GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

Matemática

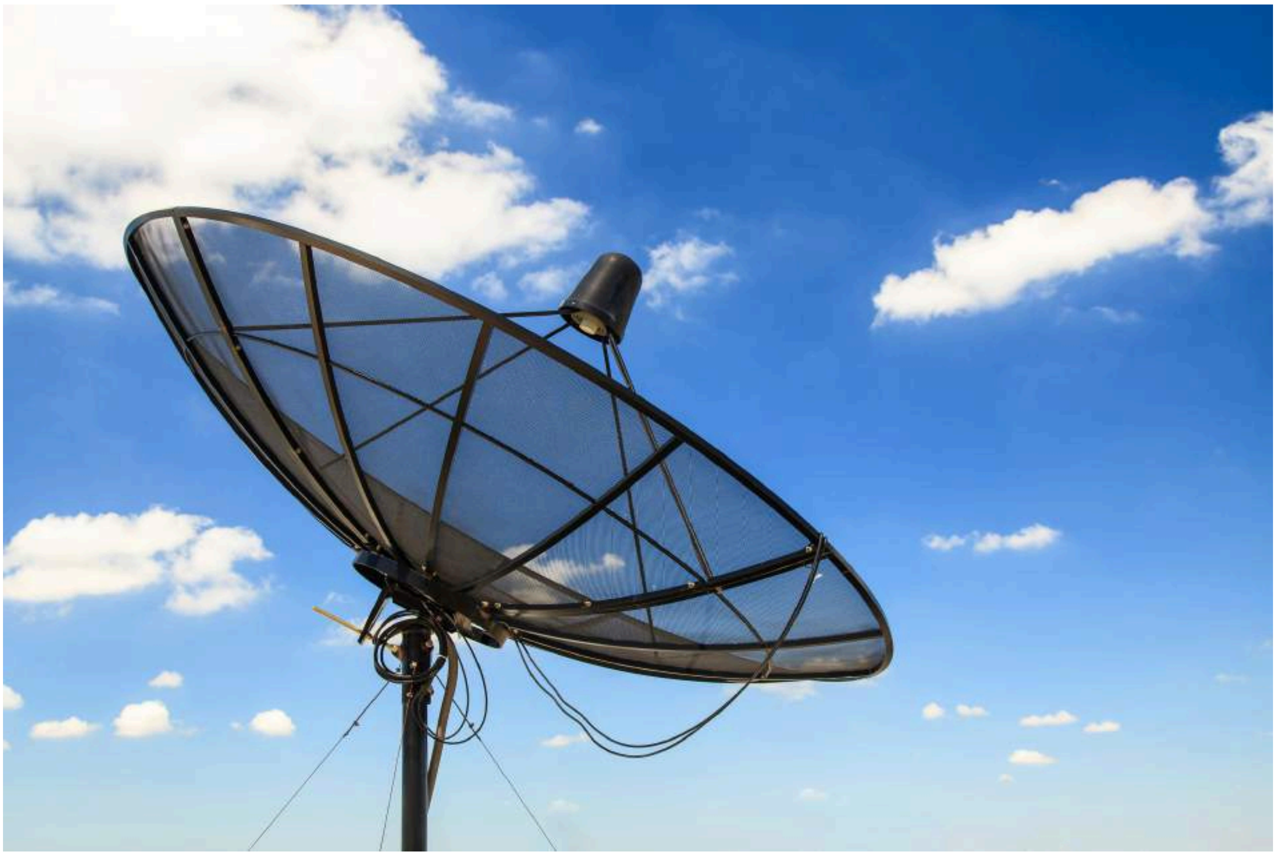
1.ª Série | Ensino Médio

23ª Semana

FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2° GRAU

MONITORAMENTO	**PEDAGOGA/O: PED.** **PROFESSOR/A: PRO** **LÍDER: LID**	**PED.**	**PRO.**	**LID.**
DESCRITOR DO SAEB	**D071_M** Analisar crescimento/ decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT402** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF08MA08** - Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1o grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. **EF09MA06** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.			

CONTEXTUALIZAÇÃO



canva.com

Uma antena parabólica é formada por uma superfície parabólica e um receptor de ondas colocado no foco dessa superfície. Quando a antena é orientada em direção a um objeto distante, como um satélite, por exemplo, todas as ondas que chega à sua superfície são refletidas e se concentram nesse foco.

Conta-se que há mais de 2 mil anos, Arquimedes conseguiu que as tropas de Siracusa, sua cidade natal, vencessem os romanos ateando fogo em suas embarcações.

O sábio grego construiu vários espelhos parabólicos e direcionou cada um deles a um barco inimigo. Quando a luz do sol incidia sobre os espelhos, ela era direcionada e concentrada nos barcos inimigos, que, após certo tempo, começavam a incendiar.

Ainda hoje, além dos espelhos parabólicos, as superfícies parabólicas são utilizadas na construção de equipamentos, como lentes e faróis de carros.

Fonte: Construindo sempre Matemática. Livro II. São Paulo: Proem, 2002.

Neste material nós vamos ampliar o estudo de função quadrática, cujo gráfico é uma curva chamada parábola e observar o comportamento da parábola no plano cartesiano quando associado com os coeficentes.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMAMOS O QUE VIMOS

- **FUNÇÃO QUADRÁTICA**

Uma função quadrática é toda função definida pela sentença matemática $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

- **COEFICIENTES DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA**

Assim como vimos nos estudos da equação do 2º grau, numa função quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, os números reais a, b e c são chamados coeficientes, com a sendo o coeficiente do termo x^2, b sendo o coeficiente do termo x e c sendo o coeficiente sem incógnita ou termo independente de x.

Pela definição, devemos ter sempre $a \neq 0$. Entretanto, podemos ter b = 0 ou c = 0.

Assim:

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a função do 2º grau se diz **completa**.

Quando $b \neq 0$ e c = 0, a função do 2º grau se diz **incompleta em c**.

Quando b = 0 e $c \neq 0$, a função do 2º grau se diz **incompleta em b**.

Quando b = 0 e c = 0, a função do 2º grau se diz **incompleta em b e c**.

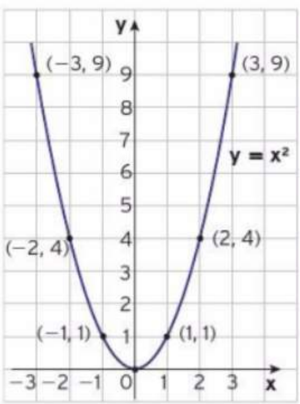
No material anterior nós estudamos as funções incompletas em b e c, do tipo $y = ax^2$. Neste material vamos estender os estudos para as demais funções.

