Matemática

1ª Série | Ensino Médio

21ª Semana

Resolução de equações polinomiais do 2º grau completas

DESCRITORES DO PAEBES	**D087_M** Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EF09MA26/ES** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade. **(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário. **(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

CONTEXTUALIZAÇÃO

Ao longo da história da Matemática, vários povos deram importantes contribuições ao desenvolvimento dessa ciência: egípcios, babilônios, gregos, romanos, hindus, árabes e muitos outros.
Os babilônios, por exemplo, tiveram um importante papel na construção de campos da Matemática como a Álgebra e a Geometria. Os conhecimentos matemáticos dessa civilização que habitou a antiga Mesopotâmia foram extremamente valiosos para que ela se desenvolvesse e prosperasse na agricultura, arquitetura e astronomia.
Esses conhecimentos eram aplicados em várias situações, desde o cálculo dos dias, meses e anos até a construção de templos e palácios.
Entre os vários documentos que os babilônios deixaram, há um antigo texto de problemas matemáticos, escrito em argila que apresenta o seguinte problema:

Quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?

Passando da linguagem usual para a linguagem algébrica, a solução desse problema equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, que também pode ser escrita da seguinte forma: $x^2 - x - 870 = 0$

A equação acima, como você já estudou, é chamada de **equação do 2º grau.** Os babilônicos foram um dos primeiros povos a registrar e resolver situações que envolvessem equações desse tipo.

Neste material você vai resolver situações em que aparecem equações do 2º grau, desta vez, completa.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMANDO O QUE VIMOS

Denomina-se **equação do 2º grau** na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$, como por exemplo, $x^2 + 2x - 4 = 0$.

- **COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU**

Numa equação do 2º grau, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, os números reais a, b e c são chamados coeficientes da equação, com a sendo o coeficiente do termo x^2, b sendo o coeficiente do termo x e c sendo o coeficiente sem incógnita ou termo independente de x.

- **EQUAÇÕES DO 2º GRAU COMPLETAS E INCOMPLETAS**

Pela definição, devemos ter sempre $a \neq 0$. Entretanto, podemos ter $b = 0$ ou $c = 0$.

Assim:

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **completa**.

Quando $b \neq 0$ e $c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em c**.

Quando $b = 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em b**.

Quando $b = 0$ e $c = 0$, a equação do 2º grau se diz **incompleta em b e c**.

- **RAIZ DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU**

A raiz ou solução de uma equação é o valor que, atribuindo à incógnita, torna a sentença matemática verdadeira. Por exemplo, as raízes ou soluções da equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$ são 2 e 3, pois esses valores são os números que tornam a sentença verdadeira. Indicamos as raízes assim: $x' = 2$ e $x'' = 3$.

Pensando nos números reais, existem equações sem solução. Por exemplo: $x^2 = -4$ não tem solução ou raiz real, pois não existe número real que elevado ao quadrado resulte -4.

No material anterior, nós estudamos as equações do 2º grau incompletas. A partir de agora nós vamos estudar as equações do 2º grau completa.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FATORAÇÃO DO TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Podemos resolver equações do 2º grau completas. Para isso, precisamos recordar como fazer a fatoração de um trinômio quadrado perfeito.

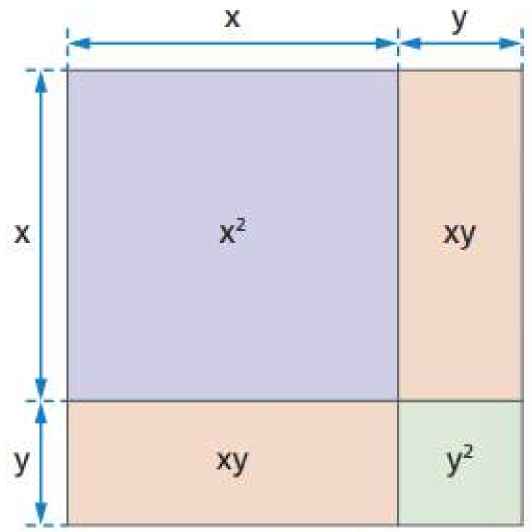


Figura (I)

