisando a relação entre a variação das imagens (Δy) e a variação dos respectivos elementos do domínio que as determinam (Δx), ou seja, podemos verificar como varia f(x) atribuindo diferente valores para x.

Como exemplo, vamos analisar o comportamento da função afim dada por f(x) = 2x + 1.
Primeiro, escolhemos dois elementos do domínio e calculamos as respectivas imagens:

- Para $x_1 = 0, temos f(x_1) = y_1 = 1$
- Para $x_2 = 1, temos f(x_2) = y_2 = 3$

Em seguida, comparamos a variação entre as imagens obtidas com a variação dos respectivos elementos do domínio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{1-0} = 2$$

Assim, o número 2 é a **taxa de variação** da função f no intervalo [0,1].

CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)**

Carla tornou a leitura um hábito pessoal. Ela havia lido, até o início de janeiro de 2024, 20 livros e se dispôs a ler 2 livros por mês, sem repeti-los. Caso consiga cumprir sua meta, observe a quantidade total de livros que Carla terá lido, mês a mês, a partir do início de janeiro:

Mês	Quantidade total de livros lidos
1º	20
2º	22
3º	24
4º	26
5º	28

A sequência formada pela quantidade total de livros lidos, mês a mês, a partir do início de janeiro, é um exemplo de **progressão aritmética**, abreviadamente conhecida como PA. Observe que um termo qualquer dessa sequência, a partir do segundo, é obtido por meio da adição do termo anterior com 2, ou seja:

- $a_2 = \underbrace{20}_{a_1} + 2 = 22$
- $a_3 = \underbrace{22}_{a_2} + 2 = 24$
- $a_4 = \underbrace{24}_{a_3} + 2 = 26$
- $a_5 = \underbrace{26}_{a_4} + 2 = 28$

Nesse caso, tem-se $a_{n+1} = a_n + 2$, para $n = 1, 2, 3, 4$.

Uma **progressão aritmética** (PA) é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado com um número constante r, chamado de **razão** da PA.

Se (a_n) é uma PA de razão r, então:

$$a_{n+1} = a_n + r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*$$

Uma PA pode ser finita ou infinita, dependendo se a sequência é finita ou infinita.

No exemplo anterior, temos uma PA finita de razão r = 2.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **TERMO GERAL DE UMA PA**

Dados os números reais **a** e **r**, a PA cujo primeiro termo é **a** e cuja razão é **r** pode ser definida por recorrência da seguinte maneira:

$$a_1 = a \text{ e } a_{n+1} = a_n + r$$

Porém, muitas vezes é conveniente expressar o n-ésimo termo da PA utilizando os valores do primeiro termo a_1 e da razão r. Observe.

- $a_1 = a_1$
- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 + r} + r = a_1 + 2r$
- $a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 + 2r} + r = a_1 + 3r$

$\vdots$

- $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$\vdots$

Nesse caso, supõe-se que o primeiro termo a_1 seja conhecido.

Caso se conheça um termo a_K qualquer, também podemos utilizar a expressão

$$a_n = a_k + (n - k)r$$

Para demonstrá-la, observe que, de acordo com $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n - 1)r & \text{(I)} \\ a_k = a_1 + (k - 1)r & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo II de I membro a membro, obtemos:

$$a_n - a_k = (n - 1)r - (k - 1)r \Rightarrow a_n - a_k = nr - r - kr + r \Rightarrow a_n = a_k + (n - k)r$$

Exemplo:

Se (4,7,10,13,...) é uma PA, em que a = 4 e r = 7 - 4 = 3, então seu termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n + 1$$

O termo geral de uma PA de primeiro termo a_1 e razão r é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

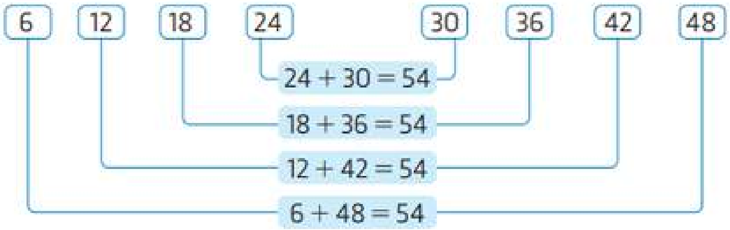
Se a_k é o k-ésimo termo da PA, então o termo geral também pode ser:

$$a_n = a_k + (n - k)r$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **SOMA DOS TERMOS DE UMA PA FINITA**

Em uma PA finita, o primeiro e o último termos são chamados extremos da PA. Considere, por exemplo, a PA (6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48), em que os extremos são $a_1 = 6$ e $a_8 = 48$. Veja, no esquema a seguir, um modo de formar pares com os termos dessa PA, denominados pares de termos equidistantes dos extremos.



