

Matemática

3ª Série | Ensino Médio

23ª Semana



EQUAÇÃO DA RETA



MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO SAEB	D124_M Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	EM13MAT510 Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	EF08MA08 Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1o grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.			

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

Você usa aplicativos de mensagens? Se usa, costuma ficar ansioso(a) quando alguém recebe e visualiza suas mensagens, mas não responde de imediato? As ferramentas de comunicação e informação permitem que as pessoas, mesmo que se encontrem em lugares diferentes e distantes, continuem comunicando-se de modo quase instantâneo. O processo de evolução dessas ferramentas passou por várias fases e invenções que acabaram se tornando de grande importância para grande parte da sociedade.

Há algumas décadas, uma das principais maneiras de comunicação a distância eram as cartas. Escritas à mão, podiam demorar meses para chegar ao destinatário. O rei de Portugal, por exemplo, só ficou sabendo do descobrimento do Brasil, em 1500, após receber a carta de Pero Vaz de Caminha, dezenas de dias depois. Nela, não havia fotos de paisagens naturais, áudios narrativos, vídeos de animais ou memes sobre a interação dos portugueses com os índios, como aconteceria se fosse hoje.

Contudo, temos de ficar atentos, pois, de maneira geral, os planos de internet móvel são oferecidos de acordo com a quantidade de dados disponíveis no período, em gigabytes (GB), tanto no serviço pré-pago quanto no pós-pago. Veja o que é possível fazer com aproximadamente 1 GB de dados em certa velocidade de transferência.



Enviar mais de 340 000 e-mails ou mensagens de texto em aplicativo de mensagens instantâneas.



Assistir via streaming 2 horas de vídeo em resolução 480p.

ILUSTRAÇÕES:
HELOISA PINTARELLI



Ouvir rádio pela internet por 17 horas e 4 minutos.



Fazer o download ou ouvir via streaming 205 músicas.

Ainda em relação à oferta de planos de internet móvel, alguns planos são oferecidos por valores fixos acrescidos de uma taxa para cada gigabyte que exceder a franquia.

Com base nessas informações, é possível calcular o valor pago por meio da resolução de equações, assunto abordado no material anterior, ou ainda, comparar os valores de dois planos diferentes, de acordo com o consumo de dados, por meio da resolução de um sistema com duas equações e duas incógnitas, assunto que será estudado neste material.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