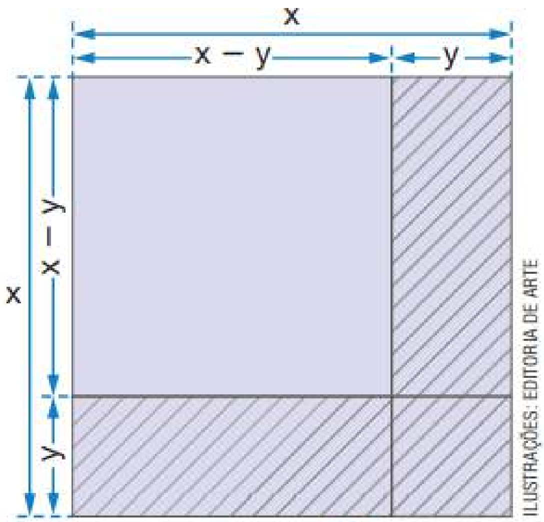


Figura (II)

A figura (1) representa um quadrado cujo lado mede (x+y) unidades de comprimento e cuja área pode ser escrita de duas maneiras:

$$x^2 + 2xy + y^2 \text{ ou } (x + y)^2$$

Na figura (2), a região não hachurada representa um quadrado cujo lado mede (x - y) unidades de comprimento e cuja área pode ser representada de duas maneiras:

$$x^2 - 2xy + y^2 \text{ ou } (x - y)^2$$

Então, podemos escrever as seguintes igualdades:

- $\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(x + y)(x + y) = (x + y)^2}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$
- $\underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(x - y)(x - y) = (x - y)^2}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$

Os polinômios $x^2 + 2xy + y^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$ são chamados trinômios quadrados perfeitos. Trinômios, porque possuem três termos; quadrados perfeitos, porque o primeiro representa o quadrado de (x + y), e o segundo representa o quadrado de (x - y).

Nem todos os trinômios são quadrados perfeitos. É importante reconhecer se um trinômio é ou não quadrado perfeito. Para isso, considere as seguintes situações:

1. Verificar se o trinômio $x^2 + 8xy + 16y^2$ é quadrado perfeito. Inicialmente, verificamos se pelo menos dois termos do trinômio são quadrados. Nesse caso, x^2 e $16y^2$ são quadrados, pois:

$$\underbrace{x^2}_{x^2} + 8xy + \underbrace{16y^2}_{(4y)^2}$$

Finalmente, multiplicamos por 2 o produto dessas duas raízes para verificar se o resultado será igual ao termo restante: 2 . x . 4y = 8xy. Como, nesse caso, o termo restante é justamente 8xy, dizemos que o trinômio dado é **quadrado perfeito**.

2. Verificar se o trinômio $x^2 - 6x + 9$ é quadrado perfeito. x^2 e 9 são termos quadrados.

$$\underbrace{x^2}_{x^2} - 6x + \underbrace{9}_{3^2}$$

$2 \cdot x \cdot 3 = 6x \longrightarrow$ 6x é o termo restante do trinômio

Logo, $x^2 - 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.

3. Verificar se o trinômio $16x^2 - 24x + 25$ é quadrado perfeito. $16x^2$ e 25 são termos quadrados.

$$\underbrace{16x^2}_{(4x)^2} - 24x + \underbrace{25}_{5^2}$$

$2 \cdot 4x \cdot 5 = 40x \longrightarrow$ 40x não corresponde ao termo restante do trinômio.

Logo, $16x^2 - 24x + 25$ não é um trinômio quadrado perfeito.

Os seguintes trinômios são quadrados perfeitos. Vamos fatorá-los:

- Fatorar $x^2 + 8xy + 16y^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{x^2}_{x^2} + 8xy + \underbrace{16y^2}_{(4y)^2} \\ 2 \cdot x \cdot 4y = 8xy \end{array}\right] \longrightarrow x^2 + 8xy + 16y^2 = (x + 4y)^2$$

- Fatorar $a^6 - 10a^3b + 25b^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{a^6}_{(a^3)^2} - 10a^3b + \underbrace{25b^2}_{(5b)^2} \\ 2 \cdot a^3 \cdot 5b = 10a^3b \end{array}\right] \longrightarrow a^6 - 10a^3b + 25b^2 = (a^3 - 5b)^2$$

Agora que recordamos o trinômio quadrado perfeito, podemos resolver uma equação do 2º grau por meio da fatoração, como veremos a seguir.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RESOLVENDO EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA POR MEIO DA FATORAÇÃO

Vimos que o polinômio, por exemplo, $x^2 - 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito e pode ser representado por $(x - 3)^2$.

