

Matemática

1ª Série | Ensino Médio

21ª Semana



**Resolução de equações
polinomiais do 2º grau
completas**



DESCRIPTORES DO PAEBES	D087_M Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRIPTORES	EF09MA26/ES Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. (EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário. (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

CONTEXTUALIZAÇÃO



Ao longo da história da Matemática, vários povos deram importantes contribuições ao desenvolvimento dessa ciência: egípcios, babilônios, gregos, romanos, hindus, árabes e muitos outros.

Os babilônios, por exemplo, tiveram um importante papel na construção de campos da Matemática como a Álgebra e a Geometria. Os conhecimentos matemáticos dessa civilização que habitou a antiga Mesopotâmia foram extremamente valiosos para que ela se desenvolvesse e prosperasse na agricultura, arquitetura e astronomia.

Esses conhecimentos eram aplicados em várias situações, desde o cálculo dos dias, meses e anos até a construção de templos e palácios.

Entre os vários documentos que os babilônios deixaram, há um antigo texto de problemas matemáticos, escrito em argila que apresenta o seguinte problema:

Quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?

Passando da linguagem usual para a linguagem algébrica, a solução desse problema equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, que também pode ser escrita da seguinte forma: $x^2 - x - 870 = 0$

A equação acima, como você já estudou, é chamada de **equação do 2º grau**. Os babilônicos foram um dos primeiros povos a registrar e resolver situações que envolvessem equações desse tipo.

Neste material você vai resolver situações em que aparecem equações do 2º grau, desta vez, completa.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

Denomina-se **equação do 2º grau** na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a , b e c são números reais e $a \neq 0$, como por exemplo, $x^2 + 2x - 4 = 0$.

• COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Numa equação do 2º grau, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, os números reais a , b e c são chamados coeficientes da equação, com a sendo o coeficiente do termo x^2 , b sendo o coeficiente do termo x e c sendo o coeficiente sem incógnita ou termo independente de x .

• EQUAÇÕES DO 2º GRAU COMPLETAS E INCOMPLETAS

Pela definição, devemos ter sempre $a \neq 0$. Entretanto, podemos ter $b = 0$ ou $c = 0$.

Assim:

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **completa**.

Quando $b \neq 0$ e $c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em c** .

Quando $b = 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em b** .

Quando $b = 0$ e $c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em b e c** .

• RAIZ DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

A raiz ou solução de uma equação é o valor que, atribuindo à incógnita, torna a sentença matemática verdadeira. Por exemplo, as raízes ou soluções da equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$ são 2 e 3, pois esses valores são os números que tornam a sentença verdadeira. Indicamos as raízes assim: $x' = 2$ e $x'' = 3$.

Pensando nos números reais, existem equações sem solução. Por exemplo: $x^2 = -4$ não tem solução ou raiz real, pois não existe número real que elevado ao quadrado resulte -4.

No material anterior, nós estudamos as equações do 2º grau incompletas. A partir de agora nós vamos estudar as equações do 2º grau completa.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FATORAÇÃO DO TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Podemos resolver equações do 2º grau completas. Para isso, precisamos recordar como fazer a fatoração de um trinômio quadrado perfeito.

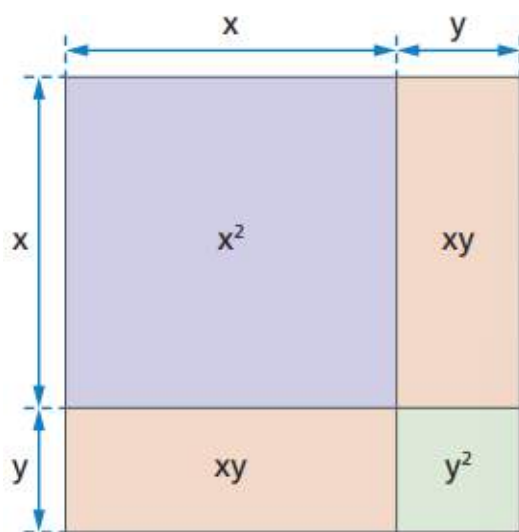


Figura (I)

