GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

# MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

# Matemática

## 2ª Série | Ensino Médio

*22ª Semana*

## Função Logarítmica

| | |
|---|---|
| **DESCRITOR DO SAEB** | **D28** - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial. |
| **HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES** | **EM13MAT305** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. |
| **HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS** | **EF09MA03/ES** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários e decimais (radiciação). |

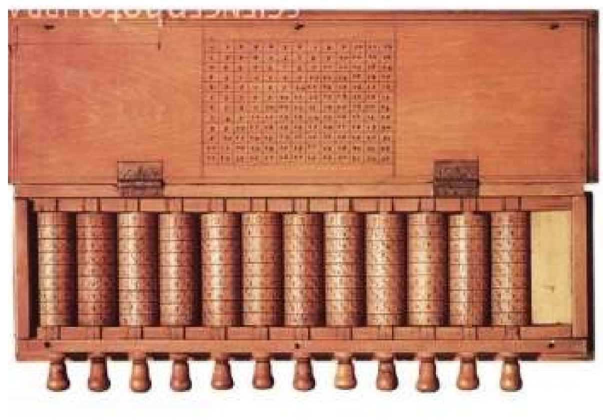
# MATEMÁTICA

## CONTEXTUALIZAÇÃO

### Logaritmos e suas maravilhas

[...] A palavra logaritmo vem de "logos" que em grego significa razão e "aritmo" número. O conceito de logaritmos foi introduzido pelo matemático escocês John Napier (1550 – 1617) e aperfeiçoado pelo inglês Henry Briggs (1561- 1630). No ano de 1614, ou seja, a mais de 400 anos passados, Napier criou uma maneira de simplificar cálculos com a invenção dos logaritmos. Naquela época, multiplicar, dividir, calcular potências era um trabalho árduo. O surgimento dos logaritmos representou para a época um grande salto na realização de operações aritméticas, transformando os produtos em somas e os quocientes em diferenças. Naquele período, os logaritmos representaram um grande instrumento que alavancou os estudos da astronomia e navegação. Também em 1614, Napier publicou seu trabalho sobre logaritmos no livro "Descrição das maravilhosas Regras dos Logaritmos".

Uma importante aplicação dos logaritmos encontra-se na escala Richter que mede a magnitude de terremotos. Em 1935, mais de três séculos depois que Napier iniciou a criação dos logaritmos, os sismólogos Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter que é uma escala logarítmica. Na ocorrência de terremotos, a energia liberada vem em forma de ondas. A escala Richter está associada ao valor do logaritmo da medida da amplitude máxima de onda, amplitude essa medida usando-se aparelhos denominados sismógrafos.



Fonte: Dante , 2014, p. 174

Os logaritmos são usados também na física, uma das aplicações está na escala de decibéis que mede a intensidade de sons suportáveis pelo ouvido humano. Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo do qual é impossível o ouvido humano percebê-lo e existe também uma intensidade máxima de som suportável pelos nossos ouvidos. A escala de decibéis também é uma escala logarítmica.

Na química, os logaritmos são utilizados para calcular o pH ( potencial hidrogeniônico) de solução aquosa. O pH é uma escala logarítmica que expressa o grau de acidez de uma solução, sendo "$0 \leq pH \leq 14$". Quando "$0 \leq pH < 7$" , a solução é acida. Se "$7 < pH \leq 14$" a solução é básica e quando "$pH = 7$" a solução é neutra.

Os logaritmos se aplicam em outras ciências e, assim como as funções exponenciais, descrevem vários fenômenos presentes na natureza.

Texto retirado no Jornal Estadão de Minas, com algumas adaptações. Disponível em: https://www.em.com.br/app/noticia/especiais/educacao/enem/2015/04/28/noticia-especial-enem,641856/logaritmos-e-suas-maravilhas.shtml#google_vignette

## SUGESTÃO DE PRÁTICA PEDAGÓGICA

Prezado(a) professor(a), nesta seção apresentamos uma sugestão de recurso para trabalhar a habilidade EM13MAT305. Para esta proposta são necessários dispositivo com acesso à internet.

Acesse o QR Code ou clique no link e instale o aplicativo.

Clique aqui

Nesta prática, os alunos terão a oportunidade de, a partir de uma mágica com cartas, estudar sobre funções logarítmicas.

# CONCEITOS E CONTEÚDOS

## DEFINIÇÃO

Considerando um número real **a**, a > 0 e a $\neq$ 1, definimos como função logarítmica de base **a** toda função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_a x$ , ou seja, a função logarítmica possui domínio nos reais positivos, contradomínio nos reais e associa a cada valor x do domínio um número na forma $log_a x$, sendo a base **a** maior que zero e diferente de 1.