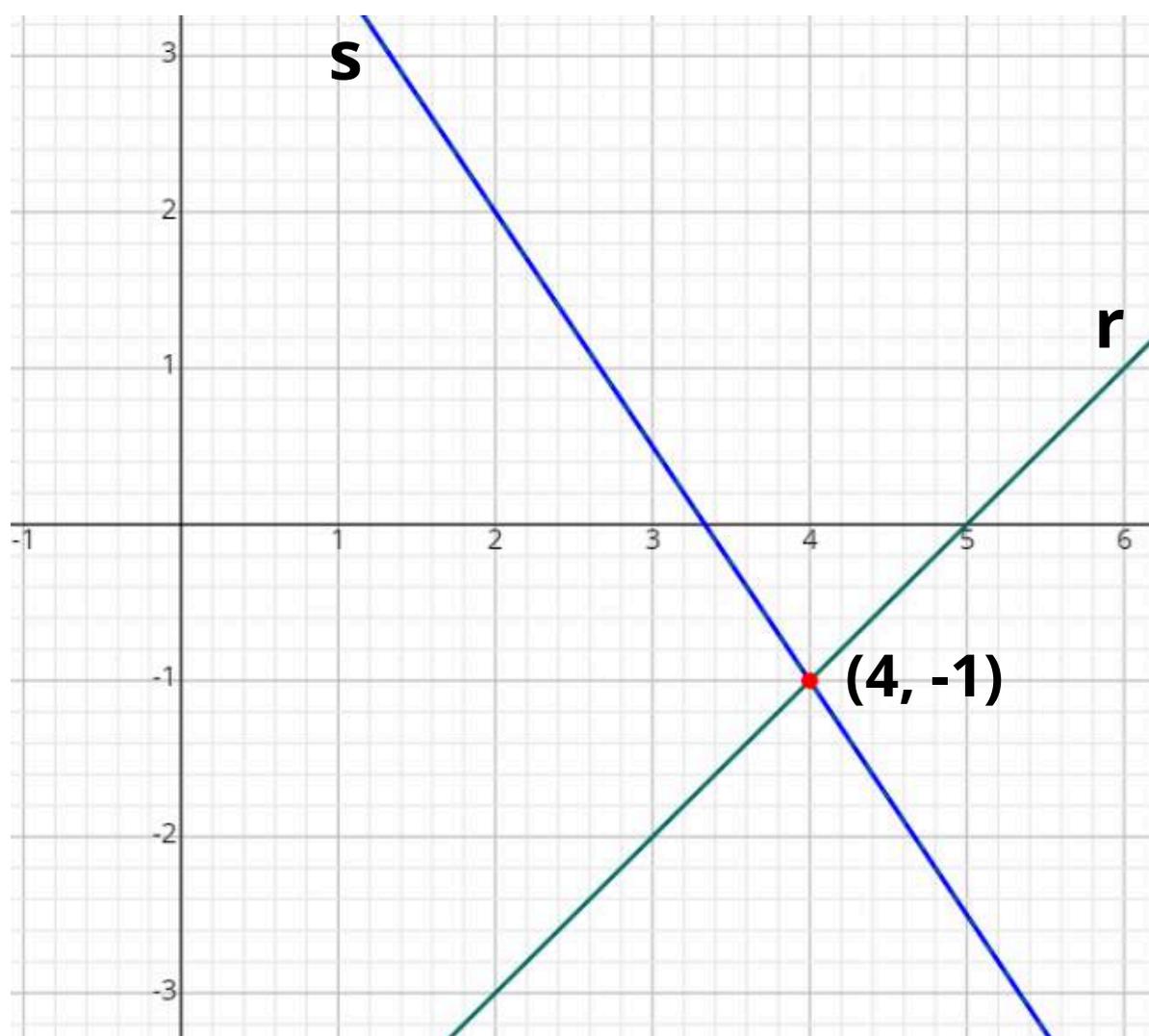
No material anterior nós estudamos os sistemas lineares. Vimos que a solução de um sistema de equações com duas incógnitas pode ser representada no plano cartesiano, conforme exemplo a seguir:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

Fizemos a resolução desse sistema e obtivemos $x = 4$ e $y = -1$.

Observe no plano cartesiano abaixo que a intersecção das duas retas acontece exatamente no ponto $x = 4$ e $y = -1$.

A reta r é a representação geométrica da equação $x - y = 5$, enquanto a reta s é a representação geométrica da equação $3x + 2y = 10$.



Observe, ainda, que foi destacado apenas um ponto, que é o ponto em comum, ou seja, o ponto $(4, -1)$ que pertence tanto à reta r quanto à reta s . No entanto, sabemos que numa reta há infinitos pontos. Desses infinitos pontos, vamos destacar dois pontos e a partir desses dois pontos conseguiremos determinar a equação da reta.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Uma equação da reta do tipo $ax + by = c$ é comumente trabalhada em sistemas de equações. No entanto, existem outras formas de representar uma reta por meio de uma equação, mas todas as formas de equações podem ser obtidas a partir da equação fundamental da reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

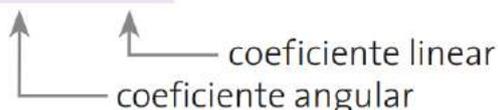
Neste material nós vamos estudar a forma reduzida, chamada de **equação reduzida da reta**.

A partir da equação fundamental da reta, vamos escolher um ponto. Para facilitar os cálculos, escolheremos, em particular, o ponto $(0, n)$ para encontrar o valor de n , que é o ponto que intersecta o eixo y e evitar de fazer mais cálculos.

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow y = mx + n$$

O número real n , que é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo y , é chamado **coeficiente linear da reta**, enquanto m é o **coeficiente angular**.

$$y = mx + n$$



Essa forma é especialmente importante porque permite obter o coeficiente angular de uma reta a partir de uma equação, além de expressar claramente a coordenada y em função de x .

Perceba que a estrutura $y = mx + n$ da equação reduzida da reta nos lembra uma estrutura que já foi estudada no 1º ano: função afim.

