GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

Matemática

3ª Série | Ensino Médio

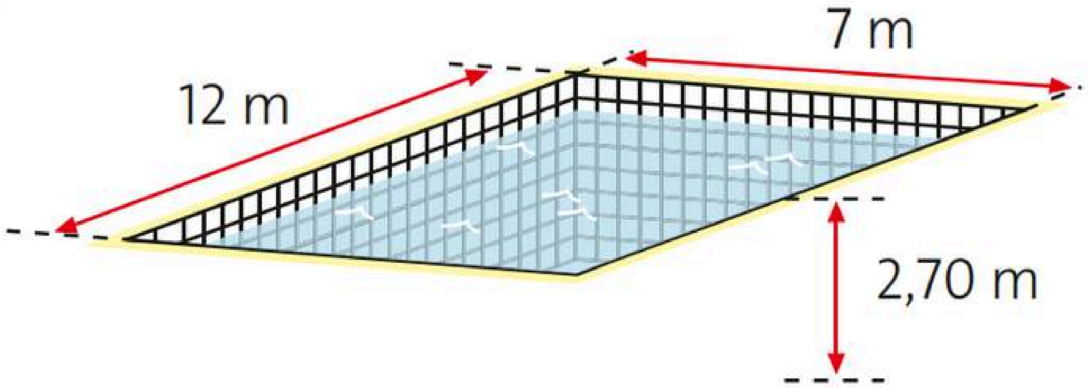
21ª Semana

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: VOLUME

DESCRITORES DO PAEBES	**D129_M** Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT309** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**D058_M** Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.

CONTEXTUALIZAÇÃO

VOCÊ SABIA?



Formato Comunicação/ Arquivo da editora

Você sabia que é possível saber quantos litros de água uma piscina comporta sabendo as medidas de sua altura, comprimento e largura?

No exemplo acima, a piscina tem 12 metros de comprimento, 7 metros de largura e 2,70 metros de altura, porém, a água está na altura 2,10 metros. Quantos litros de água tem nessa piscina?

Esse exemplo simples nos ajuda a visualizar a importância do volume dos sólidos e como ele é aplicado em situações reais. Desde o planejamento e construção de estruturas até a necessidade de calcular capacidades e quantidades, o volume é uma medida crucial em diversos campos, como arquitetura, engenharia e até mesmo em atividades recreativas.

Neste material nós vamos explorar o volume dos sólidos e veremos que diferentes formas geométricas possuem fórmulas específicas para o cálculo do seu volume. Cada fórmula leva em consideração as características únicas de cada sólido, permitindo-nos obter medições precisas e aplicáveis em diversas situações práticas.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

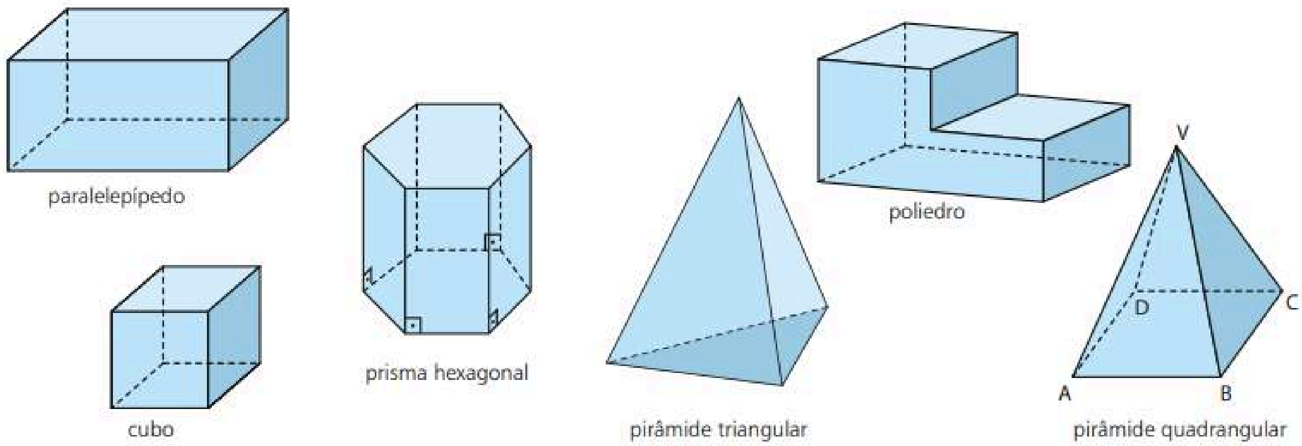
RETOMANDO O QUE VIMOS

- **SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

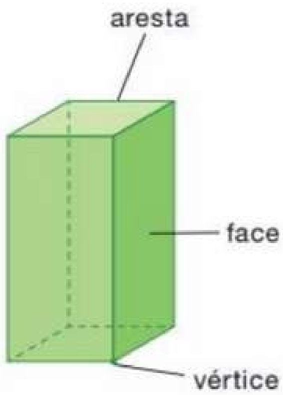
No material anterior, estudamos sólidos geométricos, e vimos que podemos classificá-los em três grandes grupos:
-poliedros;
-corpos redondos;
-outros.