ESTUDO DOS COEFICIENTES NA FUNÇÃO QUADRÁTICA

- **COEFICIENTE a**

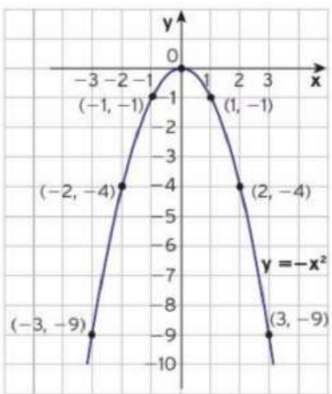
Vamos lembrar alguns gráficos estudados no material anterior, com b = 0 e c = 0.

$y = x^2$



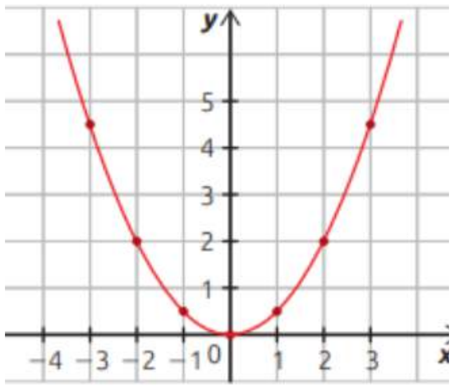
a > 0
função crescente

$y = -x^2$



a < 0
função decrescente

$y = 0{,}5x^2$



a > 0
função crescente

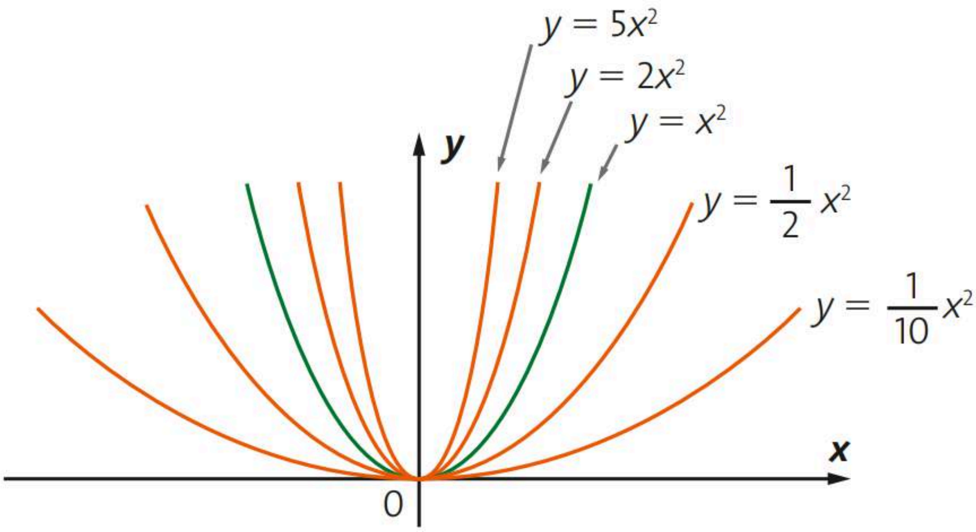
Vimos que o coeficiente determina se uma função é crescente ou decrescente. Para positivo, temos função crescente e para a negativo, temos função decrescente.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

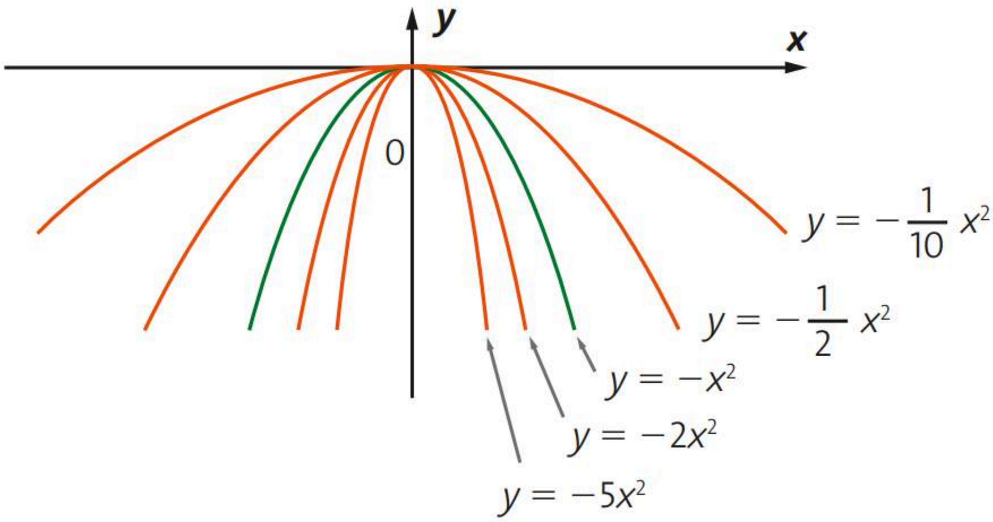
Vimos, também, que quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola. Quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola.

Examine os gráficos da função definida por $y = ax^2$, para $a = \frac{1}{10}$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = 2$ e $a = 5$, e para $a = -5$, $a = -2$, $a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$ e $a = -\frac{1}{10}$.

$a > 0$



$a < 0$



No entanto, não foi possível estudar o comportamento dos gráficos de acordo com os outros coeficientes (b e c), porque trabalhamos com $y = ax^2$, ou seja, b e c eram iguais a zero.

A partir de agora, vamos estudar os coeficientes b e c nos gráficos das funções quadráticas.

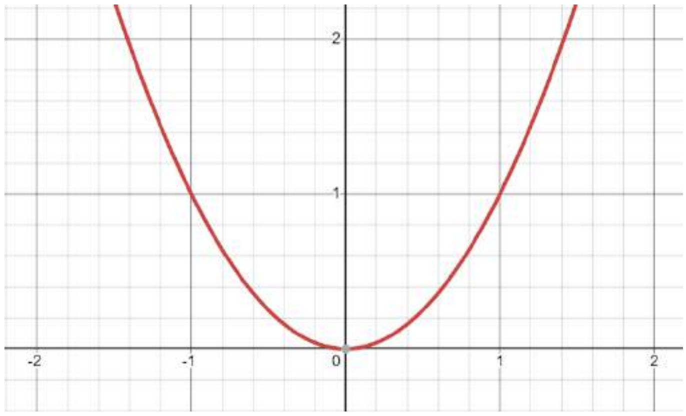
CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **COEFICIENTE b**

O coeficiente b de uma função quadrática indica se seu gráfico intercepta o eixo y no ramo crescente ou no ramo decrescente. Observe os gráficos das funções.

