GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

Matemática

1.ª Série | Ensino Médio

24ª Semana

FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU

MONITORAMENTO	PEDAGOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO SAEB	**D133_M** Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função do 2º grau.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT503** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF07MA26** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.			

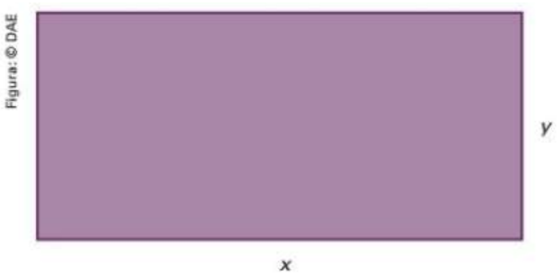
MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

Esse é um problema interessante!

Considerando que o perímetro do retângulo a ser construído corresponda aos 200 metros de corda, vamos determinar as medidas dos lados desse quadrilátero de tal forma que a área seja a máxima possível. Como não sabemos quais são as medidas dos lados desse retângulo, vamos representá-las pelas letras x e y.

Assim, temos:



Perímetro igual a 200 m

$2x + 2y = 200$

$x + y = 100$

$y = 100 - x$

Como queremos obter o retângulo de maior área possível, vamos expressar a área S desse retângulo:

$S = x \cdot y \Rightarrow S = x \cdot (100 - x) \Rightarrow S = 100x - x^2$

Observe que, nesta última expressão, temos a área S em função da medida x de um dos lados desse retângulo, isto é: $S = f(x) = -x^2 + 100x$

Essa é uma função quadrática. O estudo desse tipo de função, de suas características, de seu gráfico, permitirá provar que o retângulo de maior área possível, conforme condições dadas, é um quadrado de lado medindo 50 metros.

Neste material retornaremos a essa situação e ampliaremos o estudo de máximos e mínimos. Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

RETOMAMOS O QUE VIMOS

No material anterior estudamos sobre o vértice de uma parábola, que será um ponto de máximo nas funções quadráticas decrescentes ou um ponto de mínimo se as funções quadráticas forem crescentes.

Vimos que o vértice de uma parábola dada por y = ax² + bx + c ($a \neq 0$) é determinado por:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

e que $\Delta = b^2 - 4ac$

Neste material nós vamos continuar estudando os pontos de máximos e os pontos de mínimos e deste vez, envolvendo superfícies e matemática financeira.

MÁXIMOS OU MINIMOS

Máximos e mínimos são conceitos fundamentais em matemática e em diversas áreas da ciência e da economia.

Eles representam os pontos mais altos (máximos) e mais baixos (mínimos) de uma função ou de um conjunto de dados, desempenhando um papel crucial na análise e na otimização de problemas.

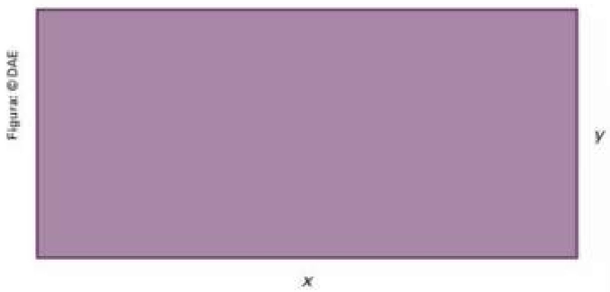
Identificar e compreender esses pontos extremos não apenas ajuda a entender o comportamento de sistemas complexos, mas também permite tomar decisões informadas sobre como melhorar eficiência, maximizar lucros ou minimizar custos.

A seguir, estudaremos algumas aplicações de máximos e mínimos.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

MÁXIMOS OU MÍNIMOS – EXEMPLO 1 (SUPERFÍCIE)

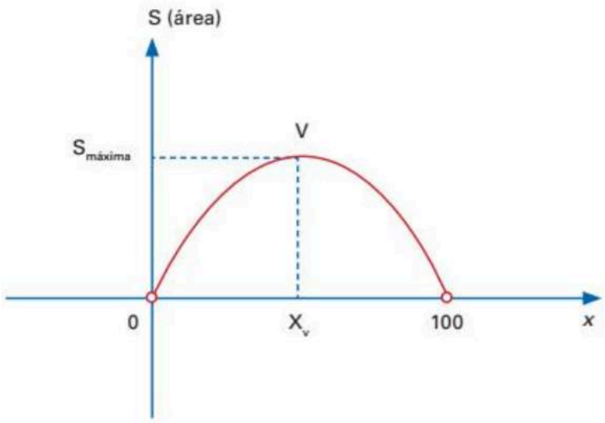
Vamos retornar ao problema apresentado no início do material. Queríamos determinar as medidas do lado do retângulo de área máxima com o perímetro de 200 metros.