- **POLIEDROS**

São sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos.



Em um poliedro podemos distinguir:



As faces são os polígonos que limitam os poliedros. A quantidade de faces de um poliedro é finita.

As arestas são os lados de cada face do poliedro, sendo que cada aresta é comum a somente duas faces.

Os vértices são os pontos de interseção de três ou mais arestas, sendo que os vértices de cada face são também vértices do poliedro.

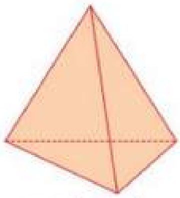
Os poliedros têm as denominações dadas a partir do número de faces. Observe alguns exemplos:

Número de faces	Nome do poliedro
4 (tetra)	Tetraedro
5 (penta)	Pentaedro
6 (hexa)	Hexaedro
8 (octa)	Octaedro
10 (deca)	Decaedro
12 (dodeca)	Dodecaedro
20 (icosa)	Icosaedro

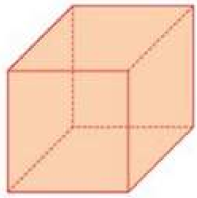
CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **POLIEDROS REGULARES**

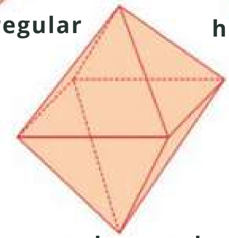
Um poliedro é regular quando satisfaz às seguintes condições:
as faces são poligonais regulares e congruentes entre si e de cada vértice do poliedro parte o mesmo número de arestas.



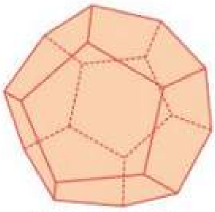
tetraedro regular



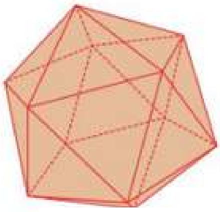
hexaedro regular



octaedro regular



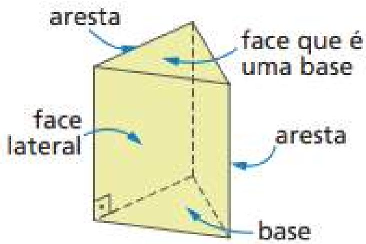
dodecaedro regular



icosaedro regular

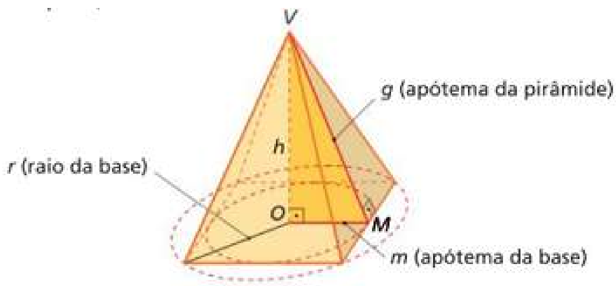
- **PRISMAS**

Os prismas são sólidos do grupo dos poliedros.
Um prisma reto é caracterizado por ter duas faces paralelas formadas por polígonos idênticos, que são suas bases, e as demais faces formadas por retângulos, que são suas faces laterais.
Em um prisma reto as arestas laterais são perpendiculares às bases.



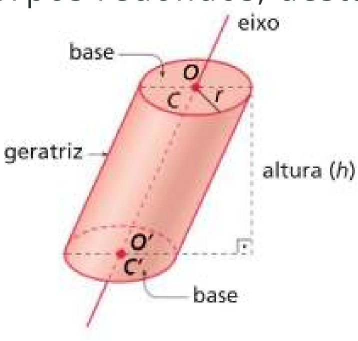
- **PIRÂMIDES**

As pirâmides são sólidos geométricos que possuem a base formada por um polígono e faces laterais triangulares que se encontram em um único ponto, conhecido como vértice.

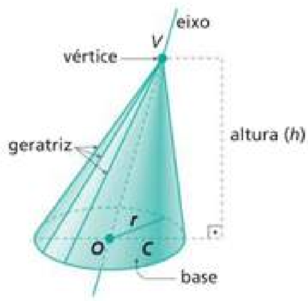


- **CORPOS REDONDOS**

Entre os corpos redondos, destacamos o cilindro e o cone.



cilindro



cone

CONCEITOS E CONTEÚDOS

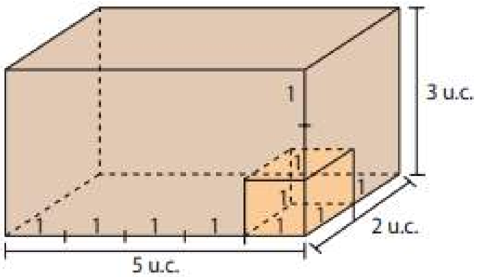
VOLUME

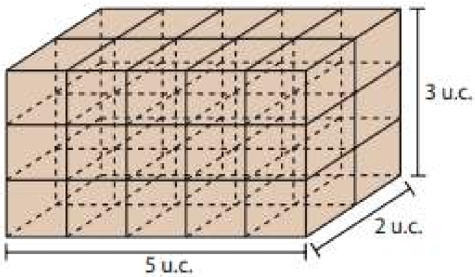
O volume de um sólido é a medida da região do espaço limitada por sua superfície. Para expressar o volume de um sólido por meio de um número, devemos estabelecer uma unidade padrão: a unidade de volume é o cubo cuja aresta mede 1 u.c. (unidade de medida de comprimento).
Para cada unidade de medida de comprimento, temos uma correspondente unidade de volume, como mostrado na tabela a seguir:

