GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

Matemática

1ª Série | Ensino Médio

22ª Semana

Funções polinomiais do 2º grau

DESCRITORES DO PAEBES	**D071_M** Analisar crescimento/ decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT502** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF09MA06** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

CONTEXTUALIZAÇÃO

Ponte de Arrábida, Porto, Portugal, 2017.

A Ponte de Arrábida, sobre o Rio Douro, liga as cidades de Porto e Vila Nova de Gaia, em Portugal. Ela contém um arco que se assemelha a um arco de parábola, que é uma curva resultado de um gráfico de uma função chamada função do 2º grau ou função quadrática.

Há situações que é preciso determinar a lei de formação da função quadrática usando a parábola construída. Esse procedimento é importante para a modelagem algébrica de situações que envolvem o uso dessa curva.

Considere, por exemplo, que essa ponte tem 270 metros do ponto A até o ponto B (usamos aqui medidas próximas às medidas reais da ponte), indicados na imagem acima. Considere, também que a altura dos dois pilares maiores é a mesma: 52 metros (do ponto A ao ponto D ou do ponto B ao ponto C).

De acordo com as medidas dos dois pilares maiores, como você pode determinar a função quadrática que modela aproximadamente o arco de parábola da situação?

Neste material nós vamos estudar a relação entre a parábola e a função quadrática.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMAMOS O QUE VIMOS

- **FUNÇÃO AFIM**

Uma função afim é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma f(x) = ax + b, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real. Os valores a e b são os coeficientes angular e linear, respectivamente.

- **FUNÇÃO LINEAR**

É um caso particular da função afim, em que o coeficiente linear é zero, ou seja, b = 0

- **FUNÇÃO CRESCENTE, FUNÇÃO DECRESCENTE E FUNÇÃO CONSTANTE**

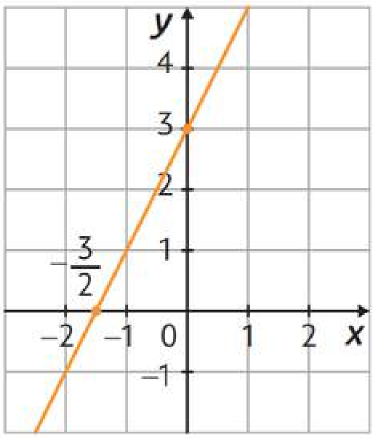
Uma função polinomial do 1º grau y = ax + b é crescente quando o coeficiente a é maior que zero (a>0).

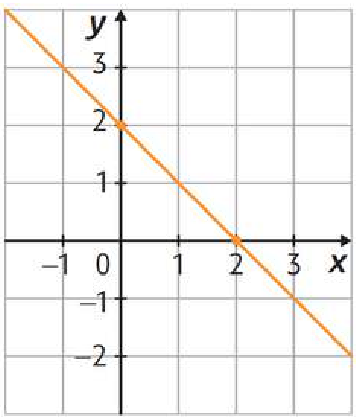
Uma função polinomial do 1º grau y = ax + b é decrescente quando o coeficiente a é menor que zero (a<0).

Existem funções que não são crescentes nem decrescentes, como por exemplo, a função definida por f(x) = 3. Funções como essas são chamadas de constantes, e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x. Note que numa função constante temos a = 0.

- **GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM**

O gráfico de uma função afim é sempre uma reta.



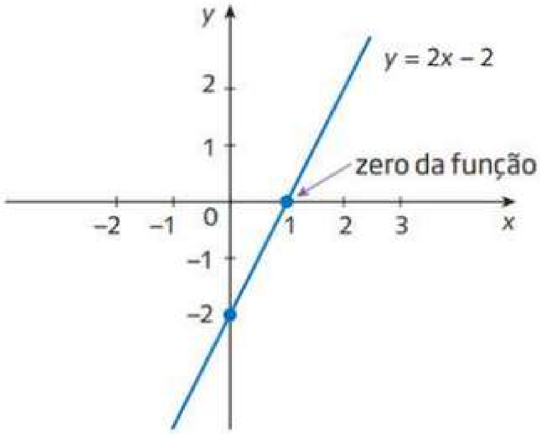


CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMAMOS O QUE VIMOS

- **ZERO DA FUNÇÃO AFIM**

Entre os possíveis valores que x pode assumir em uma função, chamamos de zero da função todo valor de x para o qual y = 0. Podemos determinar o zero de uma função afim por meio do gráfico ou por meio da lei da função.



- **EQUAÇÃO DO 2º GRAU**

Denomina-se **equação do 2º grau** na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$, como por exemplo, $x^2 + 2x - 4 = 0$.