## EXEMPLO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

$$f(x) = log_5 x$$

$$f(x) = log_{0,4} x$$

$$f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$$

## DOMÍNIO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Como vimos na definição, a função logarítmica é uma função com domínio real positivo (não nulo). Sendo assim, antes de resolvermos uma função logarítmica, precisamos verificar a definição do domínio dessa função.

## EXEMPLO

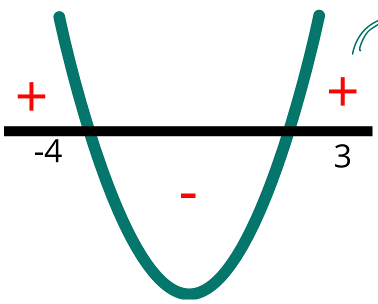
a) Determine o domínio da função $f(x) = log_3(4 - x)$

Pela definição, o domínio deve ser real positivo, ou seja, (4 - x) > 0.
Resolvendo a inequação, temos que
4 - x > 0
 - x > - 4
x < 4
Assim, o conjunto domínio dessa função é: $D = x\epsilon\mathbb{R}|x < 4$

$$\triangle = b^2 - 4.a.c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

b) Determine o domínio da função $f(x) = log_3(x^2 + x - 12)$
Pela definição, x² + x - 12 **> 0** . Para resolvermos a inequação, vamos, inicialmente calcular as raízes da equação do 2º grau. Aplicando a fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes 3 e - 4.
Fazendo o estudo do sinal da inequação




Os valores que satisfazem a condição de existência do domínio são, x < - 4 e x > 3.
Logo, o domínio da função é {$x\epsilon\mathbb{R}|x < -4$ ou $x > 3$ }

c) Determine o domínio da função $f(x) = log_{(2-x)}(x+1)$

Neste caso, precisamos observar a condição de existência tanto da base do logaritmo, quanto do domínio da função. Assim, para a condição de existência:

- **base**:

1) 2 - x > 0
- x > - 2
x < 2.

2) 2 - x $\neq$ 1
- x $\neq$ 1 - 2
- x $\neq$ - 1
x $\neq$ 1

- **domínio:**

x + 1 > 0
x > - 1

Determinando a interseção entre os valores de x para base e domínio temos que x precisa ser menor do que 2, maior que - 1 e diferente de 1, Logo, o domínio é: $x \epsilon \mathbb{R} | -1 < x < 2$ e $x \neq 1$

d) Determine o domínio da função $f(x) = log_{(2x-3)}(-x^2+2x+3)$

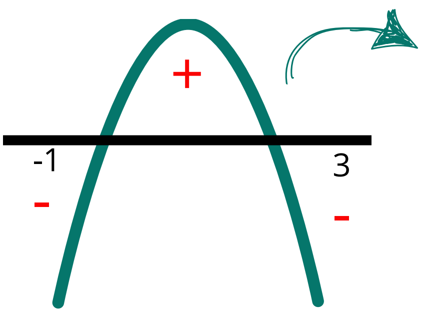
- Condição de existência da base:

$$2x - 3 > 0$$
$$2x > 3$$
$$x > \frac{3}{2}$$

$$2x - 3 \neq 1$$
$$2x \neq 1 + 3$$
$$2x \neq 4$$
$$x \neq \frac{4}{2}$$
$$x \neq 2$$

- Domínio $-x^2 + 2x + 3 > 0$

Calculando as raizes da equação, temos x = - 1 e x = 3 . Analisando o comportamento da equação, pelo gráfico, temos:




Os valores que satisfazem a condição de existência do domínio são, - 1 < x < 3.
Logo, o domínio da função é $\frac{3}{2} < x < 3$ e $x \neq 2$