Unidade de medida da aresta do cubo	Unidade de volume
1 dm	1 dm^3
1 cm	1 cm^3
1 m	1 m^3
1 mm	1 mm^3

De modo geral:
unidade de medida da aresta = 1 u.c. e unidade de volume = 1 $(u.c.)^3$

Consideremos um paralelepípedo retângulo com as seguintes dimensões:
a = 5 u.c., b = 2 u.c. e c = 3 u.c.
A divisão do comprimento, da largura e da altura desse paralelepípedo em cinco unidades, duas unidades e três unidades, respectivamente, nos permite obter 30 cubos unitários (5 . 2 . 3 = 30), conforme mostrado nas figuras abaixo:





Dizemos, então, que o volume desse paralelepípedo é:

$$V = (5u.c.) \cdot (2u.c.) \cdot (3u.c.) = 30\,(u.c.)^3$$

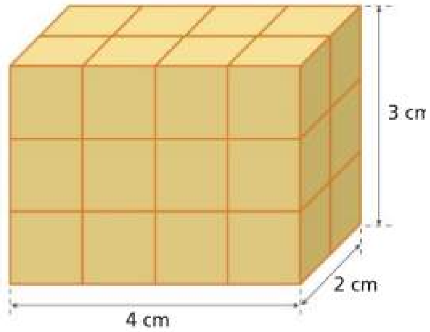
De modo geral, se as medidas das três dimensões de um paralelepípedo retângulo são os números reais a, b e c, seu volume é dado por:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1

Determine o volume do paralelepípedo reto retângulo abaixo.



Resolução:

Analisando a figura, vemos que o paralelepípedo é formado por 8 cubos unitários na base e tem 3 camadas iguais à camada da base.

Logo, há 24 cubos unitários no total, e, portanto, o paralelepípedo é formado por 24 cubos (4 . 2 . 3) de 1 cm^3 de volume.

Dizemos, então, que o volume do paralelepípedo dado é 24 cm^3.

Podemos, ainda, calcular o volume do paralelepípedo reto retângulo da seguinte maneira:

$V = a \cdot b \cdot c$
$V = 4 \cdot 2 \cdot 3$
$V = 24$

Portanto, de fato, o volume do paralelepípedo reto retângulo é 24 cm^3.

2

Deseja-se cimentar um quintal quadrado, com lados medindo 8 m, com 4 cm de espessura de massa de cimento. Calcular o volume necessário de massa para revestir essa área.

Resolução:

A camada de cimento terá a forma de um paralelepípedo reto retângulo de base quadrada, com 8 m de lado e 4 cm de altura.

Como a espessura do revestimento é de 4 cm ou 0,04 m, temos que o volume necessário de massa é:

$V = a \cdot b \cdot c$
$V = 8 \cdot 8 \cdot 0{,}04$
$V = 2{,}56$

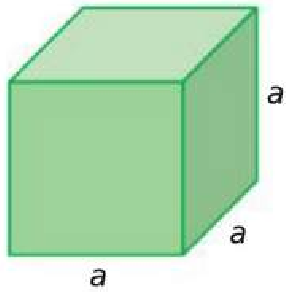
Logo, são necessários 2,56 m^3 de massa para fazer o revestimento.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

VOLUME DO CUBO

Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo reto retângulo com todas as arestas de mesma medida seu volume é:

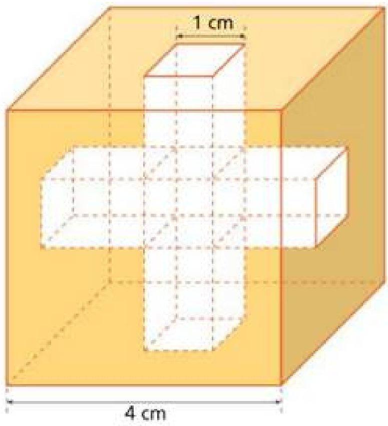
$$V_{cubo} = a^3$$



EXERCICIOS RESOLVIDOS

3

De um cubo de aresta 4 cm foram retirados prismas retos, de bases quadradas de 1 cm de lado, conforme mostra a figura. Determine o volume do sólido restante



Resolução:

Temos um cubo de aresta 4 cm, cujo volume pode ser calculado por:
$V = a^3$
$V = 4^3 = 64\ cm^3$
Note que foram retirados prismas retos de base quadrada.
O prisma vertical tem base quadrada de aresta 1 cm, ou seja, área = $1cm^2$. E sua altura mede a altura do cubo, ou seja, 4 cm. Temos, então:
V = área da base vezes altura = 1 . 4 = $4cm^3$.
Note que o prisma horizontal também tem volume = $4cm^3$, por ter base medindo 1 cm x 1 cm ($1cm^2$) e altura 4 cm, ou seja, V = $1cm^2$. 4 cm = 4 cm^3. No entanto, desse prisma não foi retirado esse volume de 4 cm^3, porque o "cubinho" formado no meio já foi retirado do prisma vertical. Como esse "cubinho" tem aresta medindo 1 cm, seu volume é $1cm^3$. Assim, do prisma horizontal foi retirado $4cm^3$ -$1cm^3$ = 3 cm^3.