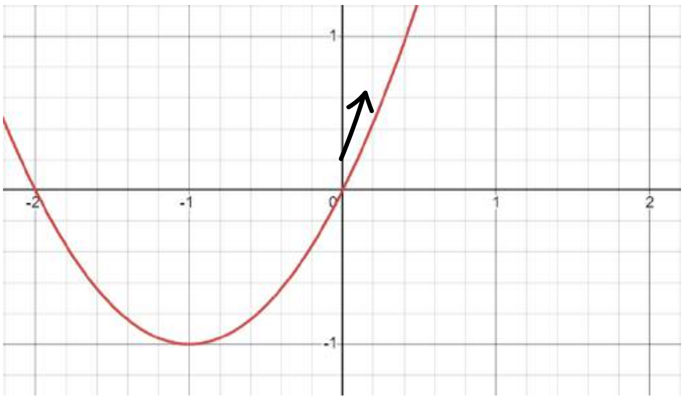
$y = x^2$

A parábola intercepta o eixo y no vértice e b = 0



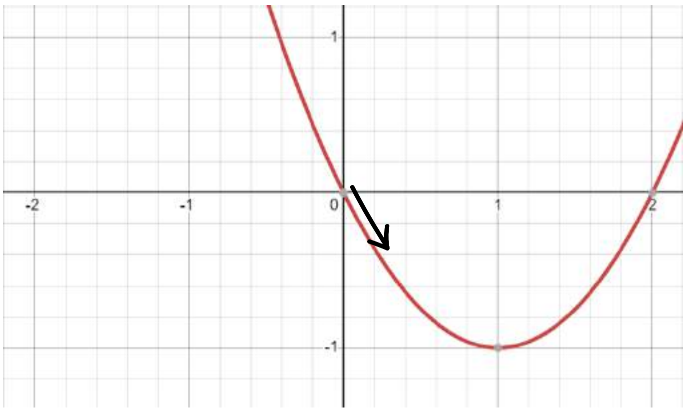
$y = x^2 + 2x$

A parábola intercepta o eixo y no ramo crescente e b > 0.

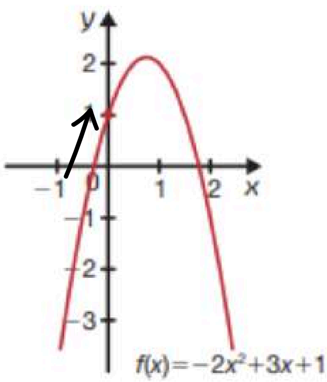


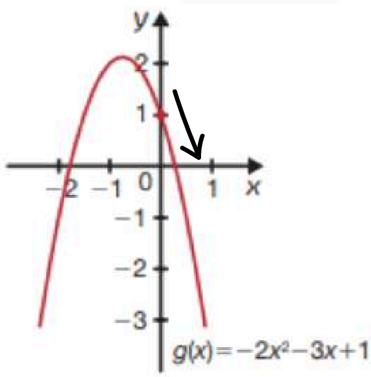
$y = x^2 - 2x$

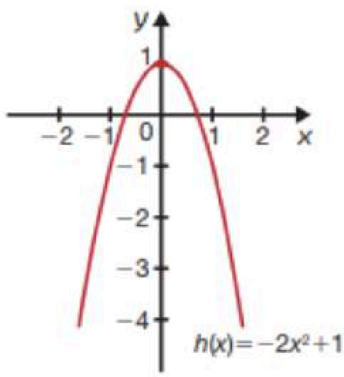
A parábola intercepta o eixo y no ramo decrescente e b < 0.



Isso acontece independente se a função é crescente ou decrescente. Veja exemplos com funções decrescentes.



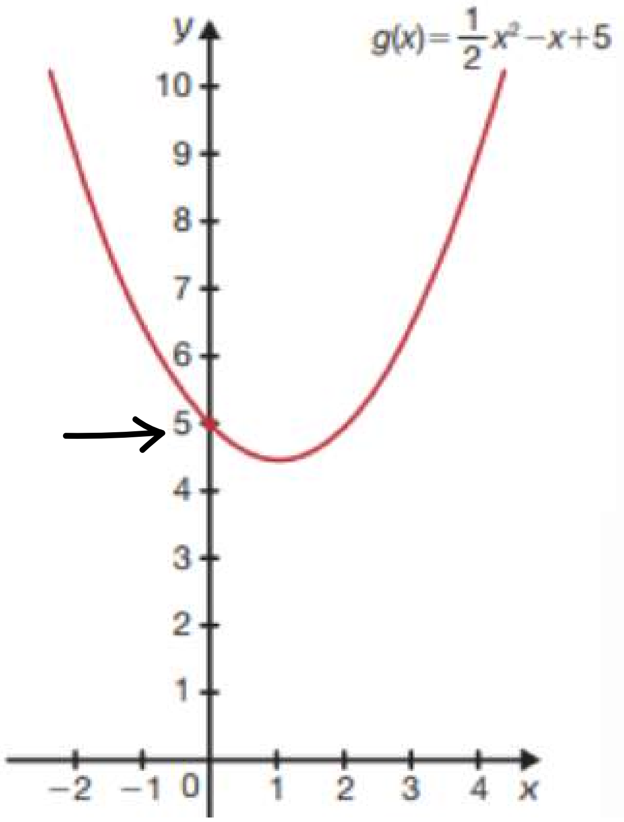




CONCEITOS E CONTEÚDOS

- **COEFICIENTE c**

O coeficiente c de uma função quadrática corresponde à ordenada do ponto em que seu gráfico intersecta o eixo y. Por exemplo, na função g dada por $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$, temos c = 5 e o gráfico intersecta o eixo y no ponto (0,5).