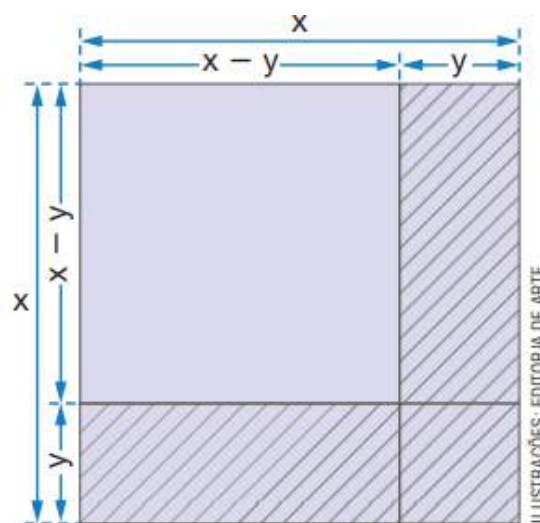


Figura (II)

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A figura (1) representa um quadrado cujo lado mede $(x + y)$ unidades de comprimento e cuja área pode ser escrita de duas maneiras:

$$x^2 + 2xy + y^2 \text{ ou } (x + y)^2$$

Na figura (2), a região não hachurada representa um quadrado cujo lado mede $(x - y)$ unidades de comprimento e cuja área pode ser representada de duas maneiras:

$$x^2 - 2xy + y^2 \text{ ou } (x - y)^2$$

Então, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{\text{polinômio}} &= \underbrace{(x + y)(x + y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}} = (x + y)^2 \\ \underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{\text{polinômio}} &= \underbrace{(x - y)(x - y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}} = (x - y)^2 \end{aligned}$$

Os polinômios $x^2 + 2xy + y^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$ são chamados trinômios quadrados perfeitos. Trinômios, porque possuem três termos; quadrados perfeitos, porque o primeiro representa o quadrado de $(x + y)$, e o segundo representa o quadrado de $(x - y)$.

Nem todos os trinômios são quadrados perfeitos. É importante reconhecer se um trinômio é ou não quadrado perfeito. Para isso, considere as seguintes situações:

1. Verificar se o trinômio $x^2 + 8xy + 16y^2$ é quadrado perfeito. Inicialmente, verificamos se pelo menos dois termos do trinômio são quadrados. Nesse caso, x^2 e $16y^2$ são quadrados, pois:

$$\underbrace{x^2}_{x^2} + 8xy + \underbrace{16y^2}_{(4y)^2}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Finalmente, multiplicamos por 2 o produto dessas duas raízes para verificar se o resultado será igual ao termo restante: $2 \cdot x \cdot 4y = 8xy$. Como, nesse caso, o termo restante é justamente $8xy$, dizemos que o trinômio dado é **quadrado perfeito**.

2. Verificar se o trinômio $x^2 - 6x + 9$ é quadrado perfeito. x^2 e 9 são termos quadrados.

$$\begin{array}{c} \boxed{x^2} - 6x + \boxed{9} \\ \swarrow \quad \searrow \\ x^2 \qquad 3^2 \end{array}$$

$2 \cdot x \cdot 3 = 6x \longrightarrow 6x$ é o termo restante do trinômio

Logo, $x^2 - 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.

3. Verificar se o trinômio $16x^2 - 24x + 25$ é quadrado perfeito. $16x^2$ e 25 são termos quadrados.

$$\begin{array}{c} \boxed{16x^2} - 24x + \boxed{25} \\ \swarrow \quad \searrow \\ (4x)^2 \qquad 5^2 \end{array}$$

$2 \cdot 4x \cdot 5 = 40x \longrightarrow 40x$ não corresponde ao termo restante do trinômio.

Logo, $16x^2 - 24x + 25$ não é um trinômio quadrado perfeito.