Vale observar, ainda, que o volume do cubo retirado pode ser obtido ao somar o volume do prisma vertical com o volume do prisma horizontal (retirando o volume do "cubinho" para evitar que ele seja considerado duas vezes), ou seja,
4 cm^3 + 3 cm^3 = 7 cm^3.

Temos, então, volume do cubo (64 cm^3) menos volume dos prismas retirado (7 cm^3) é igual a 57 cm^3. Portanto, o volume do sólido restante é 57 cm^3.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Conseguimos estabelecer uma fórmula para o volume de um paralelepípedo retângulo de maneira intuitiva; entretanto, para determinar a expressão do volume de outros sólidos, o processo não é tão simples. Uma maneira que pode ser utilizada para a obtenção do volume de um sólido é adotar como axioma um resultado formalizado pelo matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que é conhecido como **princípio de Cavalieri**.
Antes de enunciar o princípio de Cavalieri, vamos apresentar um exemplo para que ele possa ser compreendido de maneira intuitiva.

Considere algumas chapas metálicas em forma de paralelepípedo reto, empilhadas de duas maneiras diferentes, como mostram as figuras.

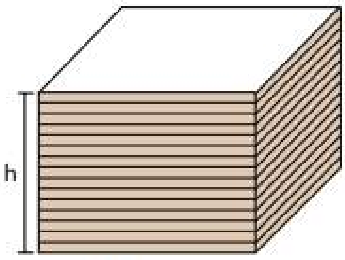


figura 1

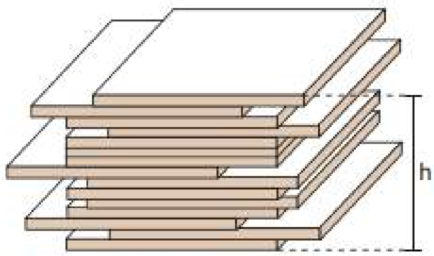
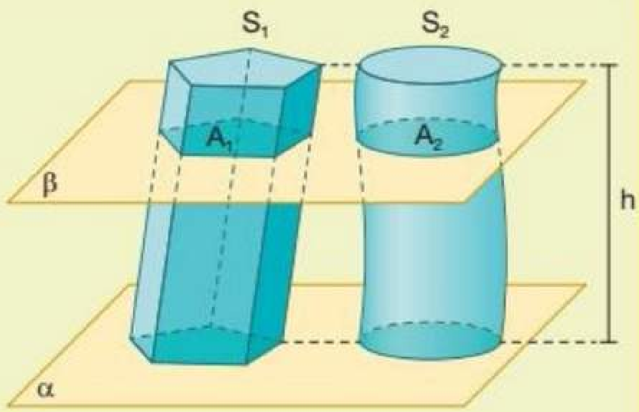


figura 2

Perceba-se que o volume de cada uma dessas pilhas é o mesmo, independentemente da maneira como as chapas são empilhadas.

A formalização dessa situação, que veremos a seguir, é conhecida como **Princípio de Cavalieri**.

Considere os sólidos S_1 e S_2, cuja altura *h* é a mesma, apoiados em um mesmo plano horizontal α, e um plano β, paralelo a α, que determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas A_1 e A_2. Nesse caso, se $A_1 = A_2$ para qualquer plano β, temos que o volume de S_1 é igual ao de S_2, ou seja, $V_{S_1} = V_{S_2}$.



Dica de estudo

Assista ao vídeo sobre o Princípio de Cavalieri apontando o celular para o QR CODE ao lado ou clique no botão abaixo.