- **RAIZ DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU**

A raiz ou solução de uma equação é o valor que, atribuindo à incógnita, torna a sentença matemática verdadeira. Por exemplo, as raízes ou soluções da equação $2x^2 - 10x + 12 = 0$ são 2 e 3, pois esses valores são os números que tornam a sentença verdadeira. Indicamos as raízes assim: $x' = 2$ e $x'' = 3$.

- **DISCRIMINANTE DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU**

O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

O valor de Δ (positivo, negativo ou nulo) é que determina quantas raízes reais a equação tem quando seus coeficientes são números reais.

Quando $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas.

Quando $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.

Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FUNÇÃO QUADRÁTICA

É toda função definida pela sentença matemática $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Assim, são exemplos de função quadráticas:

$y = x^2 + 2x - 8$

$y = x^2 - 9$

$y = 2x^2$

Observe que o maior expoente de uma função quadrática é 2.

Devemos estar atentos:

$y = \frac{1}{x^2}$ não é função quadrática, pois a variável aparece no denominador.

$y = 2^x$ não é função quadrática, pois aparece a variável no expoente.

$y = x^3 + 2x^2 + x + 1$ não é função quadrática, pois o maior expoente não é 2.

OS COEFICIENTES DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Assim como vimos nos estudos da equação do 2º grau, numa função quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, os números reais a, b e c são chamados coeficientes, com a sendo o coeficiente do termo x^2, b sendo o coeficiente do termo x e c sendo o coeficiente sem incógnita ou termo independente de x.

Pela definição, devemos ter sempre $a \neq 0$. Entretanto, podemos ter $b = 0$ ou $c = 0$.

Assim:

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a função do 2º grau se diz **completa**.

Quando $b \neq 0$ e $c = 0$, a função do 2º grau se diz **incompleta em c**.

Quando $b = 0$ e $c \neq 0$, a função do 2º grau se diz **incompleta em b**.

Quando $b = 0$ e $c = 0$, a função do 2º grau se diz **incompleta em b e c**.

Neste material vamos focar apenas nas funções incompletas em b e c, do tipo $y = ax^2$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O gráfico de uma função quadrática é sempre uma curva chamada parábola.

Podemos traçar o gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano.

Atribuímos valores a x e obtemos os correspondentes valores de y.
Uma sugestão é atribuir números naturais do 2 ao -2, mas você pode escolher outros valores. Vamos, por exemplo, atribuir números naturais de -3 a 3:

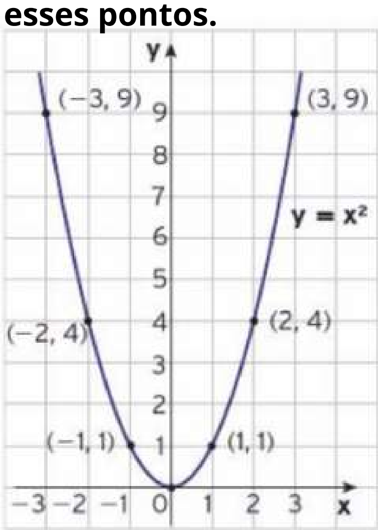
Exemplo 1: $\mathbf{y = x^2}$

Para x = -3, temos y = $(-3)^2 = 9$
Para x = -2, temos y = $(-2)^2 = 4$
Para x = -1, temos y = $(-1)^2 = 1$
Para x = 0, temos y = $0^2 = 0$
Para x = 1, temos y = $1^2 = 1$
Para x = 2, temos y = $2^2 = 4$
Para x = 3, temos y = $3^2 = 9$

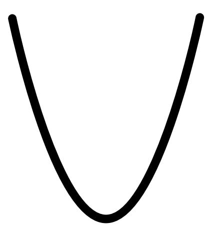
Organizamos os dados obtidos em um quadro com os pares ordenados.

x	x^2	$y = x^2$	(x, y)
−3	$(-3)^2$	9	(−3, 9)
−2	$(-2)^2$	4	(−2, 4)
−1	$(-1)^2$	1	(−1, 1)
0	0^2	0	(0, 0)
1	1^2	1	(1, 1)
2	2^2	4	(2, 4)
3	3^2	9	(3, 9)

Localizamos esses pontos no plano cartesiano e tracemos uma linha passando por esses pontos.



Esta parábola tem concavidade voltada para cima.



CONCEITOS E CONTEÚDOS

DA TABELA PARA A LEI DE FORMAÇÃO DA FUNÇÃO

Vimos como obter valores da função a partir da sua lei de formação. Agora faremos o contrário: a partir de uma tabela com valores de uma função, escreveremos sua lei de formação. Acompanhe.

Uma escola está organizando um torneio de xadrez e deseja analisar o desempenho de seus alunos em diferentes partidas. Eles registraram a pontuação de um aluno em relação ao número de partidas jogadas.
A tabela a seguir mostra a pontuação y do aluno em função do número de partidas x jogadas.