O gráfico de uma função intersecta o eixo y quando x = 0. No caso de uma função quadrática:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = a . 0^2 + b . 0 + c$

$f(0) = c$

O gráfico de uma função quadrática, cuja lei de formação é $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersecta o eixo y no ponto (0,c).

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ZEROS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Estudamos em materiais anteriores que o zero de uma função f é todo valor x de seu domínio f(x) = 0 e que, graficamente, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x.

Para determinarmos os zeros de uma função quadrática f, fazemos f(x) = 0 e resolvemos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Como estudamos no material de equação do 2º grau, essa equação pode ser resolvida utilizando a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ na qual } \Delta = b^2 - 4ac$$

De acordo com os coeficientes da função, temos três possíveis casos para os valores de Δ,

1º caso: $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui **duas raízes reais e distintas.**

Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, resolvemos a equação f(x):

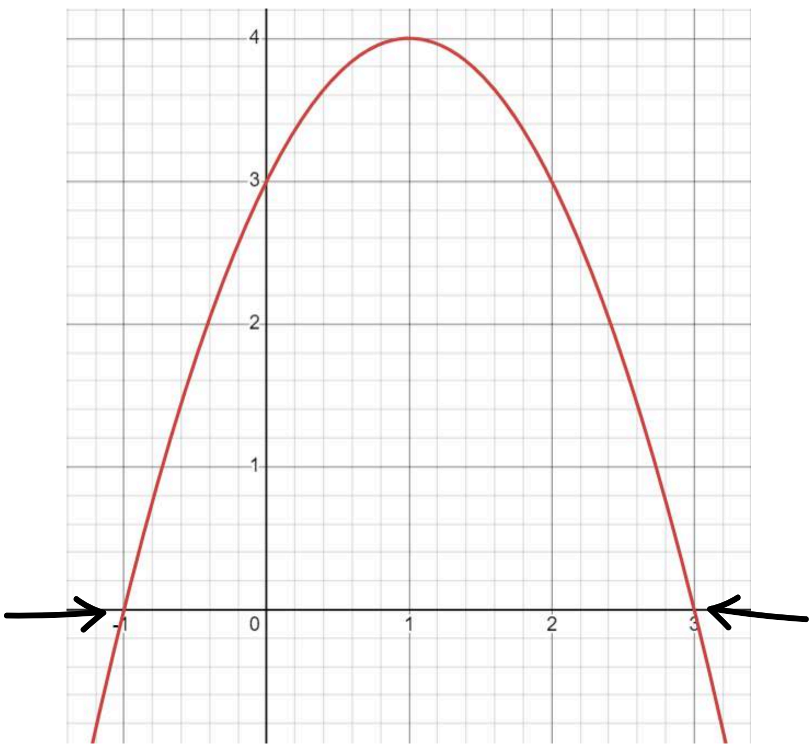
$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$a = -1;\ b = 2;\ c = 3$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{-2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

Portanto, -1 e 3 são os zeros de f, e (-1,0) e (3,0) são os pontos em que o gráfico dessa função intersecta o eixo x.



CONCEITOS E CONTEÚDOS

2º caso: $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui **duas raízes reais e iguais**

Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$, resolvemos a equação f(x):

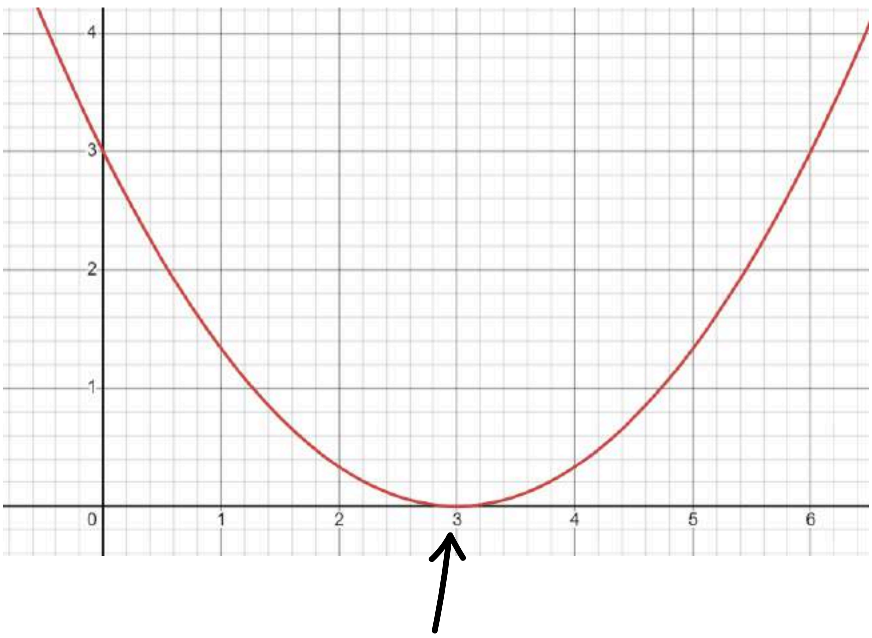
$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$a = \frac{1}{3};\ b = -2;\ c = 3$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 4 - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2 \pm 0}{\frac{2}{3}} \begin{cases} x_1 = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \\ x_2 = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \end{cases}$$

Portanto, a função f possui dois zeros iguais a 3 e (3,0) é o ponto em que o gráfico intersecta o eixo x.



3º caso: $\Delta < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ **não possui** raízes reais.

Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$, resolvemos a equação $f(x) = 0$.