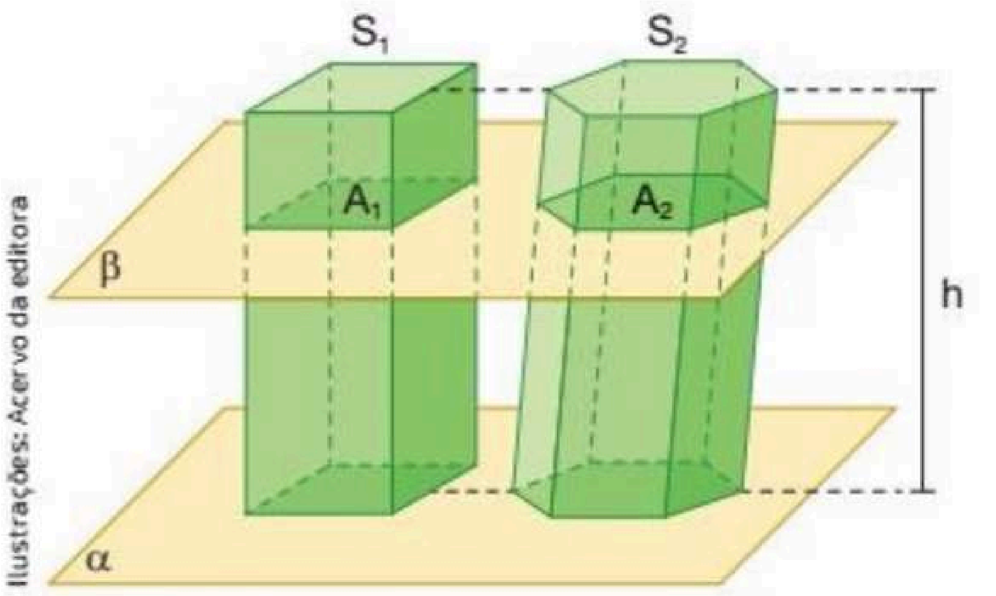
Clique aqui

CONCEITOS E CONTEÚDOS

VOLUME DE UM PRISMA QUALQUER

Vimos que podemos calcular o volume de um paralelepípedo retângulo pela fórmula V = a . b. c

Agora, utilizando o Princípio de Cavalieri, vamos obter o volume de um prisma qualquer. Para isso, consideremos um paralelepípedo reto retângulo (S_1) e um prisma qualquer (S_2), apoiados em um plano horizontal α , ambos de altura h e de bases com áreas iguais e todo plano β , paralelo a α , determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas iguais.



Pelo Princípio de Cavalieri, temos que os dois sólidos têm o mesmo volume:

$$V_{S_1} = V_{S_2}$$

Como estudamos anteriormente, o volume do paralelepípedo reto retângulo é dado por $V_{S_1} = A_b . h$

Assim, o volume do prisma também é dado por $V_{S_2} = A_b . h$

Portanto, podemos determinar o volume de um prisma qualquer **multiplicando a área da base pela medida da altura.**

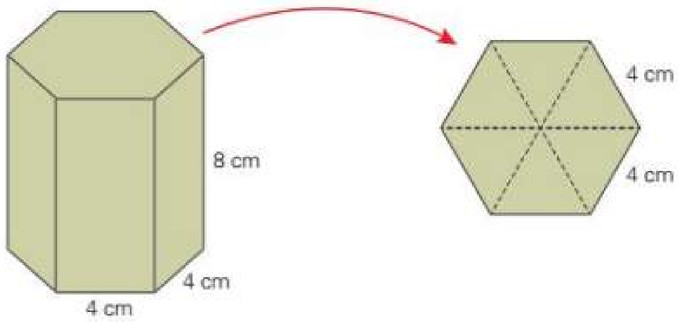
$$V = A_b . h$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

4

Calcule o volume de um prisma regular hexagonal, sabendo que sua altura é 8 cm e que a aresta de sua base mede 4 cm.

Resolução:



$$V = A_b \,.\, h$$

Calculando a área da base (área de um hexágono), temos:

$$A_{base} = 6.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{base} = 6.\frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{base} = 6.\frac{16\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{base} = 24\sqrt{3}$$

Calculando o volume, temos:

$$V = A_{base} \cdot altura$$

$$V = \left(24\sqrt{3}\right) \cdot 8$$

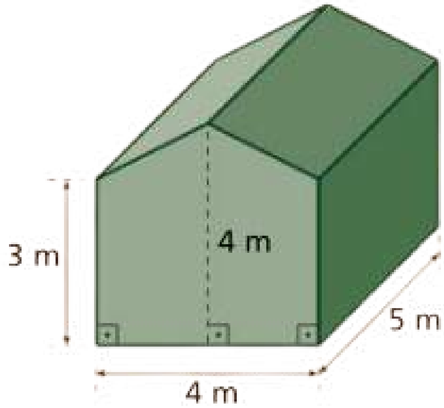
$$V = 192\sqrt{3}$$

Portanto, o volume desse prisma regular hexagonal é $192\sqrt{3}$ cm³.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

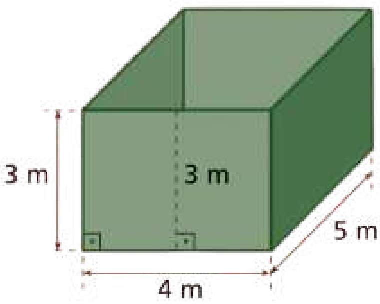
5

Calcular o volume de ar contido em um galpão que tem a forma do prisma representado abaixo.

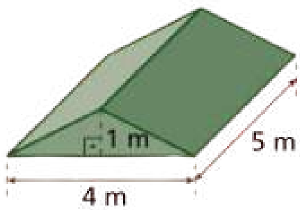


Resolução:

Vamos decompor a figura do galpão em duas partes com formas de prisma.