Número de partidas (x)	Pontuação (y)
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50

Com base na tabela acima, conseguimos investigar relações entre os números nela expressos para identificar padrões e criar conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização.

Para determinar a relação entre x e y, observamos os dados da tabela e notamos que a pontuação y aumenta de maneira não linear conforme o número de partidas x aumenta.

Ao analisar os dados, podemos perceber que a relação entre x e y parece seguir um padrão quadrático, pois as diferenças entre os valores de y aumentam de maneira constante.

Suponha uma função do tipo $y = ax^2$. Para determinar o valor de a, usaremos os pontos dados na tabela.

Substituindo o ponto (1, 2) na função $y = ax^2$:

$$2 = a(1)^2 \implies a = 2$$

Vamos verificar se a função $y = 2x^2$ se ajusta aos outros pontos da tabela:

Para $x = 2$: $y = 2.(2)^2 = 8$ (correto)
Para $x = 3$: $y = 2.(3)^2 = 18$ (correto)
Para $x = 4$: $y = 2.(4)^2 = 32$ (correto)
Para $x = 5$: $y = 2.(5)^2 = 50$ (correto)

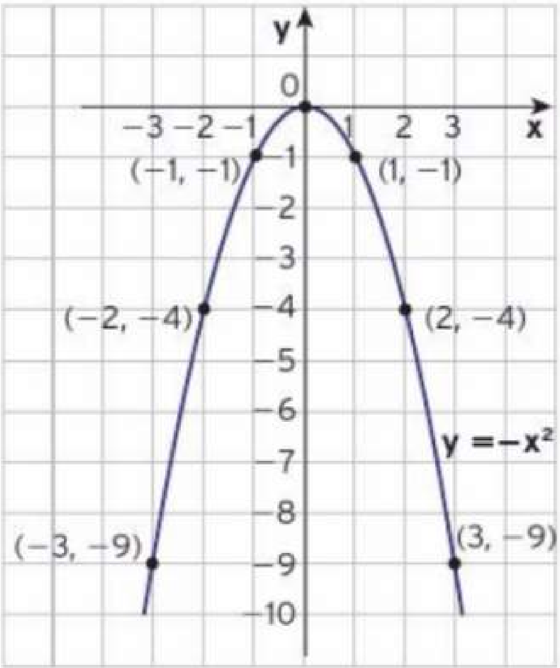
Portanto, a função que relaciona x e y é $y = 2x^2$, que é uma função polinomial do 2º grau do tipo $y = ax^2$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

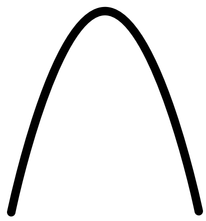
Exemplo 2: **$y = -x^2$**

Para $x = -3$, temos $y = -(-3)^2 = -9$
Para $x = -2$, temos $y = -(-2)^2 = -4$
Para $x = -1$, temos $y = -(-1)^2 = -1$
Para $x = 0$, temos $y = -0^2 = 0$
Para $x = 1$, temos $y = -1^2 = -1$
Para $x = 2$, temos $y = -2^2 = -4$
Para $x = 3$, temos $y = -3^2 = -9$

x	$-x^2$	$y = -x^2$	(x, y)
-3	$-(-3)^2$	-9	$(-3, -9)$
-2	$-(-2)^2$	-4	$(-2, -4)$
-1	$-(-1)^2$	-1	$(-1, -1)$
0	-0^2	0	$(0, 0)$
1	-1^2	-1	$(1, -1)$
2	-2^2	-4	$(2, -4)$
3	-3^2	-9	$(3, -9)$



Esta parábola tem concavidade voltada para baixo.



CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

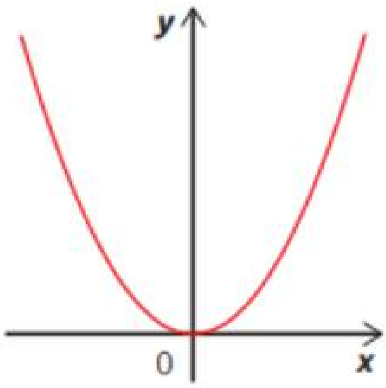
Note que no exemplo 1, temos $y = x^2$ e $a = 1$, ou seja, $a > 0$ (positivo).
No exemplo 2, temos $y = -x^2$ e $a = -1$, ou seja, $a < 0$ (negativo).