Podemos fazer uma analogia entre a equação reduzida da reta e a lei de uma função afim:

Equação reduzida da reta

$$y = mx + n$$

Função afim

$$f(x) = ax + b$$



Conseguimos, da mesma forma, determinar a equação da reta utilizando o sistema de equação, como veremos a seguir.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

EQUAÇÃO DA RETA A PARTIR DE DOIS PONTOS

Numa reta existem infinitos pontos, mas apenas dois pontos são suficientes para determinar uma única reta.

Observe o exemplo a seguir:

Determinar a equação da reta que passa pelos pontos A(1,2) e B(2,3).

Resolução:

Para o ponto A(1,2), temos $x = 1$ e $y = 2$

Utilizando a equação reduzida genérica, temos:

$$y = mx + n$$

Substituindo x e y , temos

$$2 = m(1) + n$$

$$\mathbf{2 = m + n}$$

$$\text{ou } \mathbf{m+n = 2}$$

Para o ponto B(2,3), temos $x = 2$ e $y = 3$

Utilizando equação reduzida genérica, temos:

$$y = mx + n$$

Substituindo x e y , temos

$$3 = m(2) + n$$

$$\mathbf{3 = 2m + n}$$

$$\text{ou } \mathbf{2m+n = 3}$$

Obtivemos as duas equações necessárias para resolver o sistema:

$$\begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = 3 \end{cases}$$

Resolvendo, temos

$$\begin{cases} m + n = 2 \cdot (-1) \\ 2m + n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m - \cancel{n} = -2 \\ 2m + \cancel{n} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m + n = 2 \\ (1) + n = 2 \\ \mathbf{n = 1} \end{matrix}$$
$$\frac{\begin{matrix} -m - \cancel{n} = -2 \\ 2m + \cancel{n} = 3 \end{matrix}}{m} = 1$$

Substituindo os valores de m e n na equação reduzida da reta, temos:

$$y = mx + n$$

$$y = 1x + 1 \text{ ou } y = x + 1$$

Assim, a equação da reta que passa pelos pontos (1,2) e (2,3) é $y = x + 1$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A EQUAÇÃO DA RETA A PARTIR DE DADOS EM TABELA

No exemplo anterior, vimos que conseguimos determinar a equação de uma reta a partir de dois pontos, e esses dois pontos foram dados na forma (x,y) .

Há casos em que os pontos não são dados explicitamente, mas conseguimos por meio de tabela que relaciona os valores de x e os valores de y .

Observe o exemplo:

x	y
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3

Dada a tabela do exemplo anterior.

Nesta tabela estão cinco valores para x e os cinco valores correspondentes à y . No entanto, precisamos de apenas dois deles.

No exemplo anterior trabalhamos com os pontos $(1,2)$ e $(2,3)$. Desta vez, vamos escolher outros dois pontos, mesmo sabendo que obteremos a mesma equação.

Escolhendo os pontos $(-2, -1)$ e $(-1, 0)$, temos:

Para o ponto $A(-2,-1)$, temos $x = -2$ e $y = -1$

Utilizando a equação reduzida genérica, temos:

$$y = mx + n$$

Substituindo x e y , temos

$$-1 = m(-2) + n$$

$$\mathbf{-1 = -2m + n}$$

$$\text{ou } \mathbf{-2m + n = -1}$$

Para o ponto $B(-1,0)$, temos $x = -1$ e $y = 0$

Utilizando a equação reduzida genérica, temos:

$$y = mx + n$$

Substituindo x e y , temos

$$0 = m(-1) + n$$

$$\mathbf{0 = -1m + n}$$

$$\text{ou } \mathbf{-m + n = 0}$$

Obtivemos as duas equações necessárias para resolver o sistema:

$$\begin{cases} -2m + n = -1 \\ -m + n = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, temos

$$\begin{cases} -2m + n = -1 \cdot (-1) \\ -m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m - \cancel{n} = 1 \\ -m + \cancel{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m + n = 0 \\ -(1) + n = 0 \end{cases}$$
$$\underline{\quad m \quad = 1} \qquad \qquad \qquad \underline{\quad n = 1}$$

Substituindo os valores de m e n na equação reduzida da reta, temos:

$$y = mx + n$$

$$y = 1x + 1 \text{ ou } y = x + 1$$

De fato, a equação da reta que passa pelos pontos $(1,2)$ e $(2,3)$ é $y = x + 1$, como vimos no exemplo anterior.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Observe no quadro a seguir a quantidade de panfletos que uma impressora produz de acordo com a medida de tempo de seu funcionamento.