Conforme vimos:
2x + 2y = 200
x + y = 100
y = 100 - x

Expressando a área S do retângulo em função de x:
S = xy
S = x(100 - x)
S = f(x) = - x² + 100x

A função obtida é uma função quadrática. No plano cartesiano, o gráfico correspondente é formado por pontos pertencentes a uma parábola com a concavidade voltada para baixo, conforme esboço a seguir:



Para calcular o valor de x que torna a área máxima, basta determinar a abscissa do vértice da parábola:

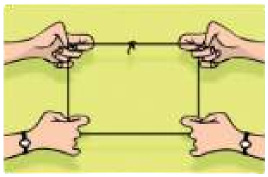
$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{100}{2.(-1)} \Rightarrow x_v = 50$$

Se a medida de um lado do retângulo é 50 m, a outra medida y pode ser calculada substituindo na primeira equação:
y = 100 - x
y = 100 - 50
y = 50

Portanto, o retângulo procurado tem lados com medidas iguais a 50 metros, isto é, o retângulo de área máxima e perímetro constante resultou em um quadrado.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1

Pedro amarrou os dois extremos de um barbante e obteve um laço de 100 cm. Qual o retângulo de maior área que se pode formar com esse laço?

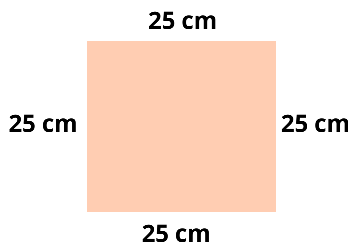
Resolução:
Como o laço tem 100 cm, qualquer retângulo que pode ser formado terá 100 cm de perímetro. Considere um desses retângulos .
Represente a largura por x. Seu comprimento deverá ser, então, representado por

$$\frac{100 - 2x}{2} = 50 - x$$

A área será dada pela expressão $y = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$, que é uma função polinomial do 2º grau. O problema pede para determinar as dimensões do retângulo que tem área máxima. Descobrindo para que valor de x a função assume seu valor máximo, o problema está resolvido. Sabemos, ainda que, como x^2 tem coeficiente negativo, o gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.
Assim, o valor de x para o qual a função assume seu valor máximo é

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2x(-1)} = 25.$$

O retângulo formado pelo laço de 100 cm que possui a área máxima é aquele em que x vale 25. Encontramos um quadrado de lado 25, mas lembre-se de que todo quadrado é um retângulo.



2

Qual é a área máxima de uma região determinada por um retângulo cujo perímetro é 48 cm?

Resolução:
Sejam x e z as dimensões do retângulo que determinam a região.
Como o perímetro é 48 cm, então:
$2x + 2z = 48 \Rightarrow \quad 2z = 48 - 2x \Rightarrow \quad z = 24 - x$

A função que determina a área da região é dada por:
$f(x) = x \cdot z = x \cdot (24 - x) = -x^2 + 24x$

Agora, calculamos a área máxima da região. Para isso, fazemos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{24^2 - 4.(-1).0}{4.(-1)} = -\frac{576}{-4} = 144$$

Portanto, a área máxima da região é 144 cm²

CONCEITOS E CONTEÚDOS

MÁXIMOS OU MÍNIMOS – EXEMPLO 2 (MATEMÁTICA FINANCEIRA)

Roberta é proprietária de uma fábrica que produz sapatos ao custo de R$ 20,00 o par. Ela estimou que, se cada par de sapato for vendido por x reais, ela venderá um certa quantidade de pares de sapato mensais que pode ser expressa por 80 - x, sendo que ($0 \leq x \leq 80$). Assim, ela concluiu que o lucro mensal obtido é uma função do preço de venda. Determine o valor de cada preço de venda, nessas condições, de modo que a fábrica de Roberta tenha lucro mensal máximo.
O lucro L é obtido fazendo L = V - C, sendo V o valor de venda e C o custo.
Como não foram considerados outros custos, podemos obter a lei de formação da função L:

L = V - C
L = x . (80 - x) - 20 . (80 - x)
L = 80x - x^2 - 1600 + 20x
L = - x^2 + 100x - 1600 ($0 \leq x \leq 80$)

Como x representa o preço máximo de venda e a parábola correspondente tem a concavidade voltada para baixo, o lucro máximo irá ocorrer para a abscissa do vértice dessa parábola, isto é:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{100}{2.(-1)} \Leftrightarrow x_v = 50$$

Portanto, o preço de venda para ser lucro máximo é R$ 50,00.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

3

Uma companhia de viagens vai obter lucro (L) em determinada excursão em função do preço x cobrado. Se x for um número muito pequeno, o lucro é negativo, ou seja, prejuízo. Se x for um número muito grande, o lucro também será negativo porque poucas pessoas farão a excursão. Um economista, estudando a situação, deduziu a fórmula para L em função de x: L= $-x^2$ + 90x - 1400. Quanto deve cobrar a companhia para ter lucro máximo?