Podemos determinar a concavidade da parábola, sem traçar o gráfico, apenas observando o valor de a. Exemplos:

$y = 4x^2$, $a > 0$, temos uma função cujo gráfico é uma parábola com concavidade para cima;
$y = -2x^2$, $a < 0$, temos uma função cujo gráfico é uma parábola com concavidade para baixo;

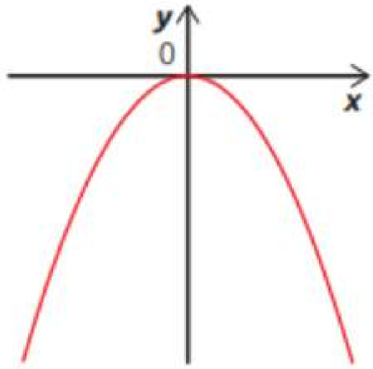
CONCEITOS E CONTEÚDOS

Dessa forma, sabemos a concavidade da parábola, que é gráfico da função quadrática, observando o coeficiente a.



$a > 0$

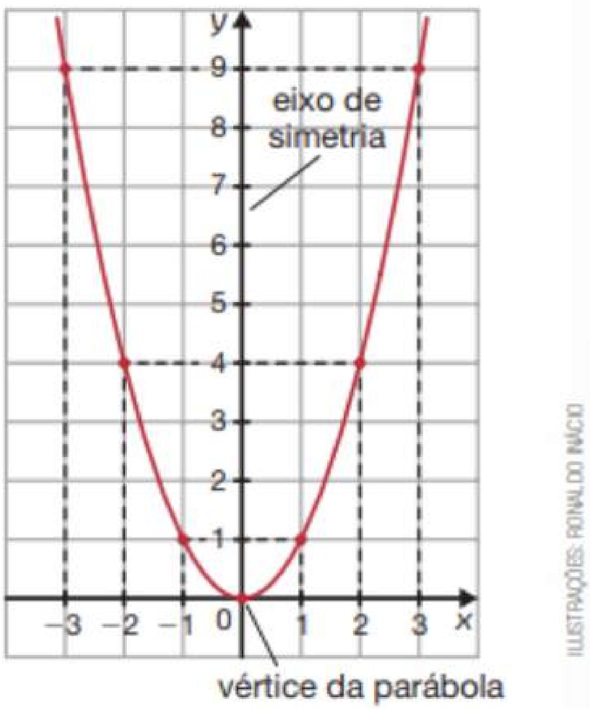
concavidade para cima



$a < 0$

concavidade para baixo

EIXO DE SIMETRIA E VÉRTICE DA PARÁBOLA



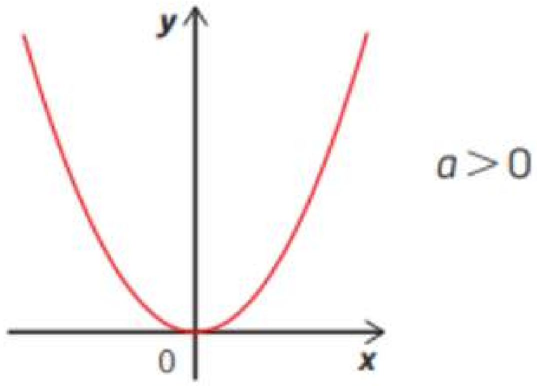
Toda parábola possui um **eixo de simetria**, que a intercepta em um único ponto, denominado **vértice da parábola**.

No caso da função $y = x^2$, seu eixo de simetria coincide com o eixo y e seu vértice possui coordenadas (0,0).

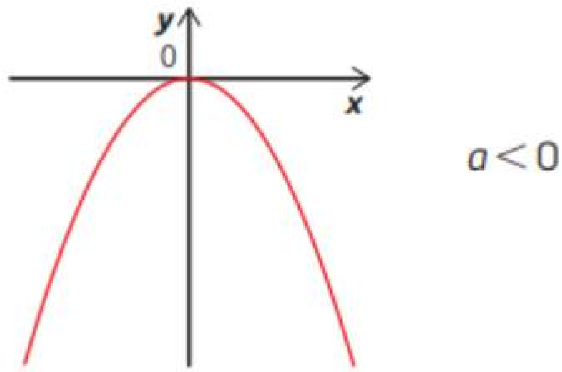
CONCEITOS E CONTEÚDOS

PONTO DE MÍNIMO E PONTO DE MÁXIMO

Observe o gráfico a seguir:



Percorrendo o gráfico da esquerda para a direita, notamos que os valores de y vão diminuindo até atingir o vértice. Depois, esses valores vão aumentando. Nesse caso, dizemos que o vértice é o **ponto mínimo** da função. Note que existe um menor valor para y, que corresponde ao y_V.



Percorrendo o gráfico da esquerda para a direita, notamos que os valores de y vão aumentando até atingir o vértice. Depois, esses valores vão diminuindo. Nesse caso, dizemos que o vértice é o **ponto máximo** da função. Note que existe um maior valor para y, que corresponde ao y_V.