Medida de tempo de impressão (em minuto)	Quantidade de panfletos
2	36
4	72
6	108
8	144
10	180

Escreva a equação da reta lei que relacione a quantidade de panfletos impressos (y) com a medida de tempo (x) em minuto.

Uma solução:

Usando o sistema de equações do 1º grau, escolhendo dois pares ordenados, como exemplo, $A(2,36)$ e $B(4,72)$.

Para o ponto $A(2,36)$, temos $x = 2$ e $y = 36$

Utilizando a equação reduzida genérica, temos

$$y = mx + n$$

Substituindo x e y , temos

$$36 = m(2) + n$$

$$36 = 2m + n$$

$$\text{ou } 2m + n = 36$$

Para o ponto $B(4,72)$, temos $x = 4$ e $y = 72$

Utilizando a equação reduzida genérica, temos

$$y = mx + n$$

Substituindo x e y , temos

$$72 = m(4) + n$$

$$72 = 4m + n$$

$$\text{ou } 4m + n = 72$$

Obtivemos as duas equações necessárias para resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2m + n = 36 \\ 4m + n = 72 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2m + n = 36 \cdot (-1) \\ 4m + n = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2m - n = -36 \\ 4m + n = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 2m + n = 36 \\ 2(18) + n = 36 \\ 36 + n = 36 \\ n = 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 2m = 36 \\ m = 18 \end{array}$$

Portanto, a equação da reta é $y = 18x + 0$, ou simplesmente, $y = 18x$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 EXERCÍCIO DA CONTEXTUALIZAÇÃO

Ao realizar uma pesquisa, Paulo constatou que, utilizando certo aplicativo A por 10 min e um aplicativo B por 2 min, consome 3 MB de seu plano de dados. Porém, quando utiliza A por 5 min e B por 6 min, consome 4 MB. Quantos megabytes por minuto consome cada um desses aplicativos?

Resolução:

Para resolver esse problema, podemos escrever um sistema de equações do 1º grau ou sistema linear. Se chamarmos de x o consumo de dados por minuto do aplicativo A e de y o do aplicativo B, temos as seguintes equações:

tempo, em minutos,
de uso de A

tempo, em minutos,
de uso de B

$$10x + 2y = 3$$

consumo em MB

tempo, em minutos,
de uso de A

tempo, em minutos,
de uso de B

$$5x + 6y = 4$$

consumo em MB

Utilizando essas equações, podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 10x + 2y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 10x + 2y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 2y = 3 \\ -10x - 12y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 2y = 3 \\ 10x + 2(0,5) = 3 \\ 10x + 1 = 3 \\ x = 0,2 \end{cases}$$
$$-10y = -5$$
$$y = 0,5$$

Portanto, o sistema linear tem como solução $x = 0,2$ e $y = 0,5$, ou seja, os aplicativos A e B consomem, por minuto, 0,2 MB e 0,5 MB, respectivamente.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(M120213G5) A equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-3, -1)$ e $(3, 5)$ é

- A) $y = -3x - 1$
- B) $y = -x$
- C) $y = x - 4$
- D) $y = x + 2$
- E) $y = 2x - 1$

Atividade 2

(PAMA11143MS) A equação da reta que passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0,3)$ é

- A) $y = 2x - 1$
- B) $y = 2x + 6$
- C) $y = 3x - 3$
- D) $y = -3x - 3$
- E) $y = -3x + 3$

Atividade 3

(PAMA11010AC) A equação da reta que passa pelos pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ é

- A) $y = -x + 1$
- B) $y = x + 1$
- C) $y = -x$
- D) $y = x$
- E) $y = 0$

Atividade 4

(M120180G5) Qual é a equação da reta que passa pelos pontos H $(-1, 5)$ e I $(1, 1)$?