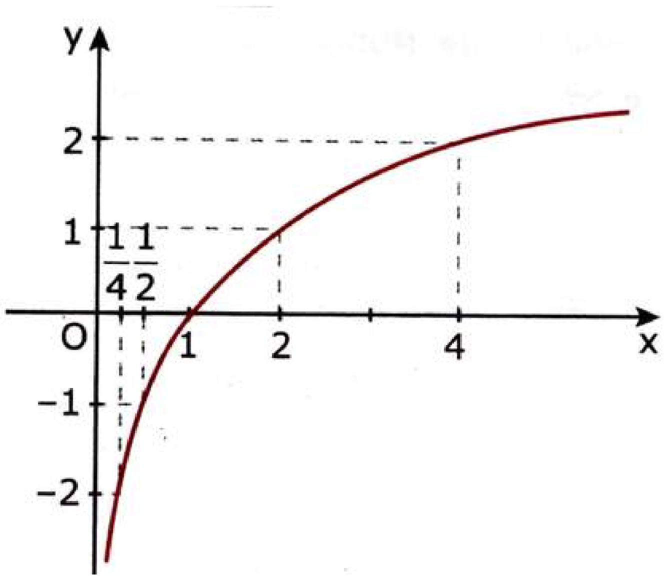
# CONCEITOS E CONTEÚDOS

## GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função logarítmica, assim como as demais funções, possui um gráfico característico. Vamos construir os gráficos e analisá-los.

a) Represente o gráfico da função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = log_2 x$
A base da função logarítmica é 2 e, na busca por alguns pontos de seu gráfico, é conveniente que os valores escolhidos para **x** no domínio sejam potências de 2.

| x | $f(x) = log_2 x$ |
|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | $f(\frac{1}{4}) = log_2 \frac{1}{4} = -2$ |
| $\frac{1}{2}$ | $f(\frac{1}{2}) = log_2 \frac{1}{2} = -1$ |
| 1 | $f(1) = log_2 1 = 0$ |
| 2 | $f(2) = log_2 2 = 1$ |




Algumas propriedades associadas à função logarítmica com base maior que 1:

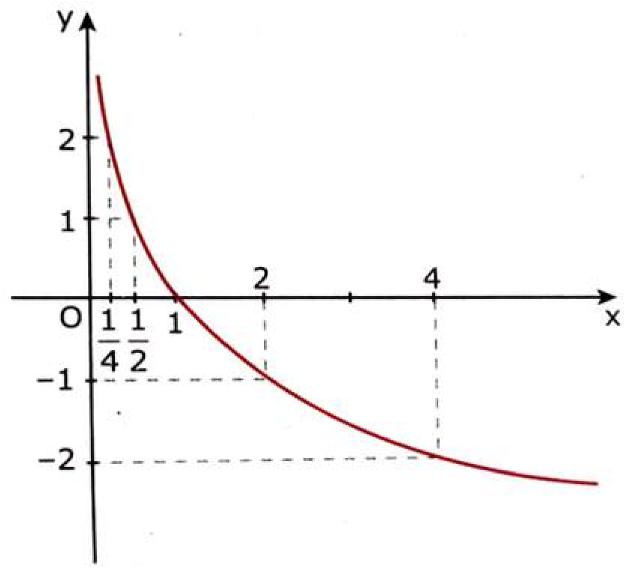
- A função $f(x) = log_2 x$ é uma **função crescente**.
- O contradomínio e a imagem da função f(x) são iguais.
- Na função $f(x) = log_2 x$ cada elemento do domínio possui um único correspondente associado no contradomínio.
- A curva está toda à direita do eixo das ordenadas, pois o domínio (D) da função é dado por $D = \mathbb{R}_+^*$. Desse modo, o eixo das ordenadas é uma **assíntota** da curva.
- A curva intercepta o eixo das abscissas no ponto (1,0).

## CONCEITOS E CONTEÚDOS

### GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

b) Represente o gráfico da função logarítmica $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = log_{\frac{1}{2}}x$
A base da função logarítmica é 1/2 e, na busca por alguns pontos de seu gráfico, é conveniente que os valores escolhidos para **x** no domínio sejam potências de 2.

| x | $g(x) = log_{\frac{1}{2}}x$ |
|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | $g\left(\frac{1}{4}\right) = log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} = 2$ |
| $\frac{1}{2}$ | $g\left(\frac{1}{2}\right) = log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = 1$ |
| 1 | $g(1) = log_{\frac{1}{2}}1 = 0$ |
| 2 | $g(2) = log_{\frac{1}{2}}2 = -1$ |




Algumas propriedades associadas à função logarítmica com base no intervalo aberto de 0 a 1:

- A função $g(x) = log_{\frac{1}{2}}x$ é uma **função decrescente**.
- O contradomínio e imagem da função g(x) são iguais.
- Na função $g(x) = log_{\frac{1}{2}}x$ cada elemento do domínio possui um único correspondente associado no contradomínio.
- A curva está toda à direita do eixo das ordenadas, pois o domínio (D) da função é dado por $D = \mathbb{R}_+^*$. Desse modo, o eixo das ordenadas é uma **assíntota** da curva.
- A curva intercepta o eixo das abscissas no ponto (1,0).