De modo geral:

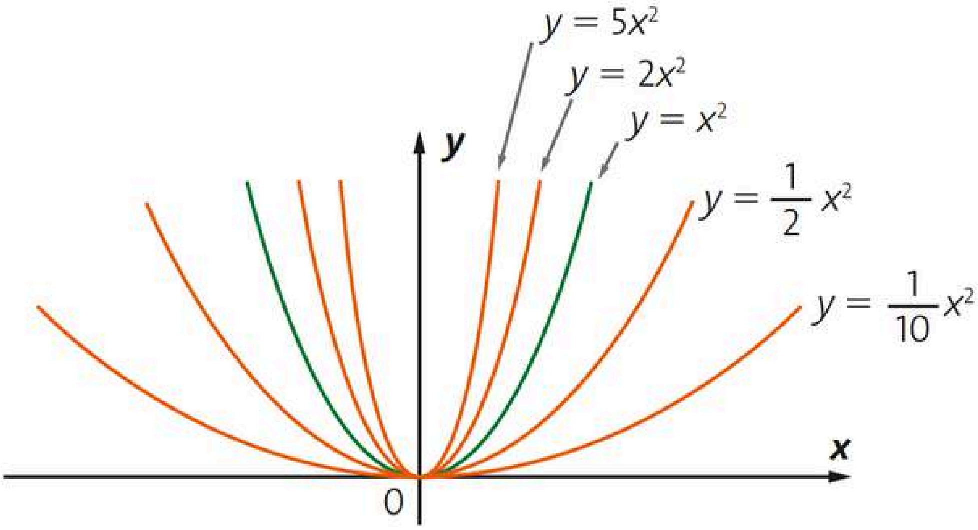
- Quando $a > 0$, a função quadrática tem valor mínimo e o vértice é o ponto de mínimo.
- Quando $a < 0$, a função quadrática tem um valor máximo e o vértice é o ponto de máximo.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

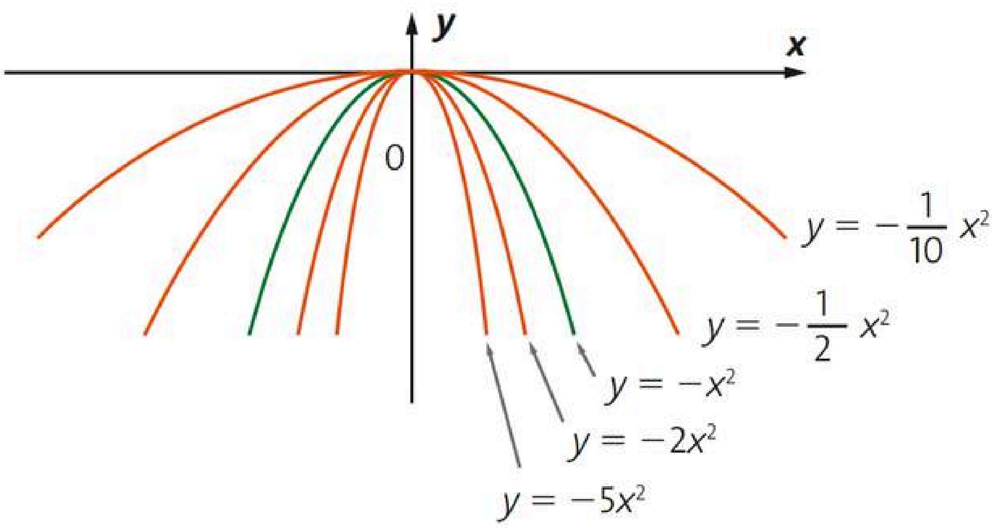
VALOR ABSOLUTO DE a

Examine os gráficos da função definida por y = ax², para $a = \frac{1}{10}$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = 2$ e $a = 5$, e para $a = -5$, $a = -2$, $a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$ e $a = -\frac{1}{10}$.

$a > 0$



$a < 0$



Note que:
Quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola.
Quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2

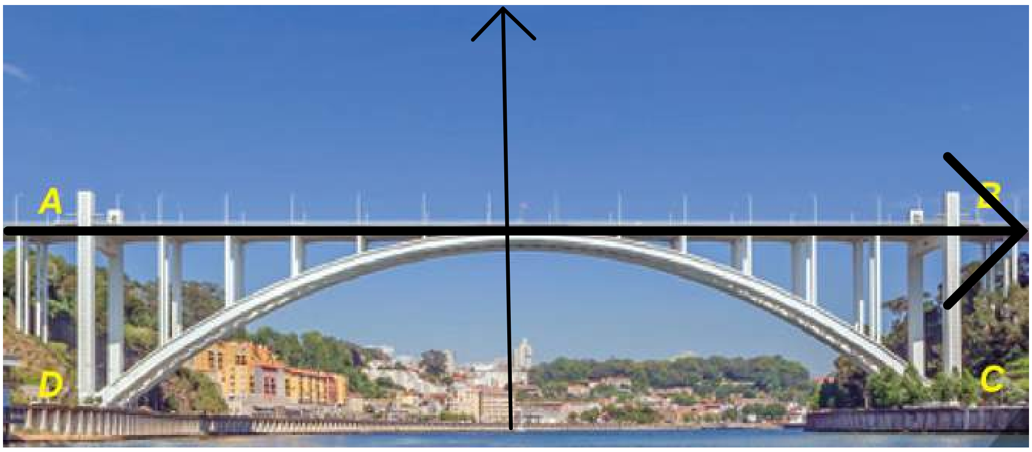
Ponte de Arrábida, Porto, Portugal, 2017.