Uma propriedade importante, que podemos observar no esquema, é que, ao adicionar os dois termos de cada par, obtemos sempre o mesmo valor, correspondente à soma dos extremos da PA. No caso dessa PA, a soma dos extremos é 6 + 48 = 54.

Essa é uma propriedade válida para qualquer PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Para demonstrar isso, observe que os termos equidistantes dos extremos podem ser expressos por a_{1+k} e a_{n-k}, com k = 1,2,3, ..., n - 1. A soma desses termos é dada por:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = (a_1 + k \cdot r) + (a_n - k \cdot r) = a_1 + a_n$$

Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Vamos utilizar essa propriedade para obter uma fórmula que calcule a soma dos termos de uma PA finita qualquer

Se S_n é a soma dos termos da PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, podemos escrever:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{ou} \quad S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Ao calcular $S_n + S_n$, podemos agrupar termos equidistantes dos extremos, como a seguir.

$$S_n + S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Substituindo cada expressão dentro dos parênteses por $a_1 + a_n$, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Essa é a soma com n parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$. Assim:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

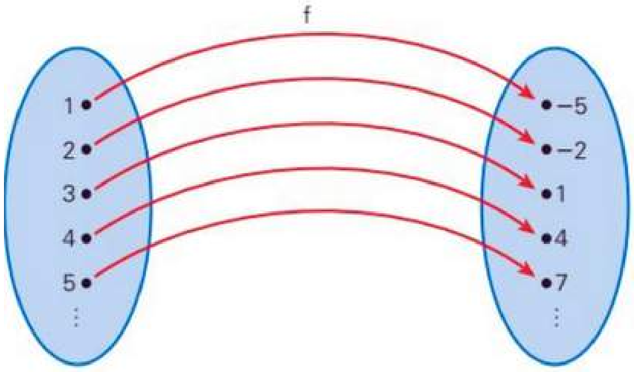
Os n primeiros termos de uma PA qualquer, finita ou infinita, formam uma PA finita com n termos. Assim, temos o seguinte resultado:

A soma dos n primeiros termos de uma PA (a_n) é dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FUNÇÃO AFIM E PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

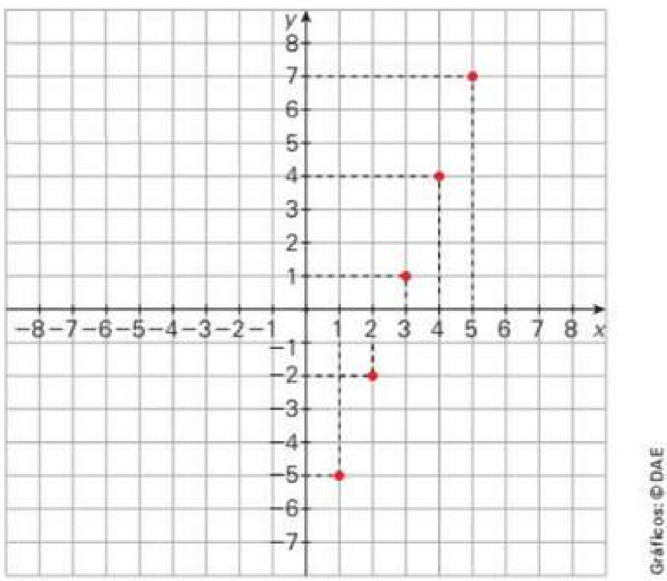
Há uma relação direta entre uma progressão aritmética e uma função afim. Quando escrevemos o termo geral de uma progressão aritmética, expressamos qualquer termo em função de sua posição na sequência.
Para observar melhor essa relação, vamos considerar, por exemplo, a progressão aritmética (-5, -2, 1, 4, 7, 10, ...). Essa sequência é uma função f de domínio IN*, formado pelos índices que indicam a ordem de seus termos, como ilustrado no diagrama a seguir.



Podemos, ainda, representar numa tabela.

x	y
1	-5
2	-2
3	1
4	4
5	7

Representando essa função no plano cartesiano, temos um conjunto formado por pontos:



Note que, embora os pontos estejam alinhados, o gráfico não é uma reta, mas um conjunto de pontos alinhados. Isso se deve ao fato de o domínio ser formado por valores de x que pertencem aos naturais diferentes de zero. Utilizando a fórmula do termo geral da progressão aritmética, podemos obter o valor do enésimo termo em função de n, cuja função é uma função afim com domínio em IN*, isto é:

$(-5, -2, 1, 4, 7, 10, ...)$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 3$

$a_n = 3n - 8 \Rightarrow a_n = f(n) = 3n - 8$

Função afim com domínio em $\in \mathbb{N}^*$.