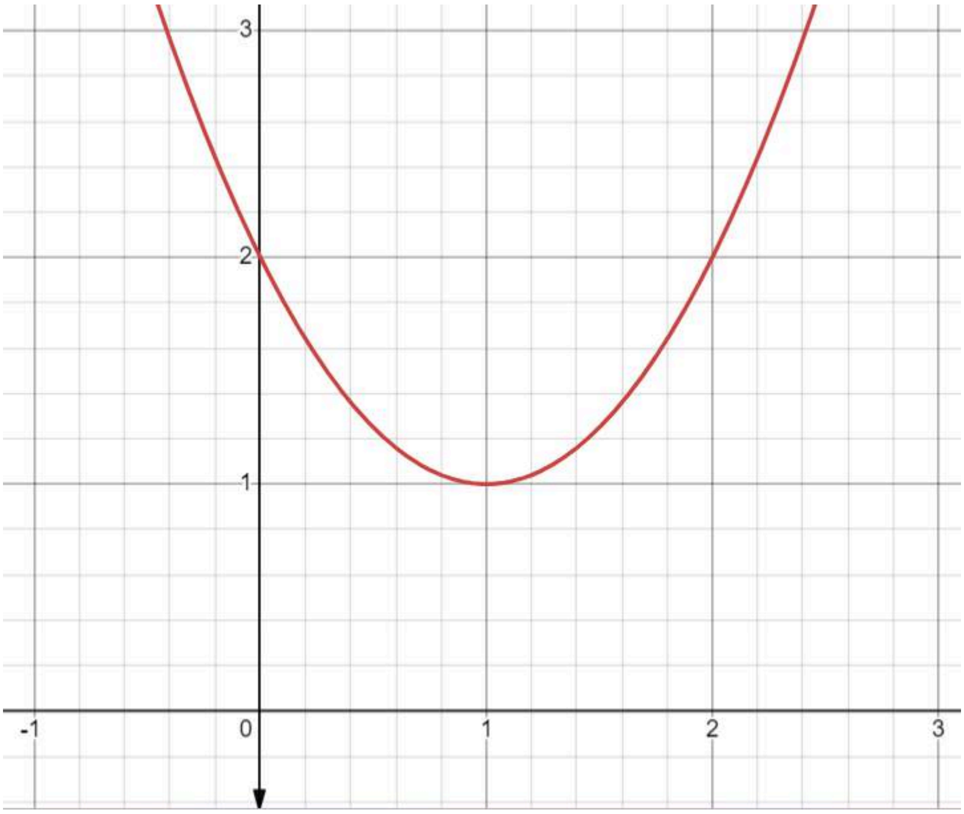
CONCEITOS E CONTEÚDOS

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 1;\ b = -2;\ c = 2$

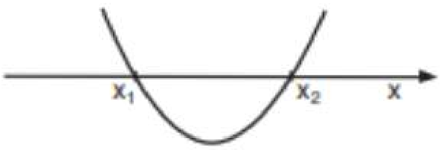
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais, pois $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.



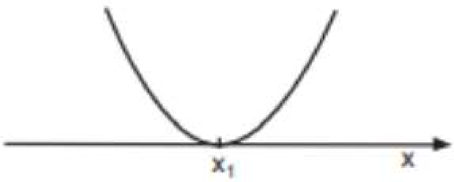
Portanto, f não possui zeros, e o gráfico dessa função não intersecta o eixo x.

Podemos, então, resumir:



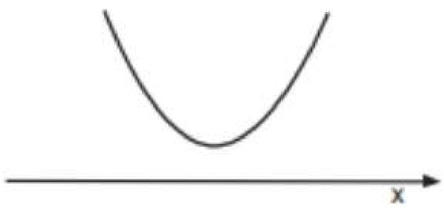
$$\Delta > 0$$

A função tem duas raízes reais diferentes



$$\Delta = 0$$

A função tem duas raízes reais iguais, ou simplesmente dizemos que tem uma raiz.



$$\Delta < 0$$

A função não tem raízes reais.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

VÉRTICE DE UMA PARÁBOLA, VALOR MÁXIMO E VALOR MÍNIMO

A determinação do vértice da parábola ajuda na construção do gráfico e dá o valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática.

O vértice de uma parábola dada por $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) é determinado por:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

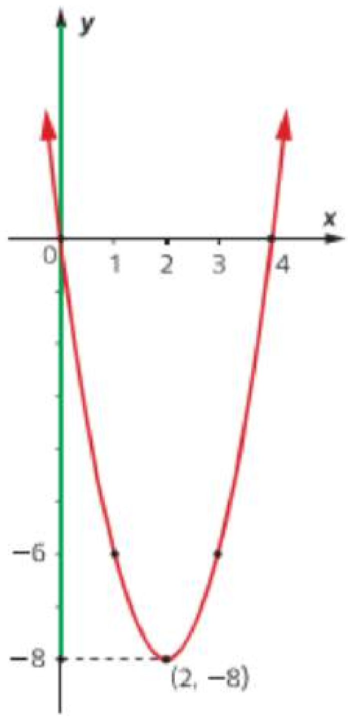
Exemplos:
Vamos determinar o vértice da parábola $y = 2x^2 - 8x$ e o valor máximo ou valor mínimo da função:
Vamos calcular Δ para essa função:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 64$$

Então:

$$V\left(-\frac{(-8)}{4}, -\frac{64}{8}\right) \Rightarrow V(2, -8)$$

A função quadrática $y = 2x^2 - 8x$ assume valor mínimo -8 quando x = 2. Todos os outros valores de y nessa função são maiores do que -8.



A partir dos conhecimentos adquiridos até aqui, podemos retomar o estudo de traçar o gráfico de uma função quadrática do tipo $ax^2 = 0$ no plano cartesiano e ampliar para as demais funções quadráticas.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

TRAÇANDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NO PLANO CARTESIANO

No material anterior vimos que para traçar o gráfico de uma função quadrática, nós atribuímos valores a x e obtemos os correspondentes valores de y.

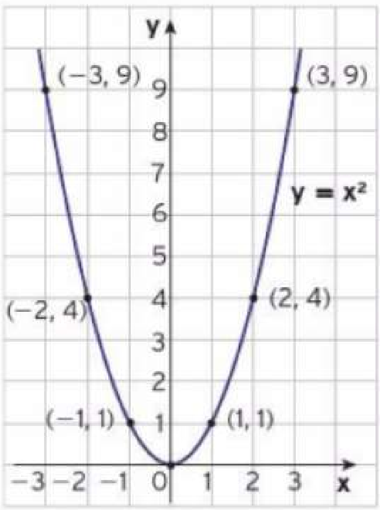
Exemplo 1: **$y = x^2$**

Para x = -3, temos y = $(-3)^2 = 9$
Para x = -2, temos y = $(-2)^2 = 4$
Para x = -1, temos y = $(-1)^2 = 1$
Para x = 0, temos y = $0^2 = 0$
Para x = 1, temos y = $1^2 = 1$
Para x = 2, temos y = $2^2 = 4$
Para x = 3, temos y = $3^2 = 9$

Organizamos os dados obtidos em um quadro com os pares ordenados.

x	x^2	$y = x^2$	(x, y)
−3	$(-3)^2$	9	(−3, 9)
−2	$(-2)^2$	4	(−2, 4)
−1	$(-1)^2$	1	(−1, 1)
0	0^2	0	(0, 0)
1	1^2	1	(1, 1)
2	2^2	4	(2, 4)
3	3^2	9	(3, 9)

Localizamos esses pontos no plano cartesiano e tracemos uma linha passando por esses pontos.