Considere que a ponte de Arrábida, em Porto, Portugal, tem 270 metros do ponto A até o ponto B, indicados na imagem acima. Considere, também que a altura dos dois pilares maiores é a mesma: 52 metros (do ponto A ao ponto D ou do ponto B ao ponto C).

De acordo com as medidas dos dois pilares maiores, qual é a função quadrática que modela aproximadamente o arco de parábola dessa situação?

Resolução:

Uma forma de obter o comprimento dos pilares é pela determinação da função quadrática da parábola. Considere o plano cartesiano representado na fotografia.



Conforme informações dadas, nessas condições temos as coordenadas dos pontos C e D pertencentes à parábola da fotografia: D(-135, -52) e C(135, -52). Além disso, como a parábola passa pela origem do sistema cartesiano desenhado, a função quadrática tem a lei de formação como $y = ax^2$. Para calcular o valor de a, basta considerar o ponto C, ou seja:

$$y = ax^2 \Rightarrow -52 = a.(135)^2 \Rightarrow -52 = 18225a \Rightarrow a \cong -0,00285$$

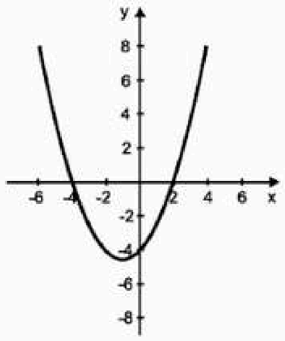
Portanto, a função quadrática que modela aproximadamente o arco de parábola da situação é $y = -0,00285 \cdot x^2$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

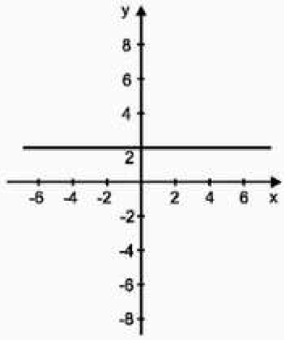
Atividade 1

(M100071CE) O gráfico que melhor representa uma função polinomial do 2º grau definida de IR em IR é

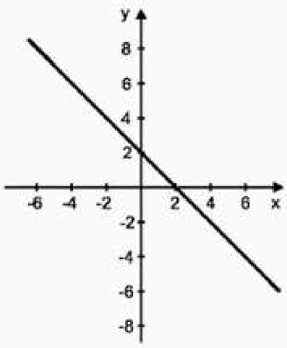
A)



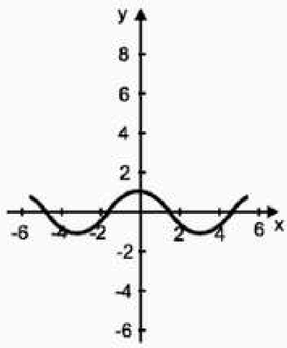
B)



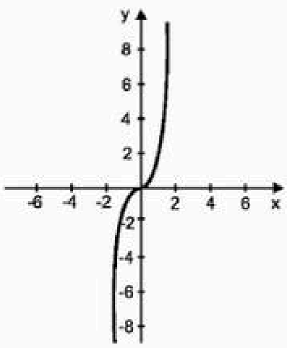
C)



D)



E)



Atividade 2

Uma equação do 2º grau é considerada incompleta quando

A) possui uma única solução

B) os coeficientes b ou c são iguais a zero

C) não possui soluções reais

D) possui coeficientes negativos

E) possui seu gráfico com concavidade para baixo

Atividade 3

Sobre o discriminante de uma função quadrática, podemos dizer que uma função possui duas raízes iguais quando