Observação:

A taxa de crescimento da função afim, com domínio IN*, representa a razão da progressão aritmética. Assim, quando em algum fenômeno se diz que o crescimento é em progressão aritmética, significa que esse crescimento é linear (gráfico formado por pontos alinhados).

Exemplo:

Vamos considerar a função definida no conjunto dos reais por f(x) = -4x + 5 e obter a sequência formada por:

$$(f(1)\ ,\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ ...)$$

Substituindo x na lei de formação da função por valores em IN*, temos:

$f(1) = -4 \,.\, 1 + 5 = 1$
$f(2) = -4 \,.\, 2 + 5 = -3$
$f(3) = -4 \,.\, 3 + 5 = -7$
$f(4) = -4 \,.\, 4 + 5 = -11$
$\vdots$

A sequência obtida é (1, -3, -7, -11, ...), ou seja, uma progressão aritmética de razão -4.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Observe também a progressão aritmética (-1, 1, 3, 5, ...), em que a = -1 e r = 2. Logo, o termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n\text{-}1).\,r$$

$$a_n = \text{-}1 + (n\text{-}1).2$$

$$a_n = \text{-}1 + 2n - 2$$

$$a_n = 2n - 3$$

Essa progressão aritmética pode ser relacionada à função afim f: IR→IR, dada por f(x) = 2x - 3, pois 2 = r e -3 = a_1 - r.

Assim, a representação gráfica da PA correspondente aos pontos do gráfico de f com abscissas x = 1, 2, 3, 4, ...

gráfico de f

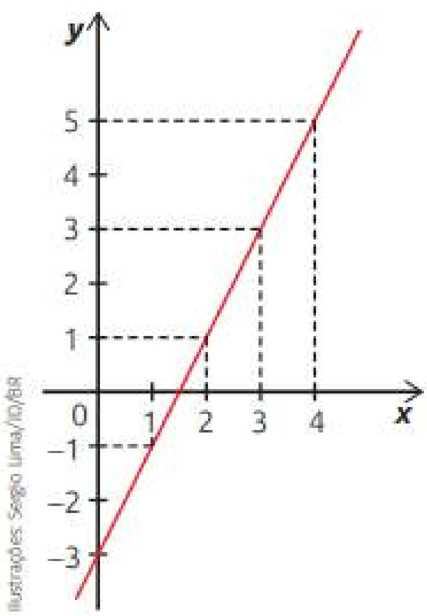
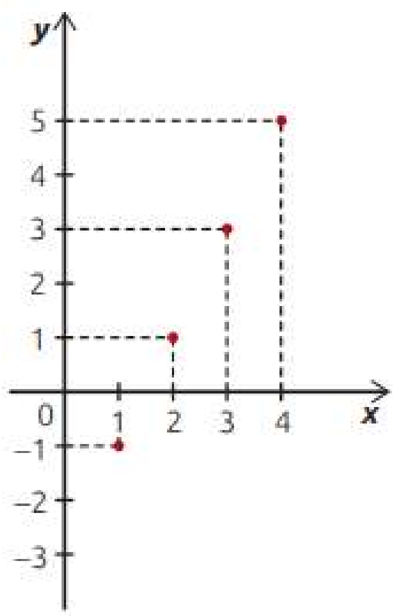


gráfico de (a_n)



Observe que as funções representadas nos gráficos possuem a mesma lei de formação, porém são definidas em domínios diferentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Observe esta sequência: (-14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, ...).
Escreva a lei de formação de uma função afim f(n), com $n \in IN^*$, para a sequência dada.

Resolução:
Temos que a = -14 e r = 5. Assim:

$$a_n = a_1 + (n\text{-}1).r$$

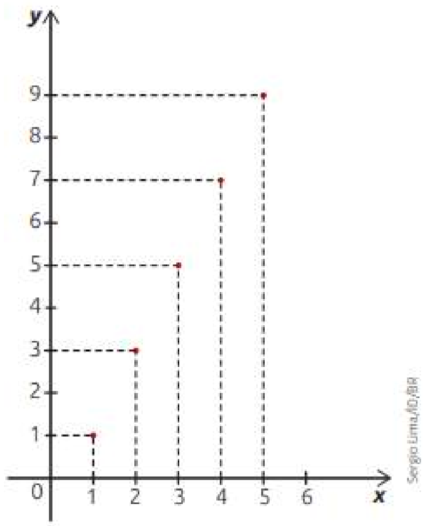
$$a_n = \text{-}14 + (n\text{-}1).5$$

$$a_n = 5n \text{-}19$$

Logo, a lei de formação da função é f(x) = 5n -19, e $n \in IN^*$.