Os seguintes trinômios são quadrados perfeitos. Vamos fatorá-los:

- Fatorar $x^2 + 8xy + 16y^2$.

$$\begin{array}{l} \boxed{x^2} + 8xy + \boxed{16y^2} \\ \begin{array}{cc} x^2 & (4y)^2 \\ 2 \cdot x \cdot 4y = 8xy \end{array} \end{array} \longrightarrow x^2 + 8xy + 16y^2 = (x + 4y)^2$$

- Fatorar $a^6 - 10a^3b + 25b^2$.

$$\begin{array}{l} \boxed{a^6} - 10a^3b + \boxed{25b^2} \\ \begin{array}{cc} (a^3)^2 & (5b)^2 \\ 2 \cdot a^3 \cdot 5b = 10a^3b \end{array} \end{array} \longrightarrow a^6 - 10a^3b + 25b^2 = (a^3 - 5b)^2$$

Agora que recordamos o trinômio quadrado perfeito, podemos resolver uma equação do 2º grau por meio da fatoração, como veremos a seguir.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RESOLVENDO EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA POR MEIO DA FATORAÇÃO

Vimos que o polinômio, por exemplo, $x^2 - 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito e pode ser representado por $(x - 3)^2$.

Tomemos a equação

$$4x^2 - 4x + 1 = 9$$

Substituindo, temos

$$(2x - 1)^2 = 9$$

Temos:

$$(2x - 1)^2 = 9 \begin{cases} 2x - 1 = -\sqrt{9} & 2x - 1 = -3 & 2x = -2 & x = -1 \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = \sqrt{9} & 2x - 1 = 3 & 2x = 4 & x = 2 \end{cases}$$

As soluções da equação $4x^2 - 4x + 1 = 9$ são -1 e 2, e podem ser representadas como $x' = -1$ e $x'' = 2$

Existe mais de um procedimento para determinar as raízes de uma equação do 2º grau completa. Veremos, a seguir, outro procedimento.

RESOLVENDO EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

Esse procedimento se baseia em completar os quadrados.

O método consiste em obter uma equação equivalente a qual o 1º termo seja um trinômio quadrado perfeito.

Como exemplo, temos a equação do 2º grau $x^2 - 6x - 16 = 0$.

- Isola-se o termo independente de x no 2º membro:

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x^2 - 6x = 16$$

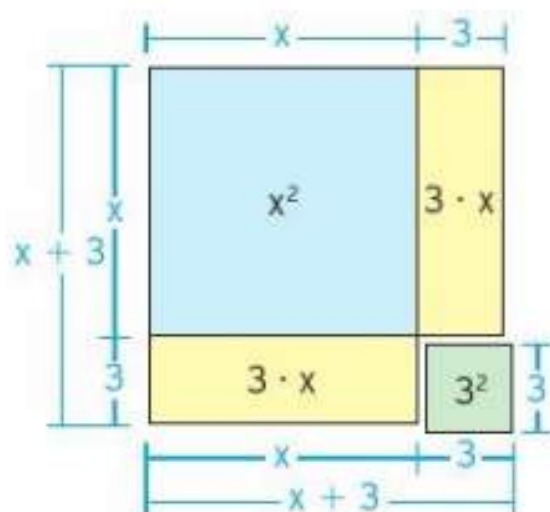
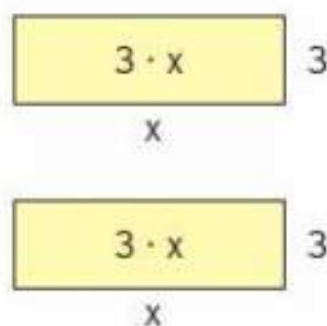
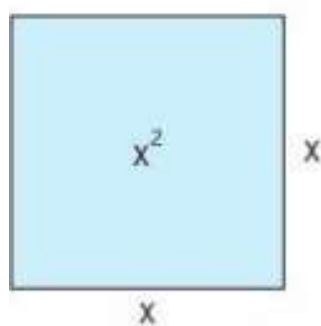
- x^2 é um dos quadrados perfeitos do trinômio a ser obtido.
- O coeficiente de x é -6, que é igual a $-2 \cdot 3$.

Então, o outro termo que é um quadrado perfeito é 3^2 .

Acrescentamos 3^2 aos dois membros da equação.

Veja uma representação geométrica desse procedimento:

CONCEITOS E CONTEÚDOS



$$(x - 3)^2 = 25 \begin{cases} x - 3 = -5 & \rightarrow x = -2 \\ \text{ou} \\ x - 3 = 5 & \rightarrow x = 8 \end{cases}$$

Algebricamente

$$x^2 - 6x + 3^2 = 16 + 3^2$$
$$(x - 3)^2 = 25$$

As soluções da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ são -2 e 8 e podem ser representadas por $x' = -2$ e $x'' = 8$.