Forma de paralelepípedo reto retângulo



Forma de prisma reto de base triangular

$$A_{base} = 4.5, altura = 3 \qquad A_{base} = \frac{4.1}{2} = 2, altura = 5$$

$$V_1 = A_{base}.altura \qquad V_2 = A_{base}.altura$$

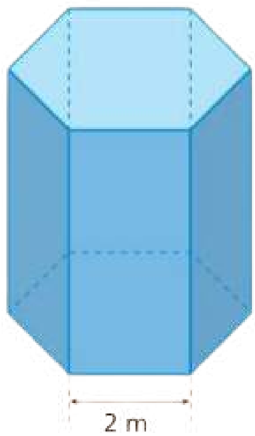
$$V_1 = 20.3 = 60 \qquad V_2 = 2.5 = 10$$

Logo, o volume total de ar contido no galpão é dado por $V_1 + V_2$, ou seja, 60 + 10 = 70m³.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

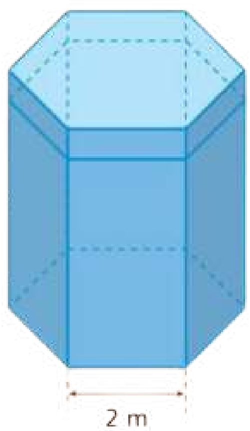
6

Um reservatório cheio de água tem a forma de um prisma hexagonal regular como o representado na figura abaixo. Se forem consumidos 3 000 $\sqrt{3}$ litros, quanto baixará, em metro, o nível de água desse reservatório?



Resolução:

Vamos representar por x, em metro, quanto baixará o nível da água no reservatório.
Os 3 000$\sqrt{3}$ litros consumidos ocupam um volume de prisma hexagonal regular de mesma base do prisma da figura e altura de x metro.



A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado 2 m, cuja área é dada por:

$$A_{base} = \frac{6.l^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{base} = \frac{6.2^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{base} = 6\sqrt{3}$$

O volume da parte do prisma correspondente aos 3 000$\sqrt{3}$ litros é:

$$V = A_{base}.x = 6\sqrt{3}.x$$

Lembre que 1000 litros = 1m³

Como 3000 $\sqrt{3}$ litros = 3$\sqrt{3}$ m³, temos:

$$6\sqrt{3}.x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 0,5$$

Portanto, o nível de água baixará 0,5 m.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

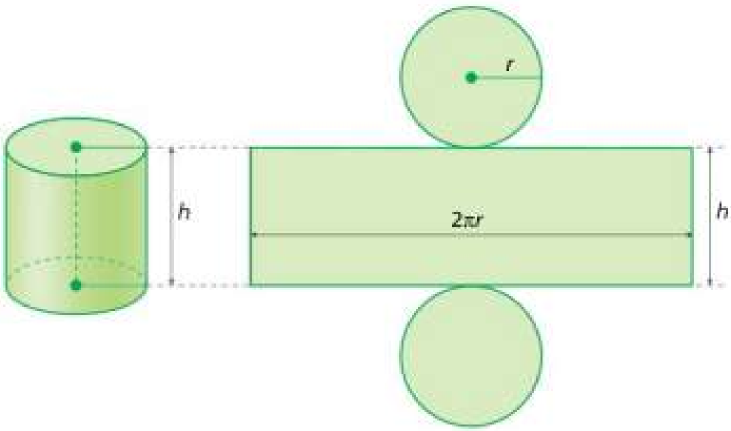
VOLUME DA PIRÂMIDE, DO CILINDRO E DO CONE

Os cálculos dos volumes da pirâmide, do cilindro e do cone podem ser estudados com mais detalhes e você pode conferir apontando a câmera do seu celular para o QR CODE no final da página ou clicar no botão abaixo de cada código.

- **VOLUME DA PIRÂMIDE:** $V = \frac{1}{3}.A_b.h$

- **VOLUME DO CILINDRO:** $V = \pi r^2 h$

Vale lembrar que estudamos a área total do cilindro no material anterior e vimos que a área da base é a área de um círculo de raio r.



Observe que podemos entender que $V = \pi r^2 h$ é o mesmo que calcular a área da base vezes a altura, uma vez que a área da base do círculo é determinada por πr^2.

- **VOLUME DO CONE:** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

pirâmide

Clique aqui

cilindro

Clique aqui

cone

Clique aqui

EXERCICIOS RESOLVIDOS

7

Vamos calcular o volume aproximado da pirâmide de Quéops, considerando que a base é um quadrado cuja medida da aresta é aproximadamente 230 metros e a altura aproximadamente 147 metros.

Resolução:

Como a pirâmide tem base quadrada, vamos utilizar a fórmula vista anteriormente para calcular o volume:

$$V = \frac{1}{3}.A_b.h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 147 \ = 2\ 592\ 100 m^3$$

Logo, a pirâmide de Quéops tem o volume aproximado de 2 592 100 metros cúbicos.

7

Pretende-se pintar externamente a base inferior e a superfície lateral de um vaso que tem a forma de um cilindro reto em que o diâmetro da base mede 40 cm e a altura mede 36 cm. Considerando a espessura do vaso desprezível, calcule a área da superfície a ser pintada e a maior quantidade de terra que pode ser colocada em seu interior. Considere $\pi \cong 3$.