2

Determine o termo geral da PA representada no gráfico a seguir e a lei de formação da função afim f relacionada a ela.



Resolução:
Para resolver essa tarefa, devemos associar o termo geral de uma PA a uma função afim.

Temos a imagem de f como a sequência de pontos (1, 3, 5, 7, 9, ...) que formam uma PA, em que a_1 = 1 e r = 2. Assim, o termo geral dessa sequência é dado por:

$$a_n = 1 + (n\text{-}1).2$$

$$a_n = 2n - 1$$

Desse modo, a lei de formação da função afim relacionada a ela é f(x) = 2x - 1.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

3

Considere a função afim f(x) = 3x + 5 e a PA (-1, 3, 7, 11, 15, ...) de razão 4. Determinando (f(-1), f(3), f(7), f(11), f(15), ...) verificamos também se tratar de uma PA. Qual é a razão dessa PA?

Resolução:

Substituindo, temos:

$f(-1) = 3.(-1) + 5 = -3 + 5 = 2$

$f(3) = 3.(3) + 5 = 9 + 5 = 14$

$f(7) = 3.(7) + 5 = 21 + 5 = 26$

$f(11) = 3.(11) + 5 = 33 + 5 = 38$

Assim, temos 2, 14, 26, 38, ou seja, uma PA de razão 12.

Observe que poderíamos determinar a razão dessa nova PA multiplicando a razão da primeira PA pelo coeficiente angular.

Razão da primeira PA = 4
Coeficiente angular = 3

$4 \times 3 = 12$

A razão da nova PA é, de fato, 12.

Sendo $f: R \rightarrow R$, definida por $f(x) = ax + b$, em que $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ são os elementos de uma P.A. de razão r, f é uma função afim se, e somente se, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ é uma P.A. de razão $a \cdot r$, em que a é o coeficiente angular de f.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

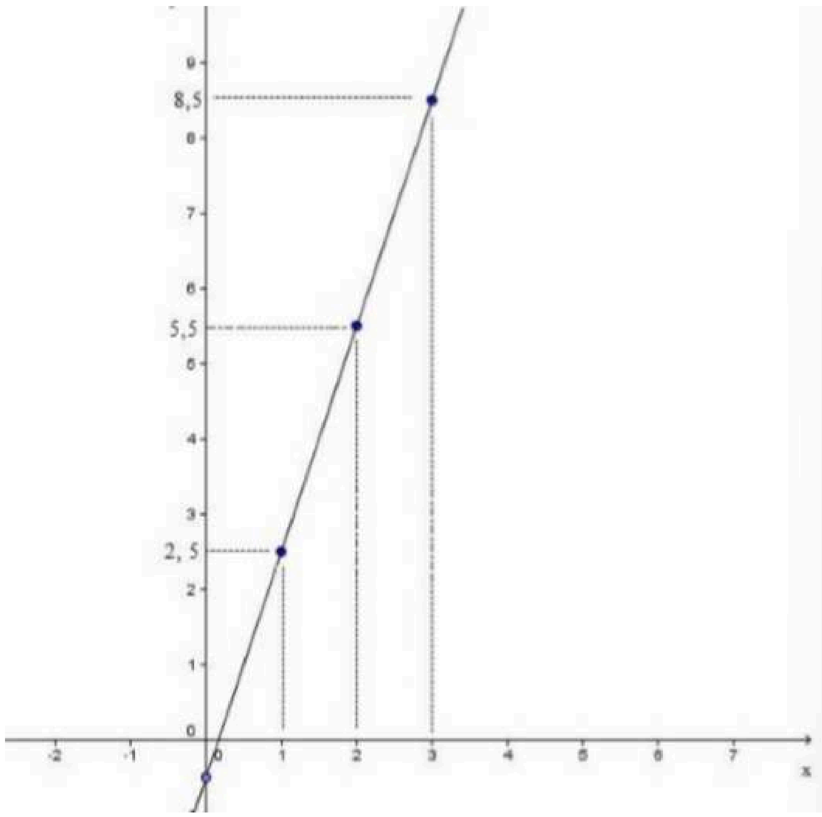
(M120422E4) Considere a função afim f(x) = 3x + 4, cujo conjunto domínio corresponde aos elementos da sequência (5, 10, 15, 20, ...). As imagens da função f formam uma progressão aritmética.