Em várias situações, nos deparamos com funções mais complexas envolvendo logaritmos. A seguir, vamos mostrar como esboçar/construir o gráfico dessas funções.

# MATEMÁTICA

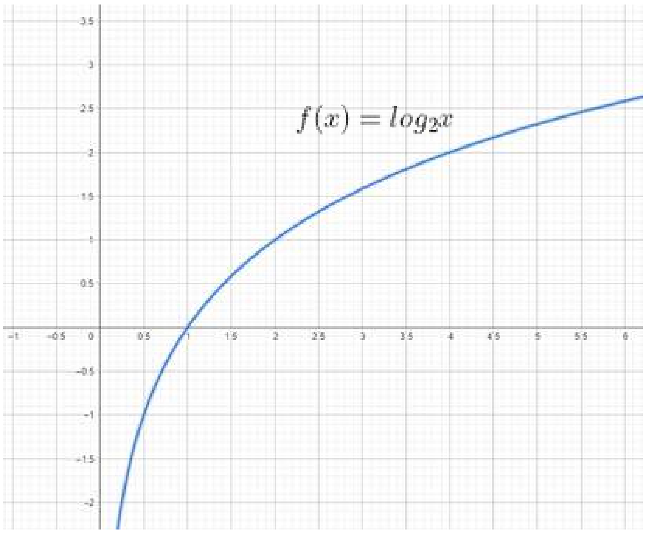
## CONCEITOS E CONTEÚDOS

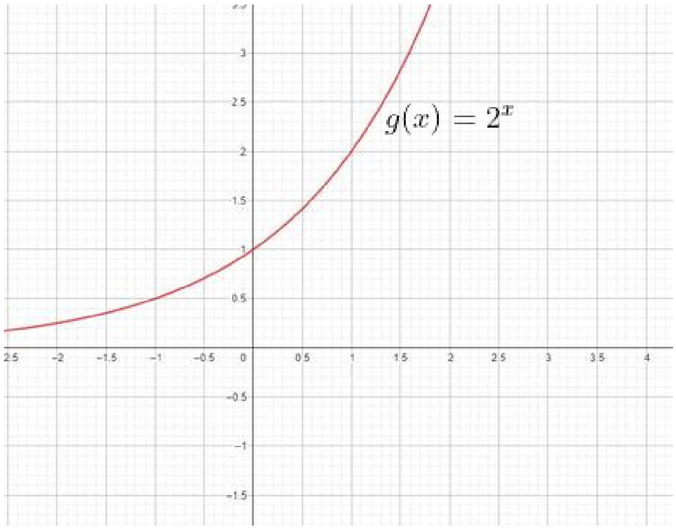
### RELAÇÃO ENTRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

A comparação entre as funções exponencial e logarítmica é muito comum, visto que essas funções são consideradas como função inversa uma da outra. Mas por quê?
Vamos observar a relação existente entre essas funções, a partir do esboço do gráfico de cada uma dela.

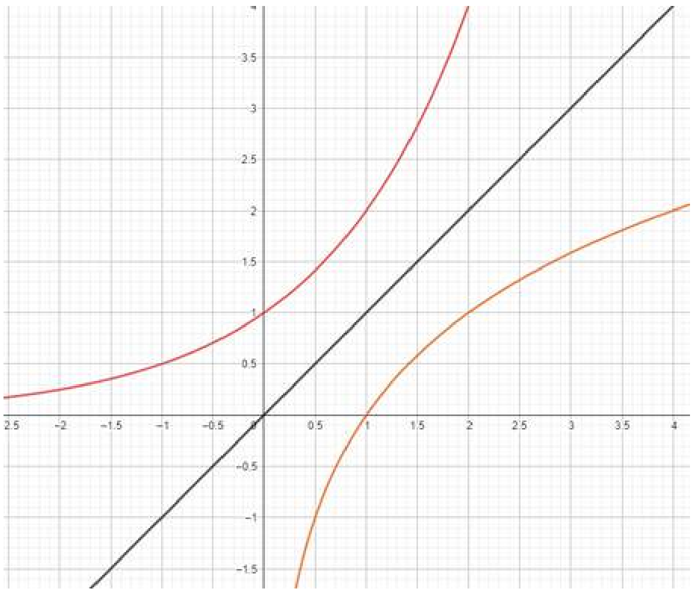
### EXEMPLO

Considere as funções $f(x) = log_2 x$ e $g(x) = 2^x$.
Inicialmente, vamos representar o gráfico de cada uma, separadamente. Por meio do *software* Geogebra, temos:




Ao construirmos as funções f(x) e g(x) no mesmo plano cartesiano, percebemos que, uma função é simétrica a outra. Neste caso, temos que as funções são inversas uma à outra. A reta r é a bissetriz dos quadrantes e indica essa simetria (de reflexão) entre as funções.