As figuras serviram apenas para ilustrar, pois, como x é um número real, x pode assumir valores negativos. Note também que nesse procedimento o coeficiente de x^2 precisa ser igual a 1.

A FÓRMULA DE BHASKARA

No século XII, Bhaskara, um importante matemático da Índia, destacou-se por seus vários escritos sobre aritmética, álgebra e outros assuntos. Dentre esses escritos, encontra-se a fórmula de Bhaskara, que é uma generalização da resolução de equações de 2º grau com uma incógnita.

Acompanhe um procedimento para determinar a fórmula de Bhaskara no qual foi utilizado o método do completamento de quadrados. As áreas de quadrados e retângulos aparecem apenas como esquema auxiliar.

Nesse procedimento, é possível verificar que o procedimento de obtenção de um trinômio quadrado perfeito pode ser aplicado a qualquer equação do 2º grau com uma incógnita.

Considere a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } x \text{ representando um número real.}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Nosso objetivo é obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação.

Vamos multiplicar os dois membros da equação por $4a$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Observe a figura. O terceiro termo do trinômio deve ser b^2 .

Vamos somar b^2 a ambos os membros da equação:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

Para que no primeiro membro da equação fique somente o trinômio quadrado perfeito, vamos subtrair $4ac$ de ambos os membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito, obtemos:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

A expressão $b^2 - 4ac$ será representada pela letra grega Δ (delta).

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$ na equação acima, temos:

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

Supondo $\Delta > 0$ vem:

$$2ax + b = \pm \sqrt{\Delta} \text{ Subtraindo } b \text{ de ambos os membros da equação:}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \text{ e, finalmente, dividindo ambos os membros por } 2a \text{ para encontrar } x:$$

	$2ax$	b
$2ax$	$4a^2x^2$	$2abx$
b	$2abx$	b^2

$$-b \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nessa fórmula, precisamos extrair a raiz quadrada de Δ .

Se o valor de delta for um número negativo, $\sqrt{\Delta}$ não será um número real, e a equação não terá solução no conjunto $\mathbb{R}$.

Se $\Delta = 0$, $\sqrt{\Delta} = 0$, e $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ fica $x = \frac{-b}{2a}$ e a equação terá somente uma solução.

Se o valor de delta for um número positivo, aí a equação terá duas soluções reais.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RESOLVENDO EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA POR MEIO DA FÓRMULA DE BHASKARA

Exemplo:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

- Identificando os coeficientes:

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$c = -10$$

- Calculamos o valor de Δ , substituindo os valores de a, b e c:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$$

$$\Delta = 9 + 40 = 49$$

- Agora aplicamos a fórmula para determinar os valores de x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

- Podemos, ainda, verificar:

$$(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 10 =$$

$$= 25 - 15 - 10 = 0 \text{ e}$$

$$2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$$

Logo, - 5 e 2 são as soluções, ou as raízes, da equação $x^2 + 3x - 10 = 0$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

DISCRIMINANTE DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

O valor de Δ (positivo, negativo ou nulo) é que determina quantas raízes reais a equação tem quando seus coeficientes são números reais.

Quando $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas.

Quando $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.

Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Vamos determinar o número de raízes reais distintas de equações em resolvê-las.

a) Equação: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas.

b) Equação: $12x^2 - 9x + 7 = 0$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 7 = 81 - 336 < 0$$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais, ou seja, o número de raízes reais é zero.

c) Equação: $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais, ou seja, uma única raiz real.

É bom saber:

No material anterior nós estudamos as equações do 2º grau incompletas e vimos como calcular as equações incompletas em b, incompletas em c e incompletas em b e c.

Todas as equações incompletas que resolvemos podem ser solucionadas pela fórmula que usamos para resolver a equação do 2º grau completa.