- A) $y = -2x - 3$
- B) $y = -2x + 3$
- C) $y = -2x + 9$
- D) $y = \frac{-x}{2} + \frac{3}{2}$
- E) $y = 2x + 4$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

(M11064SI) A equação da reta que passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ é

- A) $y = -x - 1$
- B) $y = -x + 1$
- C) $y = x + 1$
- D) $y = x - 1$
- E) $y = 1$

Atividade 6

(SAEB) Marcos é arquiteto e projetou um bairro sobre um plano cartesiano. Ele posicionou numa mesma rua, a Escola no ponto $A(2,3)$ e posto de Saúde no ponto $B(3,5)$.

Qual é a equação da reta que representa essa rua?

- A) $y = 2x - 1$
- B) $y = 2x + 1$
- C) $y = x + 1$
- D) $y = x + 2$
- E) $y = x - 2$

Atividade 7

(SAEPE) Em um plano cartesiano desenhado sobre um mapa do Brasil, a cidade de Vitória está localizada no ponto $V(5,0)$ e a cidade do Rio de Janeiro no ponto $R(1,8)$.

Qual é a equação da reta que passa por essas duas cidades nesse mapa?

- A) $y = -x + 5$
- B) $y = -3x + 11$
- C) $y = 2x + 10$
- D) $y = -3x + 15$
- E) $y = -2x + 10$

Atividade 8

(PROVA BRASIL) Um engenheiro quer construir uma estrada de ferro entre os pontos de coordenadas $(2,3)$ e $(4,7)$, devendo a trajetória da estrada ser retilínea. Qual é a equação da reta que representa essa estrada de ferro?

- A) $y = 2x + 3$
- B) $4x = 7y$
- C) $y = 2x - 1$
- D) $y = x/2 + 2$
- E) $y = x/2 + 5$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

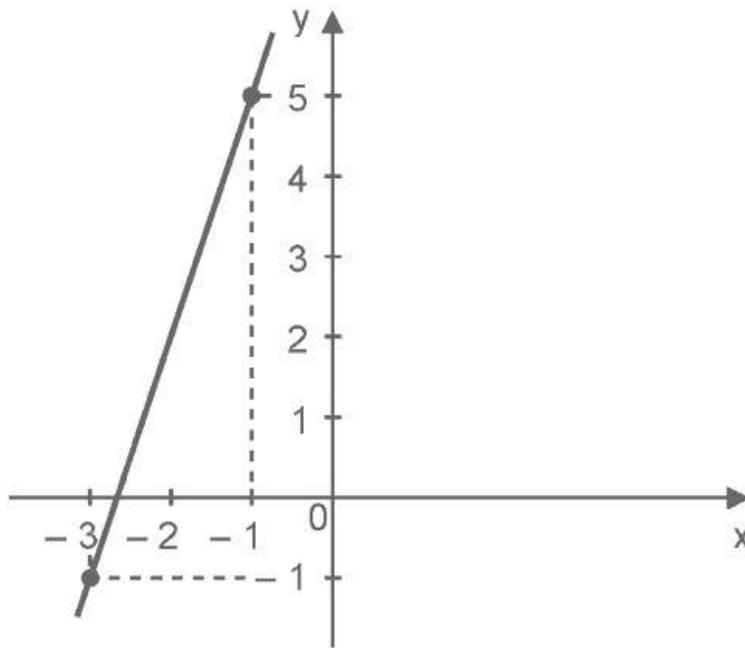
Atividade 9

(SAEB) Um robô enxerga o piso de uma sala como um plano cartesiano e foi programado para andar em linha reta, passando pelos pontos $(1,3)$ e $(0,6)$. Esse robô foi programado para andar sobre a reta

- A) $y = -3x + 6$
- B) $y = -3x + 3$
- C) $y = -3x + 1$
- D) $y = 3x + 6$
- E) $y = 3x + 1$

Atividade 10

(M11167SI) A reta r está representada na figura:



É **CORRETO** afirmar que a equação da reta r é:

- A) $y = -3x - 1$
- B) $y = -x + 5$
- C) $y = -x - 3$
- D) $y = 5x - 1$
- E) $y = 3x + 8$

GABARITO

ATIVIDADE 1: D
ATIVIDADE 2: E
ATIVIDADE 3: D
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: B
ATIVIDADE 6: A
ATIVIDADE 7: E
ATIVIDADE 8: C
ATIVIDADE 9: A
ATIVIDADE 10: E

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.