Lembre da relação

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

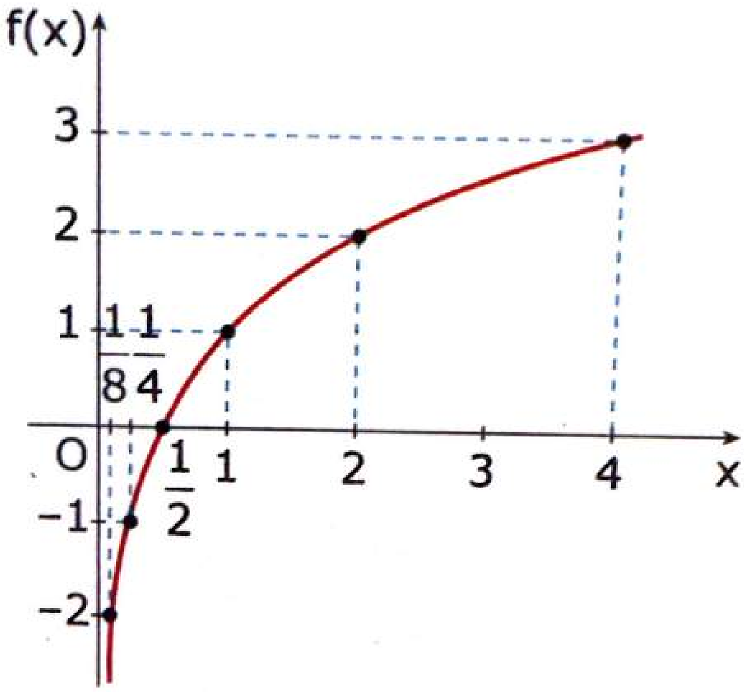
# EXERCICIOS RESOLVIDOS

**1**

**Esboce o gráfico da função** $f(x) = 1 + log_2 x$

A base do logaritmo é igual a 2. Os valores que escolheremos para x serão uma potência de 2.

| x | $f(x) = 1 + log_2 x$ |
|---|---|
| $\frac{1}{8}$ | $f(\frac{1}{8}) = 1 + log_2 \frac{1}{8} = -2$ |
| $\frac{1}{4}$ | $f(\frac{1}{4}) = 1 + log_2 \frac{1}{4} = -1$ |
| $\frac{1}{2}$ | $f(\frac{1}{2}) = 1 + log_2 \frac{1}{2} = 0$ |
| 1 | $f(1) = 1 + log_2 1 = 1$ |
| 2 | $f(2) = 1 + log_2 2 = 2$ |
| 4 | $f(4) = 1 + log_2 4 = 3$ |




Para esboçar gráfico de uma função da forma $f(x) = log_a x + k$ com a positivo e diferente de 1 e $k \epsilon \mathbb{R}$ , podemos primeiramente esboçar o gráfico da função $log_a x$ . Em seguida, devemos "deslocar" esse gráfico **k** unidades para cima (se k > 0), ou para baixo (se k< 0).

**2**

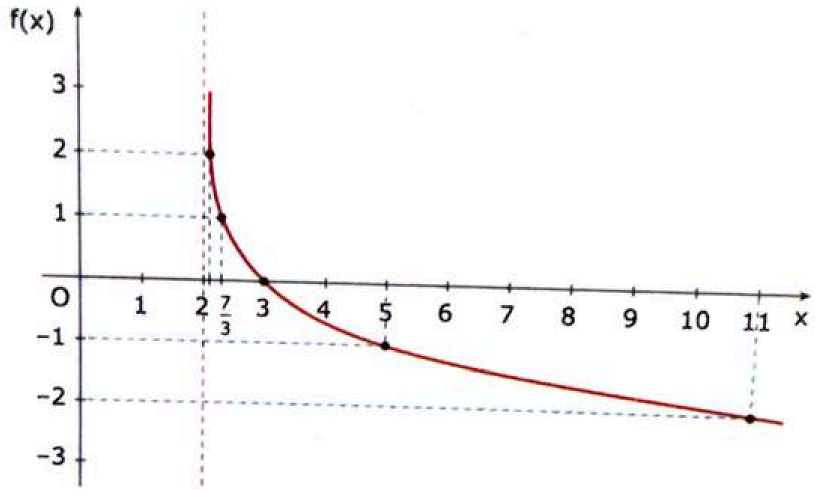
**Esboce o gráfico da função** $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$