A seguir veremos exemplo de cada equação do 2º grau incompleta sendo resolvida por meio da fórmula.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

USANDO A FÓRMULA PARA RESOLVER TAMBÉM AS EQUAÇÕES DO 2º GRAU INCOMPLETAS

- EQUAÇÃO DO 2º GRAU INCOMPLETA EM c

$$9x^2 - 4x = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a = 9, b = -4, c = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0 = 16 - 0 = 16$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 9} = \frac{4 \pm 4}{18}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{4 + 4}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \\ x'' &= \frac{4 - 4}{18} = \frac{0}{18} = 0 \end{aligned}$$

- EQUAÇÃO DO 2º GRAU INCOMPLETA EM b

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a = 1, b = 0, c = -9$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 0 + 36 = 36$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm 6}{2}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{0 + 6}{2} = 3 \\ x'' &= \frac{0 - 6}{2} = -3 \end{aligned}$$

- EQUAÇÃO DO 2º GRAU INCOMPLETA EM b E c

$$-4x^2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a = -4, b = 0, c = 0$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-4)} = \frac{0 \pm 0}{-8} = \frac{0}{-8} = 0$$

Observe que na equação $-4x^2 = 0$, $\Delta = 0$ e, por isso, temos apenas 1 raiz.

Vimos que, por meio da fórmula de Bhaskara, podemos resolver tanto as equações completas quanto as equações incompletas do 2º grau. No entanto, cabe a cada um escolher a melhor forma em cada situação.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e x' e x'' as raízes reais dessa equação

Entre as raízes x' e x'' e os coeficientes a , b e c da equação existem duas relações importantes, as quais veremos a seguir.

1ª relação:

Sendo x' e x'' as raízes reais da equação, temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Adicionando membro a membro essas duas igualdades, obtemos a 1ª relação.

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Em toda equação do 2º grau, em que x' e x'' são raízes reais, temos $x' + x'' = -\frac{b}{a}$

2ª relação:

Sendo x' e x'' as raízes reais da equação, temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Multiplicando membro a membro essas duas igualdades, obtemos a 2ª relação.

$$x' \cdot x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, fazemos a substituição a seguir:

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4}a\cancel{c}}{\cancel{4}a \cdot a} = \frac{c}{a}$$

Então, nas equações do 2º grau, em que x' e x'' são raízes reais, temos $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$

Vamos, agora, usar essas duas relações importantes para resolver este problema.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A equação $3x^2 - 8x - 3 = 0$ apresenta duas raízes reais e diferentes. Sem resolver a equação, determine a soma e o produto dessas duas raízes.

Pela equação dada:

$$a = 3, b = -8, c = -3$$

De acordo com as relações, podemos escrever:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3} \quad x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-3}{3} = -1$$

Logo, a soma das raízes da equação é $\frac{8}{3}$, e o produto dessas raízes é -1.

ESCREVENDO UMA EQUAÇÃO QUANDO CONHECEMOS AS RAÍZES

Podemos aplicar a relação entre as raízes e os coeficientes da equação do 2º grau para escrever a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$ quando são dados dois números reais (x' e x'') como raízes da equação. Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Como $a \neq 0$, vamos dividir todos os termos pelo coeficiente a :

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (1)$$

Sendo x' e x'' as raízes reais da equação, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a} = x' + x'' \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x' + x'') \quad (2)$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = x' \cdot x'' \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) na equação (1): $x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x'' = 0$

Se indicamos por S a soma das raízes ($x' + x'' = S$) e por P o produto dessas raízes ($x' \cdot x'' = P$), escrevemos a equação na forma:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Dessa forma, obtemos uma equação do 2º grau na incógnita x quando são dadas as raízes x' e x'' . Consideremos, então, o exemplo a seguir.

Determinar a equação do 2º grau na incógnita x , sabendo que as raízes dessa equação são os números reais $-3 + \sqrt{3}$ e $-3 - \sqrt{3}$.

$$S = (-3 + \sqrt{3}) + (-3 - \sqrt{3}) = -3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = -6$$

$$P = (-3 + \sqrt{3}) \cdot (-3 - \sqrt{3}) = (-3)^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-6)x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 6 = 0$$

Logo, a equação procurada é $x^2 + 6x + 6 = 0$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