Tomemos a equação
$4x^2 - 4x + 1 = 9$
Substituindo, temos
$(2x - 1)^2 = 9$
Temos:

$$(2x-1)^2 = 9 \begin{cases} 2x - 1 = -\sqrt{9} \text{ — } 2x - 1 = -3 \text{ — } 2x = -2 \text{ — } \boxed{x = -1} \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = \sqrt{9} \text{ — } 2x - 1 = 3 \text{ — } 2x = 4 \text{ — } \boxed{x = 2} \end{cases}$$

As soluções da equação $4x^2 - 4x + 1 = 9$ são -1 e 2, e podem ser representadas como $x' = -1$ e $x'' = 2$

Existe mais de um procedimento para determinar as raízes de uma equação do 2º grau completa. Veremos, a seguir, outro procedimento.

RESOLVENDO EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

Esse procedimento se baseia em completar os quadrados.
O método consiste em obter uma equação equivalente a qual o 1º termo seja um trinômio quadrado perfeito.

Como exemplo, temos a equação do 2º grau $x^2 - 6x - 16 = 0$.

- Isola-se o termo independente de x no 2º membro:

$x^2 - 6x - 16 = 0$
$x^2 - 6x = 16$

- x^2 é um dos quadrados perfeitos do trinômio a ser obtido.

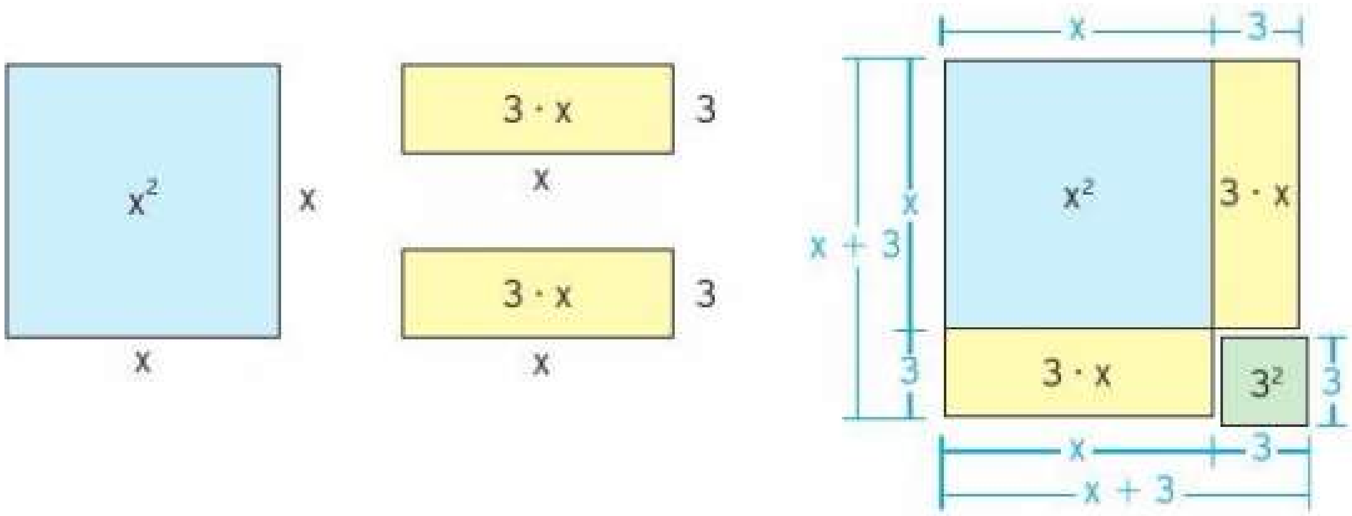
- O coeficiente de x é -6, que é igual a -2 . 3.

Então, o outro termo que é um quadrado perfeito é 3^2.

Acrescentamos 3^2 aos dois membros da equação.

Veja uma representação geométrica desse procedimento:

CONCEITOS E CONTEÚDOS



$(x - 3)^2 = 25$

- $x - 3 = -5$ —— $x = -2$
- ou
- $x - 3 = 5$ —— $x = 8$

Algebricamente

$$\underbrace{x^2 - 6x + 3^2}_{(x - 3)^2} = 16 + 3^2$$

$$(x - 3)^2 = 25$$

As soluções da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$ são -2 e 8 e podem ser representadas por
$x' = -2$ e $x'' = 8$.

As figuras serviram apenas para ilustrar, pois, como x é um número real, x pode assumir valores negativos. Note também que nesse procedimento o coeficiente de x^2 precisa ser igual a 1.