De acordo com a condição de existência do logaritmo, temos que x - 2 > 0, logo, x > 2 . Dessa forma, vamos escolher valores convenientes para o domínio da nossa função. Observe a base a = 1/3.

| x | $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$ |
|---|---|
| 11 | $f(11) = log_{\frac{1}{3}}(9) = -2$ |
| 5 | $f(5) = log_{\frac{1}{3}}(3) = -1$ |
| 3 | $f(3) = log_{\frac{1}{3}}(1) = 0$ |

| x | $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$ |
|---|---|
| $\frac{7}{3}$ | $f(\frac{7}{3}) = log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}) = 1$ |
| $\frac{19}{9}$ | $f(\frac{19}{9}) = log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{9}) = 2$ |

## EXERCICIOS RESOLVIDOS




Para esboçar o gráfico de uma função da forma $f(x) = log_a(x+k)$, com **a** real positivo e diferente de 1, com $k \epsilon \mathbb{R}$, podemos esboçar primeiramente a função $f(x) = log_a x$ . Em seguida, devemos "deslocar" esse gráfico **k** unidades para a direita (se k < 0) ou para a esquerda (se k > 0). Além disso, devemos verificar as condições de existência do logaritmo, que implicam que o logaritmando (x + k) deve ser maior do que zero. Portanto, temos que x + k > 0, ou seja, x > - k.

**3**

**Determine o domínio da função** $f(x) = log_4(2x - 12)$

A condição de existência da função é que 2x - 12 seja maior que zero.

$$2x - 12 > 0$$
$$2x > 12$$
$$x > \frac{12}{2}$$
$$x > 6$$

Assim, temos que o domínio da função é $x \in \mathbb{R} \mid x > 6$

**4**

**Classifique em crescente ou decrescente cada uma das funções:**

a) $f(x) = log_9 x$ . A base do logaritmo é maior do que zero (9 > 0), logo a função é crescente

b) $g(x) = log_{0,4} x$ . A base do logaritmo é um número entre zero e um (0 < 0,4 < 1), logo a função é decrescente

c) $h(x) = log_{\frac{\pi}{3}} x$. A base do logaritmo maior que um ($\frac{\pi}{3}$ > 0), logo a função é crescente

## EXERCICIOS RESOLVIDOS

**5**

**A altura (em metros) de um arbusto em uma dada fase de seu desenvolvimento pode ser expressa pela função $h(t) = 0,5 + log_3(t+1)$ onde o tempo t é dado em anos.**

**a) Qual a altura, em metros, o arbusto atingirá após 8 anos?**

Substituindo t = 8 na função, temos:

$$h(8) = 0,5 + log_3(8+1)$$

$$h(8) = 0,5 + log_3(9)$$

Sendo $log_3(9) = 2$, temos que h(8) = 0,5 + 2 = 2,5m

Após 8 anos, o arbusto terá a altura de 2,5m.

**b) Quantos anos o arbusto demora para atingir a altura de 4,5m?**

Substituindo h(t) = 4,5 na função, temos:

$$4,5 = 0,5 + log_3(t+1)$$

Resolvendo a equação,

$$4,5 - 0,5 = log_3(t+1)$$

$$4 = log_3(t+1)$$

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Aplicando a definição de logaritmo, encontramos

$$3^4 = t+1$$

$$81 - 1 = t \rightarrow t = 80anos$$

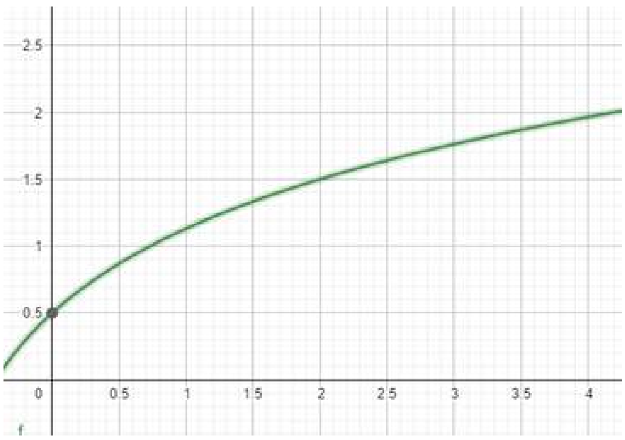
O arbusto levará 80 anos para atingir a altura de 4,5m.