Resolução:

Como r = 20 cm e h = 36 cm, temos:

A = área da superfície a ser pintada $\Rightarrow A = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 3 \cdot 20^2 + 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 36 \Rightarrow A = 5\,520 \text{ cm}^2$

V = volume do vaso $\Rightarrow V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = 3 \cdot 20^2 \cdot 36 \Rightarrow V = 43\,200 \text{ cm}^3$

Logo, a área da superfície a ser pintada é 5 520 cm² e o volume máximo de terra que pode ser colocado no vaso é 43 200 cm³.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8

Uma casquinha de sorvete tem a forma de um cone reto em que a altura mede 7,5 cm e o raio da base mede 2,5 cm. Determine seu volume, considerando $\pi = 3,14$

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Resolução:

$$V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$$

$$V = \frac{1}{3}\ .\ 3,14\ .\ (2,5)^2\ .\ 7,5$$

$$V = \frac{1}{3}\ .\ 3,14\ .\ 6,25\ .\ 7,5$$

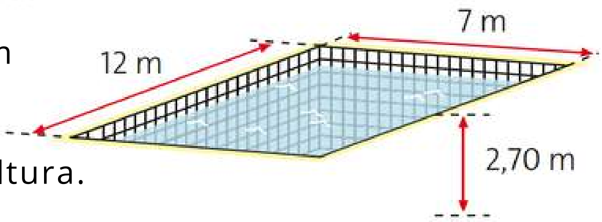
$$V = \frac{1}{3}\ .\ 147,1875$$

$$V = 49,0625$$

Portanto, o volume da casquinha de sorvete é de, aproximadamente, 49 cm³.

8 RETOMANDO O PROBLEMA DO INÍCIO

Calcule quantos litros de água contém a piscina, sabendo que a água ocupa 12 metros de comprimento, 7 metros de largura e apenas 2,10 metros de altura.



Formato Comunicação/ Arquivo da editora

Resolução:
V = a . b . c
V = 12 . 7 . 2,10
V = 176,4 m³

Cada 1 m³ = 1 000 litros. Portanto, 176,4 cm³ = 176 400 litros.

Díca de estudo

Assista ao vídeo **volume da esfera** apontando o celular para o QR CODE ao lado ou clique no botão abaixo.

Clique aqui

você sabe o que é mnemônica?

A técnica mnemônica ou mnemónica é uma técnica com o objetivo de auxiliar a memória. São, tipicamente, verbais, e utilizadas para memorizar listas ou fórmulas, baseados no princípio de que a mente humana tem mais facilidade de memorizar dados quando estes são associados à informação pessoal, espacial ou de carácter relativamente importante, do que dados organizados de forma não sugestiva (para o indivíduo) ou sem significado aparente. Porém, estas sequências têm que fazer algum sentido, ou serão igualmente difíceis de memorizar.

Veja um exemplo de memorização da fórmula do volume da esfera por meio de uma paródia ensinada numa sala de aula após a sua demonstração.

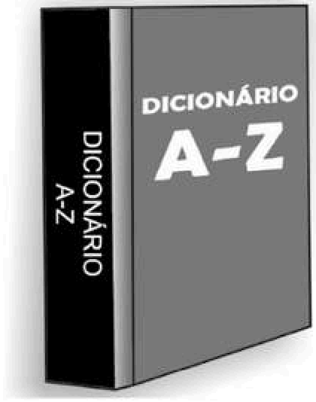
Você já aplicou alguma técnica de memorização em sala de aula?

Clique aqui

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(PAMA11039AC) Observe o dicionário ilustrado abaixo que será guardado em uma prateleira.



As dimensões desse dicionário são 7 cm de altura, 21 cm de largura e 28 cm de comprimento. Qual é o espaço, em cm^3, que esse dicionário ocupará na prateleira?

A) 56

B) 175

C) 343

D) 595

E) 4116

Atividade 2

(M120395A8) Um colchão de solteiro de espuma tem a forma de um bloco retangular com 1,80 m de comprimento, 0,80 m de largura e 0,30 m de altura.

O volume de espuma desse colchão, em m^3, é

A) 0,240

B) 0,432

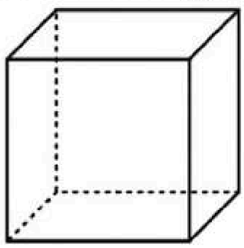
C) 0,540

D) 1,440

E) 2,900

Atividade 3

(PAMA11042AC) O cubo representado abaixo possui aresta igual a 3 cm.