A FÓRMULA DE BHASKARA

No século XII, Bhaskara, um importante matemático da Índia, destacou-se por seus vários escritos sobre aritmética, álgebra e outros assuntos. Dentre esses escritos, encontra-se a fórmula de Bhaskara, que é uma generalização da resolução de equações de 2º grau com uma incógnita.

Acompanhe um procedimento para determinar a fórmula de Bhaskara no qual foi utilizado o método do completamento de quadrados. As áreas de quadrados e retângulos aparecem apenas como esquema auxiliar.

Nesse procedimento, é possível verificar que o procedimento de obtenção de um trinômio quadrado perfeito pode ser aplicado a qualquer equação do 2º grau com uma incógnita.

Considere a equação:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, com $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}$ representando um número real.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

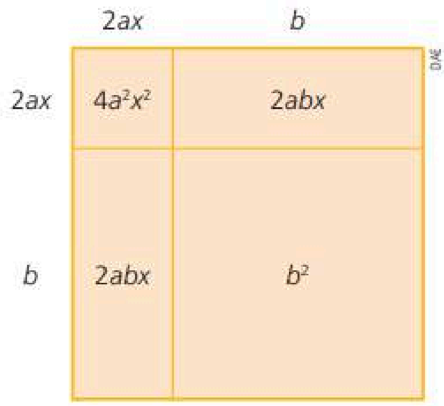
Nosso objetivo é obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação.

Vamos multiplicar os dois membros da equação por 4a.

$ax^2 + bx + c = 0$

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Observe a figura. O terceiro termo do trinômio deve ser b^2.



Vamos somar b^2 a ambos os membros da equação:

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$

Para que no primeiro membro da equação fique somente o trinômio quadrado perfeito, vamos subtrair $4ac$ de ambos os membros:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito, obtemos:

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

A expressão $b^2 - 4ac$ será representada pela letra grega Δ (delta).

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$ na equação acima, temos:

$(2ax + b)^2 = \Delta$

Supondo $\Delta > 0$ vem:

$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$ Subtraindo b de ambos os membros da equação:

$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta}$ e, finalmente, dividindo ambos os membros por $2a$ para encontrar x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nessa fórmula, precisamos extrair a raiz quadrada de Δ.

Se o valor de delta for um número negativo, $\sqrt{\Delta}$ não será um número real, e a equação não terá solução no conjunto $\mathbb{R}$.

Se $\Delta = 0$, $\sqrt{\Delta} = 0$, e $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ fica $x = \dfrac{-b}{2a}$ e a equação terá somente uma solução.

Se o valor de delta for um número positivo, aí a equação terá duas soluções reais.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RESOLVENDO EQUAÇÃO DO 2° GRAU COMPLETA POR MEIO DA FÓRMULA DE BHASKARA

Exemplo:

$x^2 + 3x - 10 = 0$

- Identificando os coeficientes:

a = 1
b= 3
c = - 10

- Calculamos o valor de Δ , substituindo os valores de a, b e c:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$$
$$\Delta = 9 + 40 = 49$$

- Agora aplicamos a fórmula para determinar os valores de x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

- Podemos, ainda, verificar:

$$(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 10 =$$
$$= 25 - 15 - 10 = 0 \text{ e}$$
$$2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$$

Logo, - 5 e 2 são as soluções, ou as raízes, da equação $x^2 + 3x - 10 = 0$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

DISCRIMINANTE DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

O valor de Δ (positivo, negativo ou nulo) é que determina quantas raízes reais a equação tem quando seus coeficientes são números reais.

Quando $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas.
Quando $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.
Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Vamos determinar o número de raízes reais distintas de equações em resolvê-las.

a) Equação: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas.

b) Equação: $12x^2 - 9x + 7 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 7 = 81 - 336 < 0$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais, ou seja, o número de raízes reais é zero.

c) Equação: $x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais, ou seja, uma única raiz real.