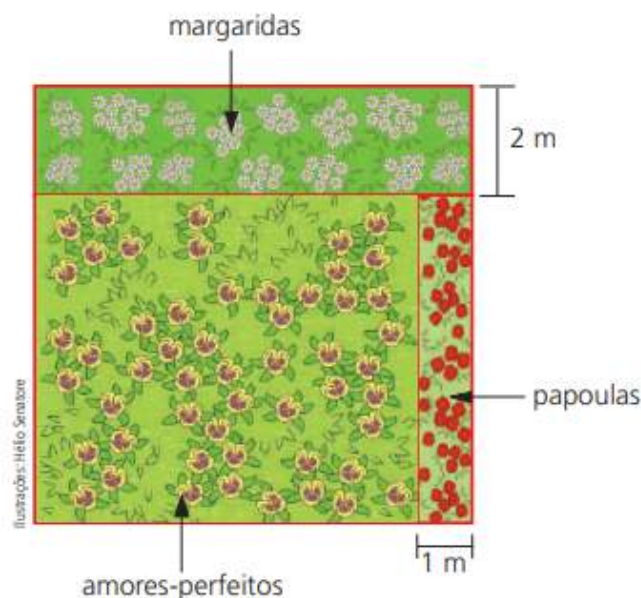
PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA

Muitas situações e problemas podem ser resolvidos por meio de equações do 2º grau.

Acompanhe um exemplo:

Um jardim, com a forma de um quadrado, foi dividido em três canteiros.

Nesses canteiros serão plantadas margaridas, papoulas e amores-perfeitos, conforme a ilustração abaixo.

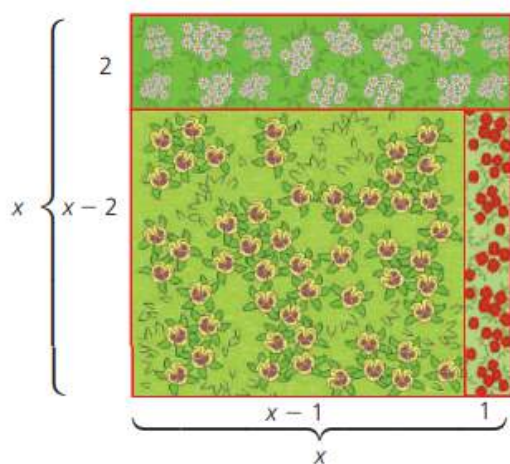


O canteiro de amores-perfeitos ocupa uma área de 42 m².

Qual é a medida do lado do jardim?

Resolução:

Representando a medida do lado do jardim por x , faremos um novo desenho:



A área do canteiro de amores-perfeitos é:

$$A = (x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

Igualando a área a 42, obtemos a equação do 2º grau:

$$x^2 - 3x + 2 = 42$$

Organizando seus termos:

$$x^2 - 3x + 2 - 42 = 0$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$a = 1; b = -3 \text{ e } c = -40$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)$$

$$\Delta = 9 + 160 = 169$$

$$x = \frac{-(-3) \pm 13}{2} \rightarrow x_1 = \frac{3 + 13}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{3 - 13}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Como a medida do lado do jardim não pode ser negativa, consideraremos somente a solução $x = 8$.

Portanto, o lado do jardim mede 8 m.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 RETOMANDO O PROBLEMA DO INÍCIO

Quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?

Resolução:

Passando da linguagem usual para a linguagem algébrica, a solução desse problema equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, que também pode ser escrita da seguinte forma: $x^2 - x - 870 = 0$

- Identificando os coeficientes:

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = -870$$

- Calculamos o valor de Δ , substituindo os valores de a, b e c:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-870)$$

$$\Delta = 1 + 3480$$

$$\Delta = 3481$$

- Agora aplicamos a fórmula para determinar os valores de x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3481}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + 59}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$x_2 = \frac{1 - 59}{2} = \frac{-58}{2} = -29$$

Como a medida do lado de uma região quadrada não pode ser negativa, temos como resposta 30.

Confira:

Lado do quadrado = 30

Área desse quadrado = $30^2 = 900$

De acordo com o enunciado, a área da região desse quadrado menos a medida do seu lado deve ser 870. Veja:

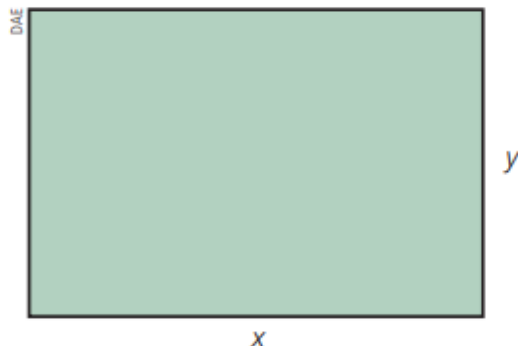
900 (área) - 30 (lado) = 870 , de fato.