**c)Esboce o gráfico que representa o crescimento do arbusto em função do tempo.**

| **t** | $h(t) = 0,5 + log_3(t+1)$ |
|---|---|
| 0 | $h(0) = 0,5 + log_3(0+1) = 0,5$ |
| 2 | $h(2) = 0,5 + log_3(2+1) = 1,5$ |
| 8 | $h(8) = 0,5 + log_3(8+1) = 2,5$ |

Pela definição, temos que t + 1 > 0, ou seja, t > - 1. Como estamos contando o tempo, em anos, consideramos números inteiros não nulos. A base é igual a 3, vamos determinar números para t, de tal forma que os valores de x sejam potência de 3.

Por se tratar do crescimento de um arbusto, não é possível considerar o tempo negativo.



**Atividade 1**

Determine o domínio das funções a seguir:

a) $f(x) = log_7(5x - 6)$

b) $f(x) = log_4(x^2 - 9)$

c) $g(x) = log(x^2 - 5x + 6)$

**Atividade 2**

Esboce os gráficos das funções:

a) $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

b) $f(x) = 2 + log_2 x$

c) $f(x) = log_2(x - 4) + 3$

d) $f(x) = log_3(x - 2) - 1$

**Atividade 3**

A lei seguinte representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo t, em anos, de existência da empresa:

$$f(t) = 400 + 50.log_4(t + 2)$$

Quantos funcionários a empresa possuía no ano da sua fundação?

**Atividade 4**

O valor de certo imposto pago por uma certa empresa, com V em milhares, em função do tempo ocorre segundo a função $V(t) = log_2(t + 4)$ , com t em meses.

a) Determine o valor do imposto que será pago daqui a 4 meses.

b) Determine o tempo no qual a empresa pagará R$ 6.000,00 de imposto.

**Atividade 5**

O volume de um reservatório em função do tempo é dado em litros pela função:

$$V(t) = 300 + 4.log_{\frac{1}{2}}(t - 1)$$

Considere que t ≥ 1, e t é dado em dias e V(t) é dado em litros. Sendo assim, após quantos dias o volume da piscina será de 284 litros?

A) 12 dias
B) 14 dias
C) 15 dias
D) 16 dias
E) 17 dias

**Atividade 6**

Sobre a função logarítmica, julgue as afirmativas a seguir:

I → O domínio da função logarítmica é o conjunto dos números reais.
II → A função logarítmica é crescente quando a sua base é maior que 1.
III → A função logarítmica é decrescente quando sua base é negativa.

A) Somente a I é verdadeira.
B) Somente a II é verdadeira.
C) Somente a III é verdadeira.
D) Somente a II e a III são verdadeiras.
E) Somente a I e a II são verdadeiras.

**Atividade 7** **(DESAFIO)**

A altitude (h) acima do nível do mar , em quilômetros, durante o voo de um avião é dada em função de pressão atmosférica p, em atm, $h(p) = 30.log_{10}(\frac{1}{p})$

Em determinado instante , a pressão atmosférica medida pelo altímetro desse avião era de 0,8atm . Nesse instante , a altitude do avião, em quilômetros, considerando $log_{10}2 = 0,3$ , era de:

A) 2
B) 3
C) 6
D) 8
E) 9

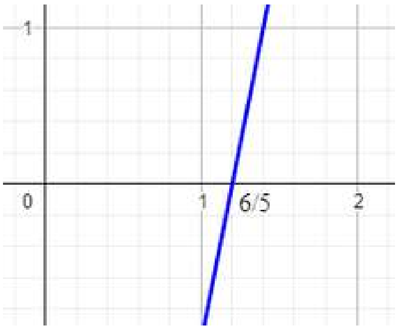
# RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

**Atividade 1**

Aplicando a definição, temos:

a)

$$5x - 6 > 0$$
$$5x > 6$$
$$x > \frac{6}{5}$$

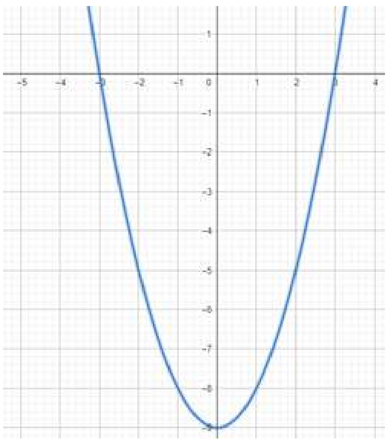



Os valores maiores que 6/5 representam a parte positiva da imagem . Logo, esses valores satisfazem a inequação

b) $x^2 - 9 > 0$

As raízes são x = 3 e x = - 3.