Em funções do tipo $y = ax^2$ teremos o vértice no ponto de origem (0,0). Mas a partir de agora, em funções em que b ou c são diferentes de zero, nem sempre conseguiremos determinar o ponto do vértice de uma função apenas pela tabela, principalmente porque costumamos atribuir à x valores inteiros de -2 a 2.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Tomemos, agora, como exemplo 2, a função quadrática $y = x^2 + 2x - 3$, sendo x um número real qualquer.

Observe o passo a passo:

1. Vamos, inicialmente, determinar as coordenadas do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2)}{2.(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

Calculamos Δ :

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 4 + 12 = 16$$

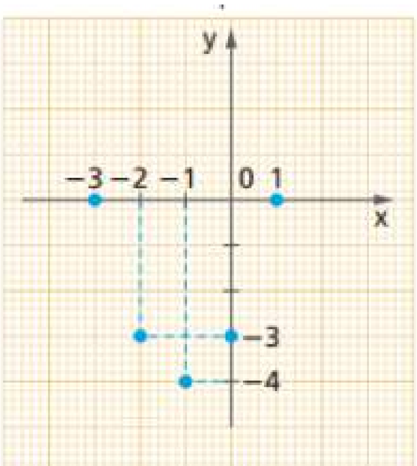
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4.1} = -4$$

Temos V(-1,-4).

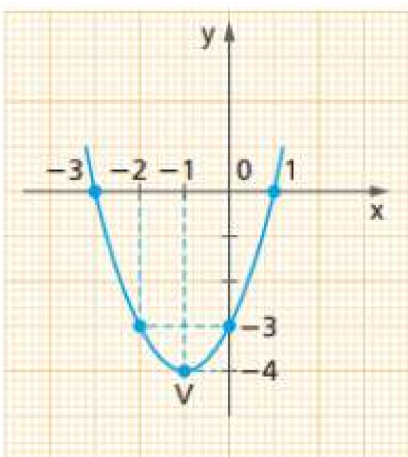
2. Atribuímos valor à x e obtemos os valores correspondentes à y.

x	y
−3	0
−2	−3
−1	−4
0	−3
1	0

3. Marcamos os pontos:



4. Traçamos o gráfico:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Seja a função y = $-x^2 + 4x - 5$.

A) Determine o grau da função.
B) Essa função é crescente ou decrescente?
C) Essa função tem valor máximo ou valor mínimo?
D) Quais as coordenadas do vértice dessa função?
E) Quantas raízes tem essa função?
F) Esboce o gráfico.

Resolução:

A) Determine o grau da função.
Essa é uma função quadrática, ou seja, do 2º grau, pois o maior expoente de x é 2.

B) Essa função é crescente ou decrescente?
Essa é uma função decrescente, pois a < 0.

C) Essa função tem valor máximo ou valor mínimo?
Uma função decrescente tem valor máximo.

D) Quais as coordenadas do vértice dessa função?

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(4)}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ y_v = -x_v^2 + 4x_v - 5 = -(2)^2 + 4 \cdot (2) - 5 = -1 \end{array}\right\} V(2, -1)$$

E) Quantas raízes tem essa função?

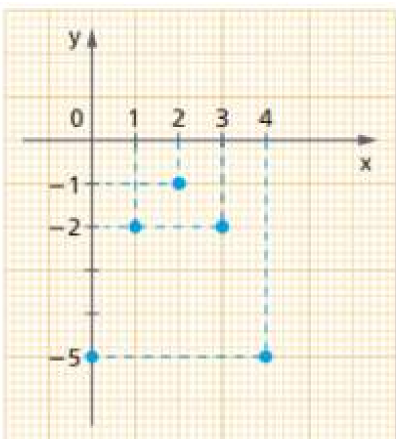
$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 4^2 - 4.(-1).(-5) = 16 - 20 = -4$$

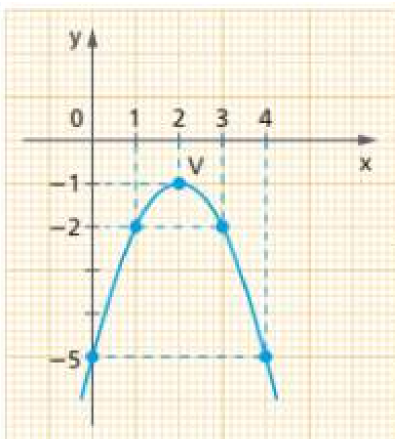
Essa função não tem raízes reais, pois $\Delta < 0$.

F) Esboce o gráfico.

Atribuímos valores à x e obtendo valores correspondentes de y. Em seguida marcamos os pontos e depois traçamos o gráfico.

x	y
0	−5
1	−2
2	−1
3	−2
4	−5





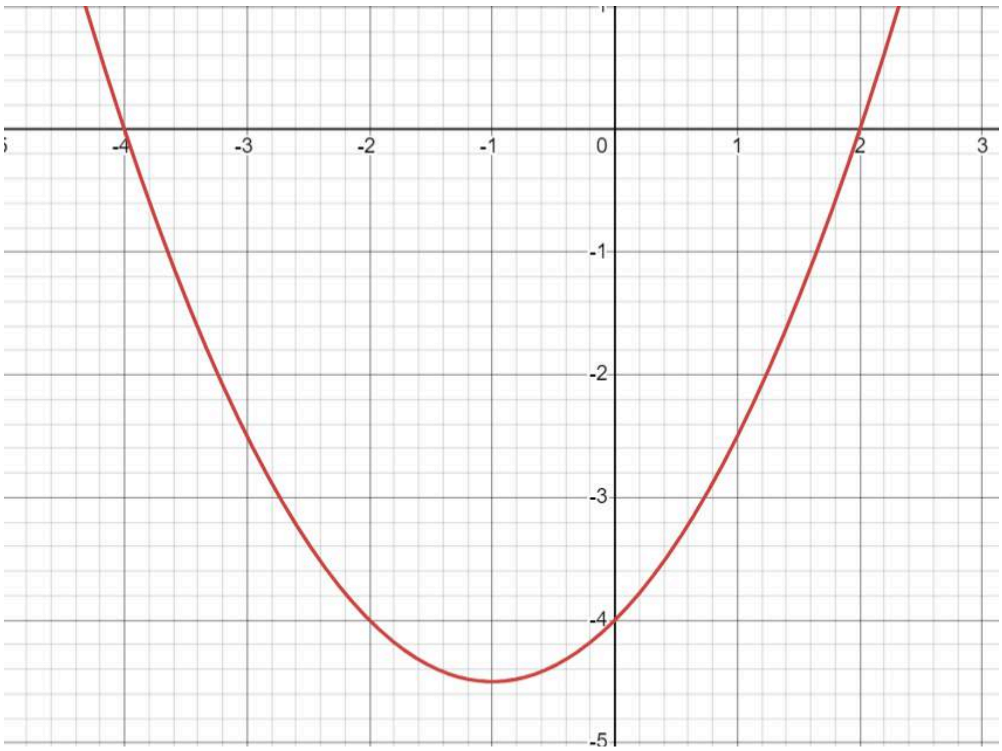
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