Portanto, o lado mede 30.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2

O retângulo representado abaixo tem 26 cm de perímetro e 40 cm^2 de área. Quais são as medidas de seus lados?



Como o perímetro é de 26 cm, temos que:

$$x + x + y + y = 26, \text{ ou}$$

$$2x + 2y = 26, \text{ ou ainda, dividindo ambos os membros da equação por 2:}$$

- $x + y = 13$

A área é de 40 cm^2 , isto é:

- $x \cdot y = 40$

Temos um sistema de equações nas incógnitas x e y . Vamos resolvê-lo:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

Se $x + y = 13$, então $y = 13 - x$.

Substituiremos y por $13 - x$ na segunda equação:

$$x \cdot y = 40$$

$$x(13 - x) = 40$$

$$13x - x^2 = 40$$

Organizando a equação:

$$-x^2 + 13x - 40 = 0$$

$$a = -1; b = 13 \text{ e } c = -40$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-40)$$

$$\Delta = 169 - 160 = 9$$

$$x = \frac{-13 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-13 + 3}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-13 - 3}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8$$

Falta determinar y .

$$y = 13 - x$$

Para $x = 5 \rightarrow y = 13 - 5 = 8$

Para $x = 8 \rightarrow y = 13 - 8 = 5$

As soluções do sistema são $x = 5$ e $y = 8$, ou $x = 8$ e $y = 5$.

Em ambos os casos, os lados do retângulo medem 5 cm e 8 cm.

Quais são os dois números que somados resultam em 13 e multiplicados resultam em 40? Se você descobriu, confira com a solução do sistema de equações que resolvemos ao lado. Sempre que possível, exercite o raciocínio e utilize o cálculo mental para resolver problemas!

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3

Vamos determinar o valor de k , com $k \neq 0$, na equação $kx^2 - 22x + 20 = 0$ para que a soma das raízes seja $\frac{11}{3}$.

Resolução:

Temos: $a = k$, $b = -22$ e $c = 20$

$$x_1 + x_2 = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-(-22)}{k} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{22}{k} = \frac{11}{3}$$

$$11k = 66$$

$$\frac{11k}{11} = \frac{66}{11}$$

Portanto, $k = 6$.

4

Um grupo de amigos organizou uma festa para comemorar o Natal. Como presente, todos escreveram e deram um belo cartão para cada participante da festa. Os cartões foram pendurados na árvore de Natal. Se na árvore havia 156 cartões, quantas pessoas participaram da festa?

- A) 12 pessoas
- B) 13 pessoas
- C) 14 pessoas
- D) 15 pessoas
- E) 16 pessoas

Resolução:

Um grupo tinha 5 pessoas, cada pessoa deu 4 cartões: 1 para cada participante, menos para ele mesmo. Nesse caso, teremos 20 cartões pendurados na árvore: $5 \cdot 4 = 20$

O número de cartões na árvore é 156. Representando o número de pessoas por x , podemos escrever uma equação para representar o problema: $x(x - 1) = 156$

$$x(x - 1) = 156$$

$$x^2 - x = 156$$

$$x^2 - x - 156 = 0$$

$$a = 1; b = -1 \text{ e } c = -156$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-156) = 625$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$x_1 = \frac{26}{2} = 13 \text{ e } x_2 = \frac{-24}{2} = -12$$

Como o número de pessoas não pode ser negativo, desconsideramos a solução $x = -12$ e concluímos que 13 pessoas participaram da festa.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

As raízes da equação $-x^2 + 3x + 10 = 0$ são:

- A) 2 e 5
- B) 2 e -5
- C) -2 e 5
- D) -2 e -5
- E) 3 e 4

Atividade 2

A soma das raízes da equação $5x^2 + 6 = 31x$ é:

- A) 5
- B) $29/5$
- C) $25/4$
- D) 6
- E) $31/5$

Atividade 3

(UCS-RS) Se uma das raízes da equação $2x^2 - 3px + 40 = 0$ é 8, então o valor de p é:

- A) 5
- B) $13/3$
- C) 7
- D) -5
- E) -7

Atividade 4

(M122460A9) A idade de uma pessoa há 2 anos multiplicada pela sua idade daqui a 17 anos é igual a 66.