O volume desse cubo é

A) 9 cm^3

B) 12 cm^3

C) 18 cm^3

D) 27 cm^3

E) 54 cm^3

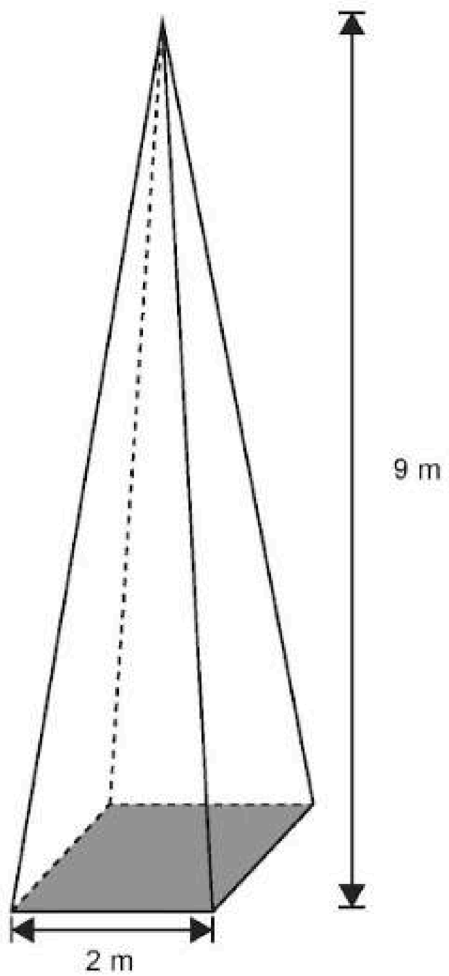
Atividade 4

(M120560A9) A base de um prisma reto é um hexágono regular com $4\sqrt{3}$ cm^2 de área. Se a altura desse prisma mede $4\sqrt{3}$ cm, quanto mede seu volume?

A) $16\sqrt{3}$ cm^3
B) $8\sqrt{3}$ cm^3
C) 16 cm^3
D) 48 cm^3
E) 64 cm^3

Atividade 5

(M11228SI) Uma pirâmide quadrangular retangular tem altura igual a 9m e aresta da base igual a 2m, conforme mostra a figura:



O volume dessa pirâmide é:

A) 7 m^3
B) 11 m^3
C) 12 m^3
D) 18 m^3
E) 36 m^3

Atividade 6

(M120227G5) Para o tratamento de água potável de uma pequena cidade foi construído um reservatório com o formato de um cilindro circular reto cujo diâmetro interno da base mede 3 m e a altura interna mede 8 m.
A capacidade máxima de água, em litros, desse reservatório é

Dados:
$1m^3 = 1\,000L$
$\pi \cong 3{,}14$

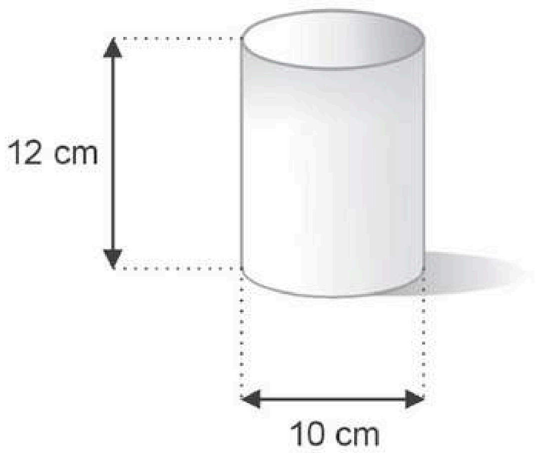
A) 15 065
B) 56 520
C) 75 360
D) 177 472
E) 226 080

Atividade 7

(M11273SI) Uma lanchonete utiliza um coador de café, em forma de cone, com 6 cm de raio da base por 12 cm de altura.
Qual é o volume máximo de café, em cm^3, que pode ser feito nesse coador?
A) 48
B) 144
C) 48π
D) 72π
E) 144π

Atividade 8

(PAMA11109AC) Um copo tem o formato de um cilindro reto conforme mostra a figura abaixo.



Esse copo contém 130,4 cm^3 de água. Quantos cm^3 ainda cabem nesse copo?

Considere $\pi = 3,14$

A) 188,4
B) 246,4
C) 376,8
D) 811,6
E) 942,0

GABARITO

ATIVIDADE 1: E
ATIVIDADE 2: B
ATIVIDADE 3: D
ATIVIDADE 4: D
ATIVIDADE 5: C
ATIVIDADE 6: B
ATIVIDADE 7: E
ATIVIDADE 8: D

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática, primeira série, ensino médio: autores. Ana Lúcia Bordeaux... [et al.], coordenação João Bosco Pitombeira; - Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. 376p. :il. - (Multicurso; Coleção completa; v.1)

Matematicarlos. Acessado em https://www.youtube.com/watch?v=ahrtr4ANgjM em 15/06/2024.

Portal da Matemática OBMEP. Acessado em https://www.youtube.com/watch?v=wQpi2ZfrITw em 15/06/2024.

Portal da Matemática OBMEP. Acessado em https://www.youtube.com/watch?v=2xwwsC5JMQo em 15/06/2024.

Portal da Matemática OBMEP. Acessado em https://www.youtube.com/watch?v=zUnUhxpG17o em 15/06/2024.

Portal da Matemática OBMEP. Acessado em https://www.youtube.com/watch?v=THShF38zLCc em 15/06/2024.

Portal da Matemática OBMEP. Acessado em https://www.youtube.com/watch?v=AqNwkiAw0Kk em 15/06/2024.