CONCEITOS E CONTEÚDOS

DETERMINANDO A LEI DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nós já estudamos como traçar uma parábola a partir da lei e uma função quadrática. Agora, veremos como determinar a lei de uma função quadrática observando o gráfico.

Observe o gráfico a seguir:



A partir desse gráfico, conseguimos determinar que essa função:

- é do 2º grau, pois é uma parábola;
- é crescente, pois a concavidade está para cima e tem um ponto de mínimo;
- tem -4 e 2 como zeros da função (raízes);
- tem delta positivo porque tem duas raízes

Para determinar a lei dessa função, vamos observar:

1. A parábola intersecta o eixo y no ponto de ordenada -4. Então, temos c = -4.
2. Os pontos (-4,0) e (2,0) pertencem ao gráfico.

Assim:

$$\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.(-4)^2 + b.(-4) - 4 = 0 \\ a.2^2 + b.2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtido pelo método da adição, temos a = 1/2 e b = 1

Portanto, a lei de formação da função f é f(x) = $\frac{1}{2}x^2 + x - 4$

Atividade 1

A função quadrática $y = x^2 - 4x$ é:

A) crescente, pois a < 0
B) crescente, pois a = 0
C) crescente, pois a > 0
d) decrescente, pois a >0
e) decrescente, pois a < 0

Atividade 2

Considere a função quadrática incompleta $f(x) = x^2 - 9$. Quais são as raízes dessa função?

a) $x = 3$
b) $x = -3$
c) $x = \pm 3$
d) $x = 0$
e) $x = 9$

Atividade 3

Considere a função quadrática incompleta $f(x) = 3x^2 - 9x$. Calcule a raiz dessa função quadrática.

a) $x = 3$
b) $x = -3$
c) $x = 0$ e $x = 3$
d) $x = 0$ e $x = -3$
e) $x = 3$ e $x = 6$

Atividade 4

Considere a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Calcule as raízes dessa função quadrática.
a) $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$
b) $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$
c) $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$
d) $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$
e) $x_1 = 1$ e $x_2 = 1,5$

Atividade 5

(M120328E4) Observe a tabela abaixo. Nessa tabela, x representa a variável independente, e y a variável dependente de uma função polinomial do 2º grau.

x	y
–2	11
0	1
1	8

A função polinomial do 2º grau que relaciona as variáveis x e y dessa tabela é

A) $y = 4x^2 + 3x + 1$
B) $y = 4x^2 - 2x + 11$
C) $y = x^2 + 8x + 9$
D) $y = x^2 + x + 1$
E) $y = -2x^2 + 11x + 9$

Atividade 6

(M120705ES) No quadro abaixo foram registrados alguns pares ordenados de uma função f : IR → IR.

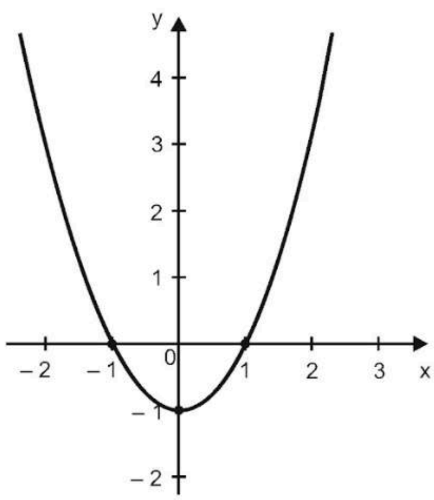
x	– 2	– 1	0	1	2	3	4
f(x)	0	3	4	3	0	– 5	– 12

Uma expressão algébrica que representa essa função é

A) $f(x) = x + 4$
B) $f(x) = 4 - x$
C) $f(x) = x^2 - 4$
D) $f(x) = 4 - x^2$
E) $f(x) = 4 + x^2$

Atividade 7

(M100082ES) O gráfico abaixo representa uma função do 2° grau definida de IR em IR.



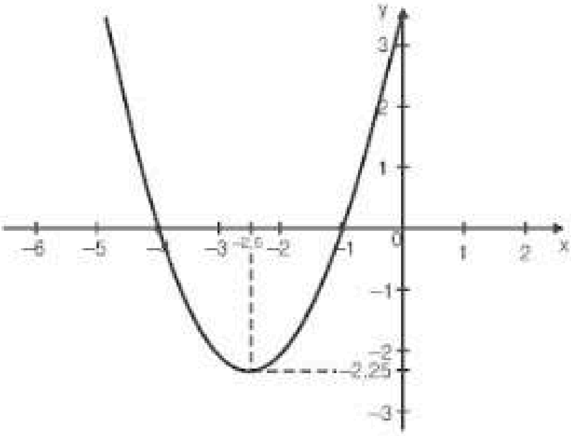
Qual é a expressão algébrica que representa essa função?