A idade dessa pessoa atualmente é

- A) 2 anos.
- B) 5 anos.
- C) 10 anos.
- D) 20 anos.
- E) 66 anos.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

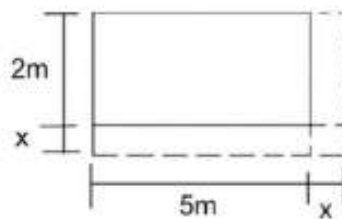
(M11080SI) Carlos encontrou em uma revista o seguinte desafio: encontre um número positivo x tal que o produto entre $x - 3$ e $x + 6$ é igual a -8 . Carlos resolveu corretamente o desafio.

Com base no valor encontrado por Carlos, constata-se que

- A) $0 < x < 2$
- B) $1 < x < 3$
- C) $2 < x < 4$
- D) $3 < x < 5$
- E) $4 < x < 6$

Atividade 6

(M120177A8) O pátio retangular representado na figura abaixo deverá ser ampliado, aumentando-se o comprimento e a largura na mesma quantidade, de forma a obter uma área 4 vezes maior.



Qual será a medida do comprimento desse pátio?

- A) 8 m.
- B) 9 m.
- C) 14 m.
- D) 20 m.
- E) 40 m.

Atividade 7

(PAMA11154MS) O quadrado da idade de uma pessoa menos o quádruplo dessa mesma idade é igual a 84. Qual é a idade dessa pessoa?

- A) 12
- B) 21
- C) 42
- D) 59
- E) 84

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 8

(M11027SI) Um fazendeiro cercou uma área retangular de 216 m^2 em que um dos lados desse retângulo é 6 m maior do que o outro.

Qual é a medida do maior lado desse retângulo?

- A) 16 m.
- B) 18 m
- C) 24 m
- D) 27 m
- E) 36 m

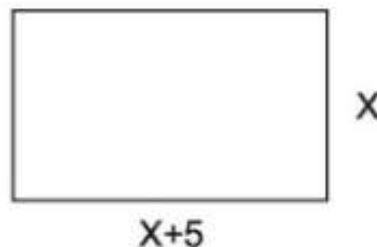
Atividade 9

(M11028SI) O produto das idades de dois irmãos é 72. Sabe-se que o mais velho tem 6 anos a mais do que o mais novo. Qual é a idade do irmão mais velho?

- A) 9 anos.
- B) 12 anos.
- C) 15 anos.
- D) 18 anos;
- E) 24 anos.

Atividade 10

(M11232SI) A área de um terreno retangular é de 150 m^2 . A frente desse terreno tem 5 metros a mais que a lateral, como mostra a figura:



A medida x da lateral desse terreno é igual a:

- A) 10 m
- B) 15 m
- C) 20 m
- D) 25 m
- E) 30 m

GABARITO

ATIVIDADE 1: C

ATIVIDADE 2: E

ATIVIDADE 3: C

ATIVIDADE 4: B

ATIVIDADE 5: B

ATIVIDADE 6: A

ATIVIDADE 7: A

ATIVIDADE 8: B

ATIVIDADE 9: B

ATIVIDADE 10: A

REFERÊNCIAS

Bianchini, Edwaldo. Matemática Bianchini / Edwaldo Bianchini. - 8. ed. - São Paulo: Moderna, 2015.

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Projeto Teláris: matemática : ensino fundamental 2 / Luiz Roberto Dante. - 2. ed, - São Paulo: Ática. 2015. - (Projeto Teláris : matemática).

Giovanni Júnior, José Ruy. A Conquista da Matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. - 1.ed. - São Paulo : FTD, 2022.

Logen, Adilson. Interação matemática: o tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. - São Paulo: Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

Matemática : ciência e aplicações, volume 1: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Matemática, primeira série, ensino médio: autores. Ana Lúcia Bordeaux... [et al.], coordenação João Bosco Pitombeira; - Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. 376p. :il. - (Multicurso; Coleção completa; v.1)