A) $\Delta = 0$

B) $\Delta < 0$

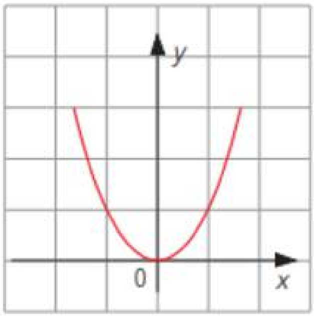
C) $\Delta > 0$

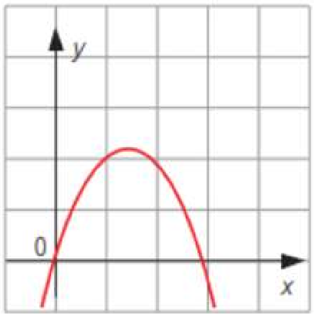
D) $\Delta = 1$

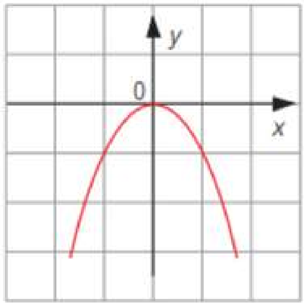
ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

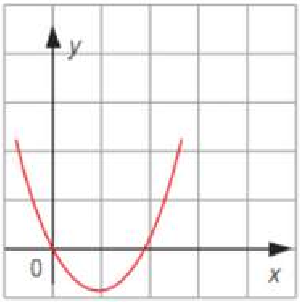
Atividade 4

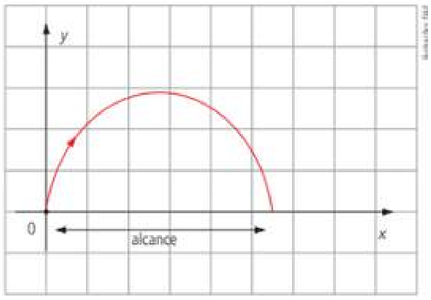
(SARESP) O gráfico que melhor representa a função definida por $y = -x^2$ é:

A)


B)


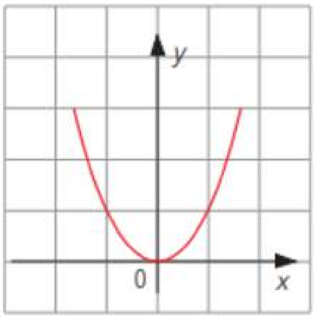
C)


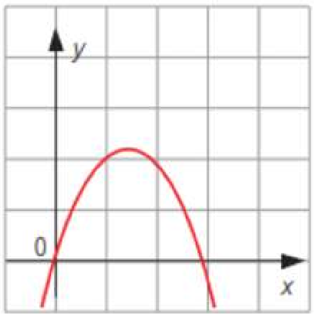
D)


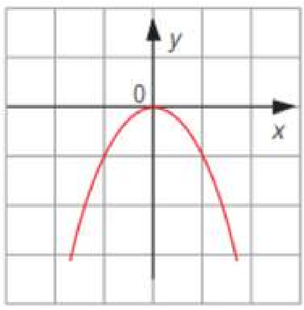
E)


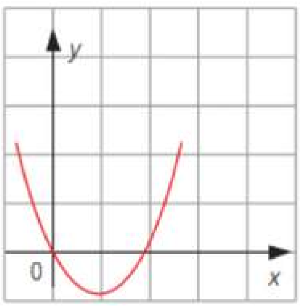
Atividade 5

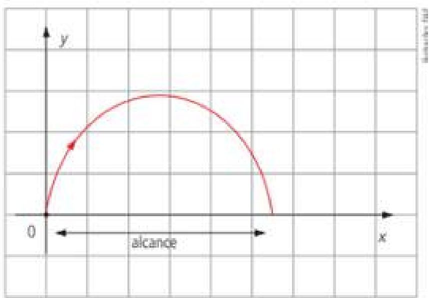
O gráfico que melhor representa a função definida por $y = x^2$ é:

A)


B)


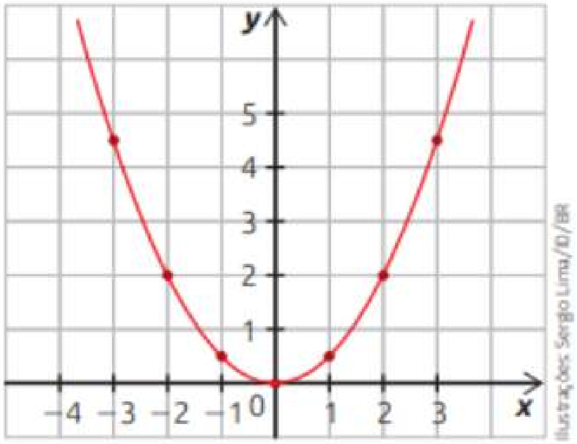
C)


D)


E)


Atividade 6

O gráfico abaixo representa uma função do 2º grau definida de IR em IR.