É bom saber:

No material anterior nós estudamos as equações do 2º grau incompletas e vimos como calcular as equações incompletas em b, incompletas em c e incompletas em b e c.
Todas as equações incompletas que resolvemos podem ser solucionadas pela fórmula que usamos para resolver a equação do 2º grau completa.
A seguir veremos exemplo de cada equação do 2º grau incompleta sendo resolvida por meio da fórmula.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

USANDO A FÓRMULA PARA RESOLVER TAMBÉM AS EQUAÇÕES DO 2º GRAU INCOMPLETAS

- **EQUAÇÃO DO 2º GRAU INCOMPLETA EM c**

$$9x^2 - 4x = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a = 9, b = -4, c = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.9.0 = 16 - 0 = 16$$

$$x = \frac{-(-4) \ \pm \sqrt{16}}{2.9} = \frac{4 \pm 4}{18}$$

$$x' = \frac{4+4}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$x'' = \frac{4-4}{18} = \frac{0}{18} = 0$$

- **EQUAÇÃO DO 2º GRAU INCOMPLETA EM b**

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a = 1, b = 0, c = -9$$

$$\Delta = 0^2 - 4.1.(-9) = 0 + 36 = 36$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2.1} = \frac{0 \pm 6}{2}$$

$$x' = \frac{0+6}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{0-6}{2} = -3$$

- **EQUAÇÃO DO 2º GRAU INCOMPLETA EM b E c**

$$-4x^2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a = -4, b = 0, c = 0$$

$$\Delta = 0^2 - 4.(-4).0 = 0 + 0 = 0$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{2.(-4)} = \frac{0 \pm 0}{-8} = \frac{0}{-8} = 0$$

Observe que na equação - $4x^2 = 0$, Δ = 0 e, por isso, temos apenas 1 raiz.

Vimos que, por meio da fórmula de Bhaskara, podemos resolver tanto as equações completas quanto as equações incompletas do 2º grau. No entanto, cabe a cada um escolher a melhor forma em cada situação.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e x′ e x″ as raízes reais dessa equação

Entre as raízes x′ e x″ e os coeficientes a, b e c da equação existem duas relações importantes, as quais veremos a seguir.

1ª relação:
Sendo x′ e x″ as raízes reais da equação, temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Adicionando membro a membro essas duas igualdades, obtemos a 1ª relação.

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{-b}{a}$$

Em toda equação do 2º grau, em que x‘ e x’ são raízes reais, temos x′ + x″ = $-\dfrac{b}{a}$

2ª relação:
Sendo x′ e x″ as raízes reais da equação, temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Multiplicando membro a membro essas duas igualdades, obtemos a 2ª relação.

$$x'.x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta}^2)}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, fazemos a substituição a seguir:

$$x'.x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a}.a} = \frac{c}{a}$$

Então, nas equações do 2º grau, em que x‘ e x’ são raízes reais, temos $x'.x'' = \dfrac{c}{a}$

Vamos, agora, usar essas duas relações importantes para resolver este problema.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A equação $3x^2 - 8x - 3 = 0$ apresenta duas raízes reais e diferentes. Sem resolver a equação, determine a soma e o produto dessas duas raízes.

Pela equação dada:

a = 3, b = - 8, c = - 3

De acordo com as relações, podemos escrever:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3} \qquad x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-3}{3} = -1$$

Logo, a soma das raízes da equação é $\frac{8}{3}$, e o produto dessas raízes é -1.

ESCREVENDO UMA EQUAÇÃO QUANDO CONHECEMOS AS RAÍZES

Podemos aplicar a relação entre as raízes e os coeficientes da equação do 2º grau para escrever a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$ quando são dados dois números reais (x' e x'') como raízes da equação. Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.
Como $a \neq 0$, vamos dividir todos os termos pelo coeficiente a:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (1)$$

Sendo x' e x'' as raízes reais da equação, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-b}{a} = x' + x'' \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x' + x'') \quad (2)$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = x' \cdot x'' \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) na equação (1): $x^2 - (x' + x'')x + x' . x'' = 0$
Se indicamos por S a soma das raízes (x' + x'' = S) e por P o produto dessas raízes (x'. x'' = P), escrevemos a equação na forma:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Dessa forma, obtemos uma equação do 2º grau na incógnita x quando são dadas as raízes x' e x''. Consideremos, então, o exemplo a seguir.

Determinar a equação do 2º grau na incógnita x, sabendo que as raízes dessa equação são os números reais $-3 + \sqrt{3}$ e $-3 - \sqrt{3}$.