A) $y = -x^2 - x$
B) $y = -x^2 + 1$
C) $y = x^2 - 1$
D) $y = x^2 + 1$
E) $y = x^2 + x$

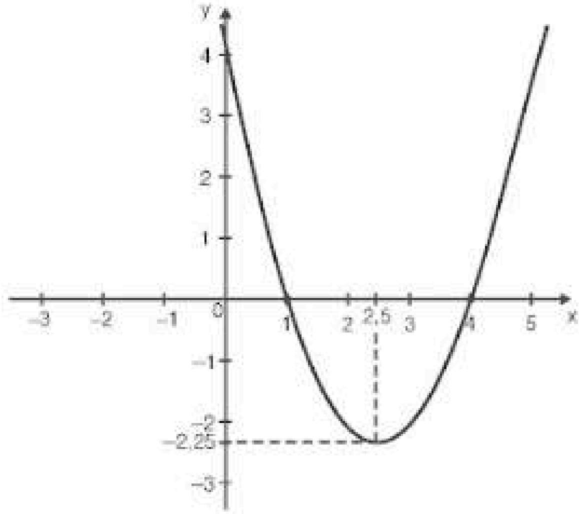
Atividade 8

(M100089EX) O gráfico que representa a função $y = x^2 + 5x + 4$ definida de IR em IR é

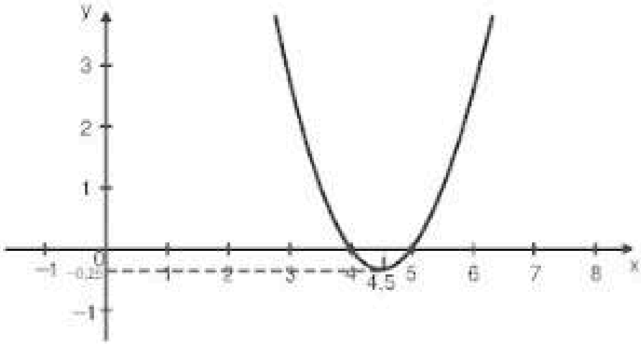
A)



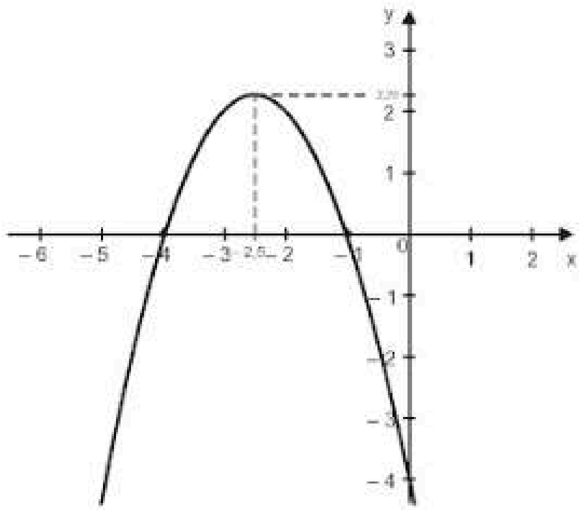
B)



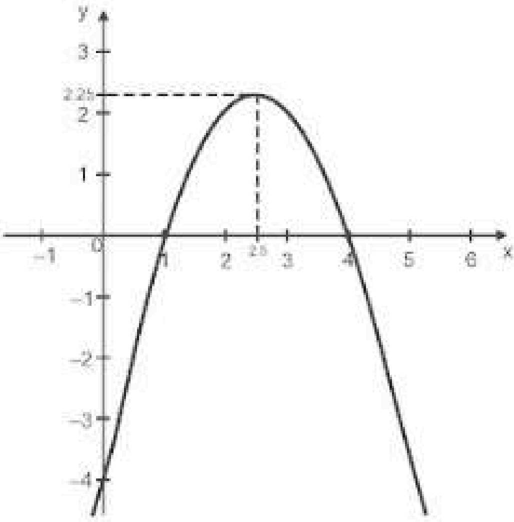
C)



D)

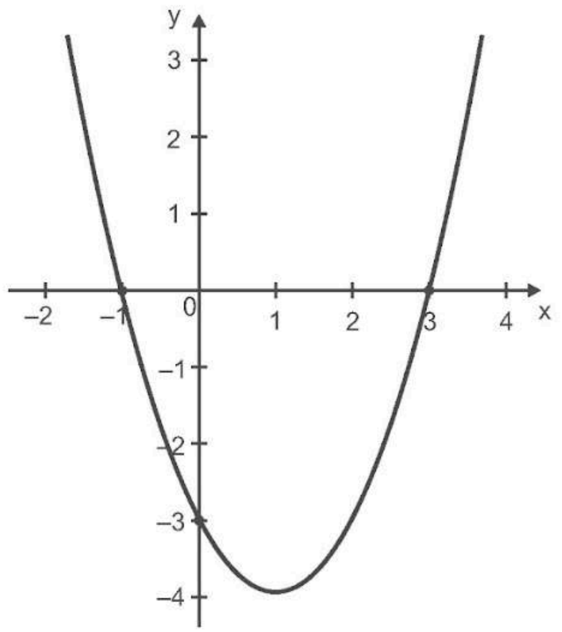


E)



Atividade 9

(M100062EX) O gráfico abaixo representa uma função do 2° grau definida de IR em IR.

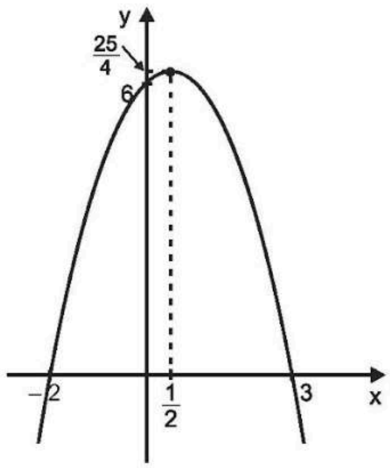


A representação algébrica dessa função é

A) $y = -x^2 - 2x + 3$
B) $y = -x^2 + 2x - 3$
C) $y = x^2 - 2x + 3$
D) $y = x^2 + 2x - 3$
E) $y = x^2 - 2x - 3$

Atividade 10

(M100092CE) Uma função do segundo grau está representada no plano cartesiano abaixo.



A expressão algébrica que corresponde a essa função é

A) $y = -x^2 + x + 6$
B) $y = -x^2 - 0{,}5\,x + 6$
C) $y = -x^2 - 5x + 6$
D) $y = x^2 - x + 6$
E) $y = x^2 + x + 6$

GABARITO

ATIVIDADE 1: C
ATIVIDADE 2: C
ATIVIDADE 3: C
ATIVIDADE 4: E
ATIVIDADE 5: A
ATIVIDADE 6: D
ATIVIDADE 7: C
ATIVIDADE 8: A
ATIVIDADE 9: E
ATIVIDADE 10: A

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática : ciência e aplicações, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Mori, Iracema. Matemática: ideias e desafios, 9º ano / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. -- 18.ed.-- São Paulo : Saraiva, 2015.