A representação algébrica dessa função é

A) $y = \dfrac{x^2}{2}$

B) $y = x^2$

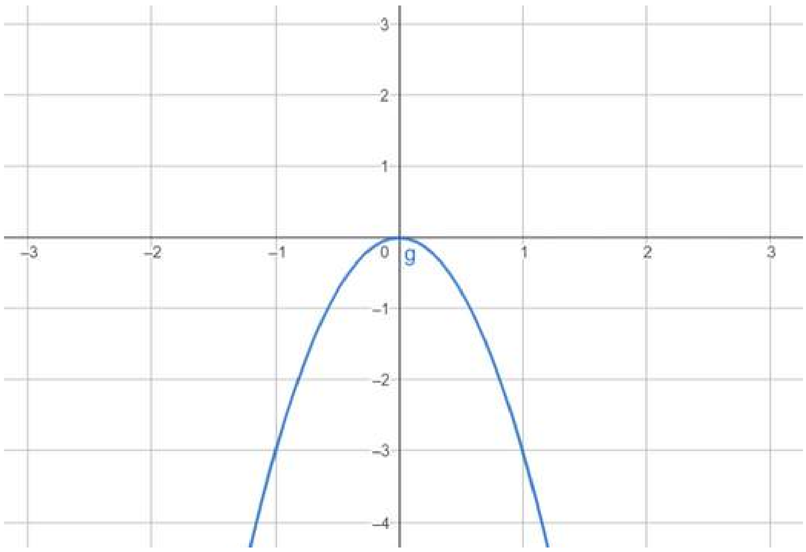
C) $y = 2x^2$

D) $y = x^2 + 2$

E) $y = 2x^2 + 2$

Atividade 7

O gráfico abaixo representa uma função quadrática. A representação algébrica dessa função é



A) $y = 2x^2$

B) $y = 3x^2$

C) $y = -2x^2$

D) $y = -3x^2$

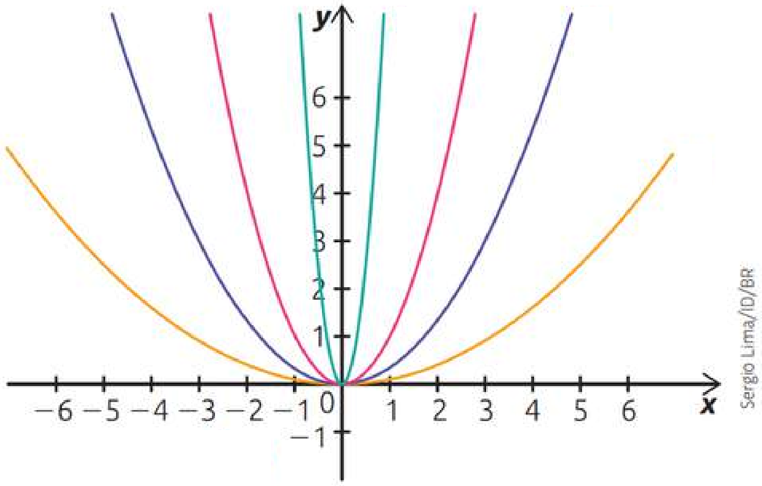
E) $y = -2x^2 + 1$

Atividade 8

Observe as funções quadráticas a seguir.

- $f(x) = 10x^2$
- $h(x) = x^2$
- $g(x) = \frac{1}{3}x^2$
- $p(x) = \frac{1}{10}x^2$

Abaixo está a representação gráfica dessas funções.



As funções que resultam em uma parábola de maior e menor abertura, respectivamente, nessa representação gráfica é

A) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$ e $f(x) = 10x^2$

B) $h(x) = x^2$ e $p(x) = \frac{1}{10}x^2$

C) $p(x) = \frac{1}{10}x^2$ e $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

D) $f(x) = 10x^2$ e $p(x) = \frac{1}{10}x^2$

E) $p(x) = \frac{1}{10}x^2$ e $f(x) = 10x^2$

Atividade 9

(M1D17I0038) Um objeto é lançado de uma altura de 4 500 metros. A distância d, por ele percorrida, é dada pela fórmula $d = 5t^2$, em que t é o tempo gasto, em segundos.
Após o lançamento, em quantos segundos o objeto tocará o solo?

A) 9
B) 15
C) 30
D) 45

Atividade 10

(M120253C2) Uma tela de pintura tem a forma de um retângulo cujo comprimento é o dobro da altura. A medida da área dessa tela é igual a 3 200 cm^3 e foi calculada pela expressão $A = 2x^2$ em que x representa a medida da altura dessa tela, em centímetros.
Qual é a medida do comprimento dessa tela?

A) 20 cm
B) 40 cm
C) 80 cm
D) 160 cm
E) 240 cm

GABARITO

ATIVIDADE 1: A
ATIVIDADE 2: B
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: C
ATIVIDADE 5: A
ATIVIDADE 6: A
ATIVIDADE 7: D
ATIVIDADE 8: E
ATIVIDADE 9: C
ATIVIDADE 10: C

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática : ciência e aplicações, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.