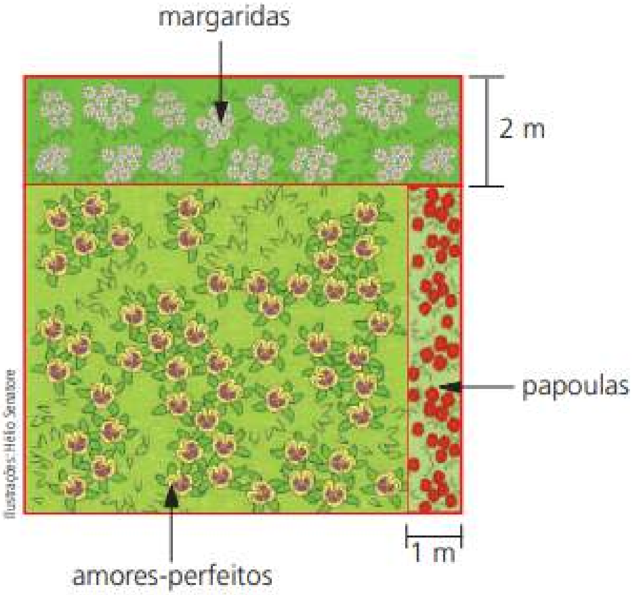
$$S = (-3 + \sqrt{3}) + (-3 - \sqrt{3}) = -3 + \cancel{\sqrt{3}} - 3 - \cancel{\sqrt{3}} = -6$$
$$P = (-3 + \sqrt{3}).(-3 - \sqrt{3}) = (-3)^2 - (\sqrt{3})^2) = 9 - 3 = 6$$
$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-6)x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 6 = 0$$

Logo, a equação procurada é $x^2 + 6x + 6 = 0$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

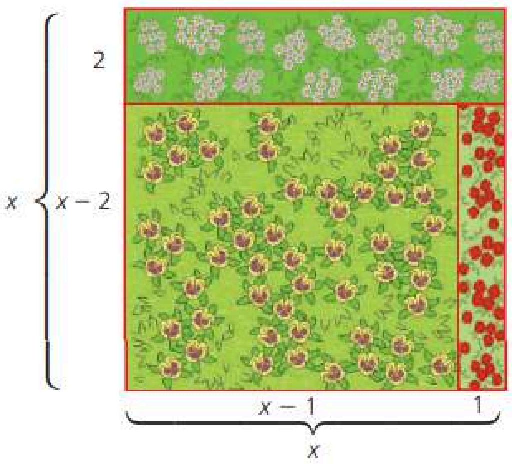
PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETA

Muitas situações e problemas podem ser resolvidos por meio de equações do 2º grau.
Acompanhe um exemplo:
Um jardim, com a forma de um quadrado, foi dividido em três canteiros.
Nesses canteiros serão plantadas margaridas, papoulas e amores-perfeitos, conforme a ilustração abaixo.



O canteiro de amores-perfeitos ocupa uma área de 42 m².
Qual é a medida do lado do jardim?

Resolução:
Representando a medida do lado do jardim por x, faremos um novo desenho:



A área do canteiro de amores-perfeitos é:

$A = (x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$

Igualando a área a 42, obtemos a equação do 2º grau:

$x^2 - 3x + 2 = 42$

Organizando seus termos:

$x^2 - 3x + 2 - 42 = 0$

$\mathbf{x^2 - 3x - 40 = 0}$

$a = 1$; $b = -3$ e $c = -40$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)$

$\Delta = 9 + 160 = 169$

$x = \dfrac{-(-3) \pm 13}{2}$

$x_1 = \dfrac{3 + 13}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

$x_2 = \dfrac{3 - 13}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5$

Como a medida do lado do jardim não pode ser negativa, consideraremos somente a solução x = 8.
Portanto, o lado do jardim mede 8 m.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1 RETOMANDO O PROBLEMA DO INÍCIO

Quanto mede o lado de uma região quadrada se a área dessa região menos a medida do lado é igual a 870?

Resolução:

Passando da linguagem usual para a linguagem algébrica, a solução desse problema equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, que também pode ser escrita da seguinte forma: $x^2 - x - 870 = 0$

- Identificando os coeficientes:

a = 1
b= - 1
c = - 870

- Calculamos o valor de Δ , substituindo os valores de a, b e c:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-870)$$
$$\Delta = 1 + 3480$$
$$\Delta = 3481$$

- Agora aplicamos a fórmula para determinar os valores de x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3481}}{2}$$
$$x_1 = \frac{1+59}{2} = \frac{60}{2} = 30$$
$$x_2 = \frac{1-59}{2} = \frac{-58}{2} = -29$$

Como a medida do lado de uma região quadrada não pode ser negativa, temos como resposta 30.