Os 4 primeiros termos dessa progressão são

A) 5, 10, 15 e 20.
B) 7, 10, 13 e 16.
C) 15, 30, 45 e 60.
D) 19, 34, 49, e 64.
E) 19, 24, 29 e 34.

Atividade 2

A razão (r) e o primeiro termo (a_1) da progressão aritmética formada pelas ordenadas (eixo y) dos pontos assinalados são, respectivamente:



A) 3 e 5,5
B) 3 e 2,5
C) 4 e 2,5
D) 4 e 5
E) 2,5 e 5,5

Atividade 3

A lei da função afim que determina a PA (-1, 5, 11, 17, 23) a partir da PA (-2, 0, 2, 4, 6, ,,,) é:
A) f(x) = 3x + 5
B) f(x) = 5x + 3
C) f(x) = 3x
D) f(x) = 5x
E) f(x) = 3x + 3

Atividade 4

Considerando a PA (4, 7, 10, 13, 16, ...), a lei da função afim associada a essa PA é:

A) f(x) = x + 3
B) f(x) = 3x
C) f(x) = x
D) f(x) = 3x + 3
E) f(x) = 3x + 1

Atividade 5

Uma função polinomial do 1º grau cuja lei de formação é f(x) = 2x + 3, possui como domínio os elementos da progressão aritmética (PA): (2, 4, 6, 8...).
O conjunto imagem dessa função também representa uma P.A:
A) 3, 6, 9, 12 e 15.
B)) 4, 5, 6, 7 e 8.
C) 4, 8, 12, 16 e 20
D) 5, 7, 9, 11 e 13
E) 7, 11, 15, 19 e 23.

Atividade 6

Seja f(x) = 5x - 6 uma função afim e (2, 6, 10, 14, 18, ...) uma PA de razão 4. Determinando (f(2), f(6), f(10), f(14), f(18), ...) verificamos também se tratar de uma PA. Qual a razão dessa nova PA?
A) 4
B) 8
C) 16
D) 20
E) 24

Atividade 7

Considere a função afim g: IR$\longrightarrow$ IR definida por g(x) = 3x + 1, o valor de g(1) + g(2) + g(3) + ... + g(20) é:

A) 26
B) 50
C) 300
D) 500
E) 650

Atividade 8

A função f(x) = 2x + 4 determina os termos de uma PA a partir da PA (-1, 2, 5, 8, 11). Quanto a essa nova PA, a razão é:

A) 3
B) 6
C) 9
D) 12
E) 15

Atividade 9

O valor de **a** para o qual a função f(x) = ax + 1 determine uma PA de razão 12 a partir da PA (-1, 3, 7, 11, 15, ...) é:

A) 3
B) 4
C) 8
D) 12
E) 24

Atividade 10

desafio!

(URCA) Considere a função afim f(x) = 2x - 3 e a progressão aritmética (a_1, a_2, a_3, ..., a_{50}) de razão r = 1/7 e o primeiro termo a_1= 3. A soma f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + ... + f(a_{50}) é igual a:

A) 200
B) 300
C) 400
D) 500
E) 600

GABARITO

ATIVIDADE 1: D
ATIVIDADE 2: B
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: E
ATIVIDADE 5: E
ATIVIDADE 6: D
ATIVIDADE 7: E
ATIVIDADE 8: B
ATIVIDADE 9: A
ATIVIDADE 10: D

Resolução do desafio:

Determinando a_{50}:

$$a_{50} = a_1 + (n\text{-}1).r$$

$$a_{50} = 3 + (50\text{-}1).\frac{1}{7}$$

$$a_{50} = 3 + (49).\frac{1}{7}$$

$$a_{50} = 3 + \frac{49}{7}$$

$$a_{50} = 10$$

Opção D.

Substituindo:

$f(x) = 2x - 3$
$f(3) = 2(3) - 3$
$f(3) = 6 - 3$
$f(3) = 3$

$f(x) = 2x - 3$
$f(10) = 2(10) - 3$
$f(10) = 20 - 3$
$f(10) = 17$

Soma da sequência:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_{50}).n}{2}$$

$$S_n = \frac{(3 + 17).50}{2}$$

$$S_n = \frac{(20).50}{2}$$

$$S_n = \frac{1\,000}{2}$$

$$S_n = 500$$

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Giovanni Júnior, José Ruy. A Conquista da Matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. - 1.ed. - São Paulo : FTD, 2022.

Logen, Adilson. Interação matemática: o tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. - São Paulo: Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

Matemática : ciência e aplicações, volume 1: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Secretaria Estadual de Pernambuco. Acesso em https://slideplayer.com.br/slide/10158200/ do dia 20/05/2024.