Analisando o comportamento do gráfico, temos que a f(x) > 0, para valores menores que -3 e maiores que 3. Logo, o domínio real é para os valores x < - 3 e x > 3.

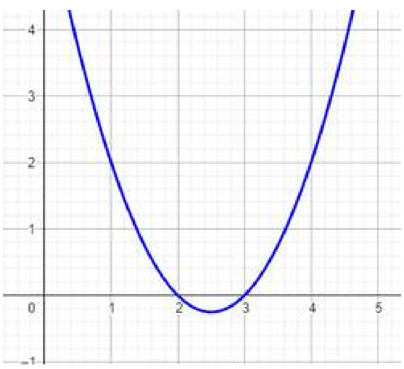


Os valores maiores que 3 e menores que -3 se associam com a imagem positiva (parte positiva de y).

c) $x^2 - 5x + 6 > 0$

As raízes são x = 2 e x = 3.

Analisando o comportamento do gráfico, temos que f(x) > 0, para valores menores que 2 e maiores que 3. Logo, o domínio real é para os valores de x < 2 e x > 3.




Os valores maiores que 3 e menores que 2 se associam com a imagem positiva (parte positiva de y).

# RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

## Atividade 2

Professor(a), para melhor visualização da construção e do comportamento do gráfico, sugerimos que as funções sejam construídas no *software* disponível em: https://www.geogebra.org/calculator

Discuta com os estudantes sobre o domínio das funções e como estabelecer os elementos para esse conjunto, observando a base do logaritmando.
Retome aos exercícios resolvidos da página 8 e 9 para a construção dos gráficos

## Atividade 3

**Considerando o ano de fundação t = 0**

$$f(0) = 400 + 50.\log_4(0+2)$$
$$f(0) = 400 + 50.\log_4 2$$
$$f(0) = 400 + 50\,.\frac{1}{2}$$
$$f(0) = 400 + 25$$
$$f(0) = 425$$

A empresa possuía 425 funcionários

## Atividade 4

a)
$$V(4) = \log_2(4+4)$$
$$V(4) = \log_2 8$$
$$V(4) = \log_2 2^3$$
$$V(4) = 3$$

Daqui 4 meses, o imposto a ser pago é de R$ 3.000,00

b)
$$6 = \log_2(t+4)$$
$$2^6 = t + 4$$
$$64 - 4 = t$$
$$60 = t$$

O valor de R$ 6.000,00 será pago daqui a 60 meses, ou seja, 5 anos.

# RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

## Atividade 5

$$300 + 4log_{\frac{1}{2}}(t-1) = 284$$
$$4log_{\frac{1}{2}}(t-1) = 284 - 300$$
$$4log_{\frac{1}{2}}(t-1) = -16$$
$$log_{\frac{1}{2}}(t-1) = \frac{-16}{4}$$
$$log_{\frac{1}{2}}(t-1) = -4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = t - 1$$
$$2^4 = t - 1$$
$$16 = t - 1$$
$$t = 16 + 1$$
$$t = 17$$

**Letra E**

## Atividade 6

I → Falsa, pois o domínio é formado pelos números reais positivos.
II → Verdadeira. Se a base é maior que 1, a função é crescente.
III → Falsa. A base não pode ser negativa. Para que a função seja decrescente, sua base precisa ser um número maior que 0 e menor que 1.

**Letra B**

## Atividade 7

$$h(0{,}8) = 30 \,.\, \log_{10}\left(\frac{1}{0{,}8}\right)$$
$$h(0{,}8) = 30 \,.\, \log_{10}\frac{10}{8}$$
$$h(0{,}8) = 30 \,.\, [\log_{10} 10 - \log_{10} 8]$$
$$h(0{,}8) = 30 \,.\, [1 - \log_{10} 2^3]$$
$$h(0{,}8) = 30 \,.\, [1 - 3.0{,}3]$$
$$h(0{,}8) = 30 \,.\, [1 - 0{,}9]$$
$$h(0{,}8) = 30 \,.\, [0{,}1]$$
$$h(0{,}8) = 3$$

**Letra B**

**GABARITO**

**ATIVIDADE 5: E**
**ATIVIDADE 6: B**
**ATIVIDADE 7: B**

# REFERÊNCIAS


Dante, Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

Fonseca, Fred [et al.]. Coleção Ensino Médio 1ª Série. Belo Horizonte: Bernoulli Sistema de Ensino, 2024

Lezzi, Gelson, [et al.]. Matemática: Volume único. 4 ed. - São Paulo: Atual, 2007

Paiva, Manoel. Matemática: Paiva/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática: ensino médio: volume 1. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.