Confira:

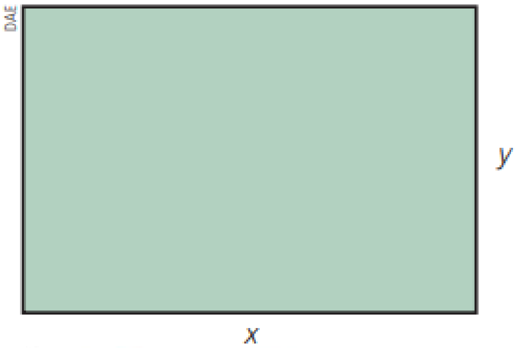
Lado do quadrado = 30
Área desse quadrado = 30^2 = 900
De acordo com o enunciado, a área da região desse quadrado menos a medida do seu lado deve ser 870. Veja:
900 (área) - 30 (lado) = 870, de fato.

Portanto, o lado mede 30.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2

O retângulo representado abaixo tem 26 cm de perímetro e 40 cm² de área. Quais são as medidas de seus lados?



Como o perímetro é de 26 cm, temos que:

$x + x + y + y = 26$, ou

$2x + 2y = 26$, ou ainda, dividindo ambos os membros da equação por 2:

- $x + y = 13$

A área é de 40 cm², isto é:

- $x \cdot y = 40$

Temos um sistema de equações nas incógnitas x e y. Vamos resolvê-lo:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

Quais são os dois números que somados resultam em 13 e multiplicados resultam em 40? Se você descobriu, confira com a solução do sistema de equações que resolvemos ao lado. Sempre que possível, exercite o raciocínio e utilize o cálculo mental para resolver problemas!

Se $x + y = 13$, então $y = 13 - x$.

Substituiremos y por $13 - x$ na segunda equação:

$x \cdot y = 40$

$x(13 - x) = 40$

$13x - x^2 = 40$

Organizando a equação:

$-x^2 + 13x - 40 = 0$

$a = -1$; $b = 13$ e $c = -40$

$\Delta = 13^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-40)$

$\Delta = 169 - 160 = 9$

$$x = \frac{-13 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-13 + 3}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-13 - 3}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8$$

Falta determinar y.

$y = 13 - x$

Para $x = 5 \longrightarrow y = 13 - 5 = 8$

Para $x = 8 \longrightarrow y = 13 - 8 = 5$

As soluções do sistema são $x = 5$ e $y = 8$, ou $x = 8$ e $y = 5$.

Em ambos os casos, os lados do retângulo medem 5 cm e 8 cm.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3

Vamos determinar o valor de k, com $k \neq 0$, na equação $kx^2 - 22x + 20 = 0$ para que a soma das raízes seja $\frac{11}{3}$.

Resolução:

Temos: $a = k$, $b = -22$ e $c = 20$

$$\underbrace{x_1 + x_2} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{-(-22)}{k} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{22}{k} = \frac{11}{3}$$

$$11k = 66$$

$$\frac{11k}{11} = \frac{66}{11}$$

Portanto, $k = 6$.

4

Um grupo de amigos organizou uma festa para comemorar o Natal. Como presente, todos escreveram e deram um belo cartão para cada participante da festa. Os cartões foram pendurados na árvore de Natal. Se na árvore havia 156 cartões, quantas pessoas participaram da festa?

A) 12 pessoas
B) 13 pessoas
C) 14 pessoas
D) 15 pessoas
E) 16 pessoas

Resolução:

Um grupo tinha 5 pessoas, cada pessoa deu 4 cartões: 1 para cada participante, menos para ele mesmo. Nesse caso, teremos 20 cartões pendurados na árvore: 5 . 4 = 20

O número de cartões na árvore é 156. Representando o número de pessoas por x, podemos escrever uma equação para representar o problema: x(x - 1) = 156

$$x(x-1) = 156$$

$$x^2 - x = 156$$

$$x^2 - x - 156 = 0$$

$$a = 1;\ b = -1 \text{ e } c = -156$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-156) = 625$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$x_1 = \frac{26}{2} = 13 \text{ e } x_2 = \frac{-24}{2} = -12$$

Como o número de pessoas não pode ser negativo, desconsideramos a solução x = - 12 e concluímos que 13 pessoas participaram da festa.

Atividade 1

As raízes da equação $-x^2 + 3x + 10 = 0$ são:
A) 2 e 5
B) 2 e - 5
C) -2 e 5
D) -2 e -5
E) 3 e 4

Atividade 2

A soma das raízes da equação $5x^2 + 6 = 31x$ é:
A) 5
B) 29/5
C) 25/4
D) 6
E) 31/5

Atividade 3

(UCS-RS) Se uma das raízes da equação $2x^2 - 3px + 40 = 0$ é 8, então o valor de p é:
A) 5
B) 13/3
C) 7
D) -5
E) -7

Atividade 4

(M122460A9) A idade de uma pessoa há 2 anos multiplicada pela sua idade daqui a 17 anos é igual a 66.
A idade dessa pessoa atualmente é
A) 2 anos.
B) 5 anos.
C) 10 anos.
D) 20 anos.
E) 66 anos.

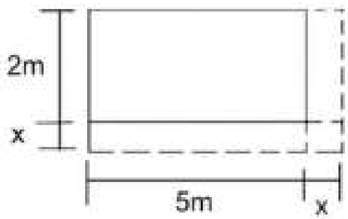
Atividade 5

(M11080SI) Carlos encontrou em uma revista o seguinte desafio: encontre um número positivo x tal que o produto entre $x - 3$ e $x + 6$ é igual a $- 8$. Carlos resolveu corretamente o desafio.
Com base no valor encontrado por Carlos, constata-se que

A) $0 < x < 2$
B) $1 < x < 3$
C) $2 < x < 4$
D) $3 < x < 5$
E) $4 < x < 6$

Atividade 6

(M120177A8) O pátio retangular representado na figura abaixo deverá ser ampliado, aumentando-se o comprimento e a largura na mesma quantidade, de forma a obter uma área 4 vezes maior.



Qual será a medida do comprimento desse pátio?
A) 8 m.
B) 9 m.
C) 14 m.
D) 20 m.
E) 40 m.

Atividade 7

(PAMA11154MS) O quadrado da idade de uma pessoa menos o quíntuplo dessa mesma idade é igual a 84. Qual é a idade dessa pessoa?
A) 12
B) 21
C) 42
D) 59
E) 84

Atividade 8

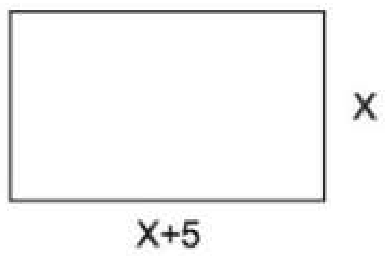
(M11027SI) Um fazendeiro cercou uma área retangular de 216 m² em que um dos lados desse retângulo é 6 m maior do que o outro.
Qual é a medida do maior lado desse retângulo?
A) 16 m.
B) 18 m
C) 24 m
D) 27 m
E) 36 m

Atividade 9

(M11028SI) O produto das idades de dois irmãos é 72. Sabe-se que o mais velho tem 6 anos a mais do que o mais novo. Qual é a idade do irmão mais velho?
A) 9 anos.
B) 12 anos.
C) 15 anos.
D) 18 anos;
E) 24 anos.

Atividade 10

(M11232SI) A área de um terreno retangular é de 150 m². A frente desse terreno tem 5 metros a mais que a lateral, como mostra a figura:



A medida x da lateral desse terreno é igual a:
A) 10 m
B) 15 m
C) 20 m
D) 25 m
E) 30 m

GABARITO

ATIVIDADE 1: C
ATIVIDADE 2: E
ATIVIDADE 3: C
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: B
ATIVIDADE 6: A
ATIVIDADE 7: A
ATIVIDADE 8: B
ATIVIDADE 9: B
ATIVIDADE 10: A

REFERÊNCIAS

Bianchini, Edwaldo. Matemática Bianchini / Edwaldo Bianchini. - 8. ed. - São Paulo: Moderna, 2015.

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Projeto Teláris: matemática : ensino fundamental 2 / Luiz Roberto Dante. - 2. ed, - São Paulo: Ática. 2015. - (Projeto Teláris : matemática).

Giovanni Júnior, José Ruy. A Conquista da Matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. - 1.ed. - São Paulo : FTD, 2022.

Logen, Adilson. Interação matemática: o tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau / Adilson Longen, Rodrigo Morozetti Blanco; coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas. -- 1. ed. - São Paulo: Editora do Brasil, 2020. -- (Interação)

Matemática : ciência e aplicações, volume 1: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Matemática, primeira série, ensino médio: autores. Ana Lúcia Bordeaux... [et al.], coordenação João Bosco Pitombeira; - Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. 376p. :il. - (Multicurso; Coleção completa; v.1)