Resolução:

Para encontrar o preço x que maximiza o lucro L, podemos usar o vértice da parábola que representa a função de lucro L(x) = - x^2 + 90x - 1400.

Temos $x_v = -\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{90}{2.(-1)} \Rightarrow x = -\frac{90}{-2} \Rightarrow x = 45$$

Portanto, para obter lucro máximo, a companhia de viagens deve cobrar 45 unidades monetárias.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

Pedro pretende cercar uma região retangular em sua chácara para criar galinhas. Para isso, ele comprou 60m de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível. Determine quais devem ser os comprimentos dos lados e a área máxima desse galinheiro.

A) 10 metros de comprimento e 200m²
B 10 metros de comprimento e 400m²
C) 15 metros de comprimento e 225m²
D) 20 metros de comprimento e 225m²
E) 20 metros de comprimento e 400m²

Atividade 2

(M120305A8) João deseja cercar um terreno retangular. Sabe-se que se um dos lados do terreno mede x metros, sua área será dada por $A(x) = -x^2 + 40x$.
O valor de x para que o terreno cercado tenha a maior área possível é

A) 10
B) 20
C) 40
D) 300
E) 400

Atividade 3

Um arquiteto iniciou a planta de uma casa desenhando um retângulo que representa o terreno. O perímetro do retângulo é 100 cm. Como cada centímetro do desenho equivale a 1 metro, então a área máxima do terreno é

A) 625 m²
B) 100 m²
C) 50 m²
D) 25 m²
E) 12,5 m²

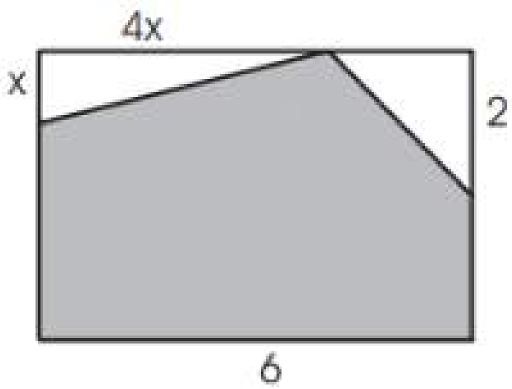
Atividade 4

(FGV 2017) Um fazendeiro dispõe de material para construir 60 metros de cerca em uma região retangular, com um lado adjacente a um rio.
Sabendo que ele não pretende colocar cerca no lado do retângulo adjacente ao rio, a área máxima da superfície que conseguirá cercar é

A) 430 m²
B) 440 m²
C) 460 m²
D) 470 m²
E) 450 m²

Atividade 5

(UFSM) Na parede da sala de aula de Manolito, que tem 4 m de altura e 6 m de largura, será pintado um painel, conforme a figura apresentada.

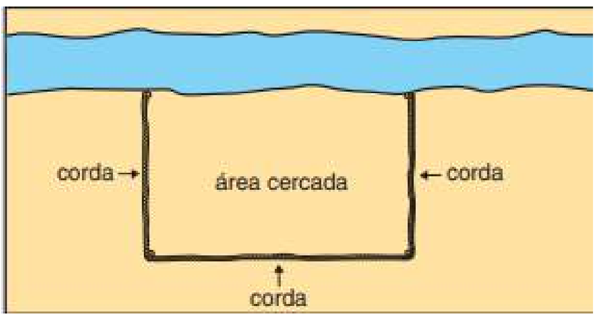


O valor de x para que a área hachurada seja máxima é

A) 1/4
B) 1/2
C) 1
D) 2
E) 4

Atividade 6

Com 80m de corda, um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio, para confinar alguns animais.



As medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível são:

A) 5 cm, 5 cm, 70 cm
B) 10 cm, 10 cm, 60 cm
C) 20 cm, 20 cm, 40 cm
D) 20 cm, 30 cm, 30 cm
E) 30 cm, 25 cm, 25 cm

Atividade 7

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Em uma metalúrgica, o custo c, em reais, para produzir n peças de metal pode ser calculado por $c(n) = 0{,}04n^2 - 4n + 110$. Determine para qual quantidade de peças o custo de produção é mínimo. o custo mínio é:

A) 50 peças; R$ 20,00

B) 50 peças; R$ 10,00

C) 25 peças; R$ 20,00

D) 25 peças. R$ 10,00

E) 100 peças. R$ 100,00

Atividade 8

(UFPE) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R$200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$ 4,00 por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 10 lugares não ocupados o preço de cada passagem será R$240,00). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo?

A) 15 lugares

B) 20 lugares

C) 25 lugares

D) 30 lugares

E) 100 lugares

Atividade 9

(FUVEST-SP) A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nesses condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo?

A) R$ 2 000,00

B) R$ 3 200,00

C) R$ 3 600,00

D) R$ 4 000,00

E) R$ 4 800,00

Atividade 10

(FGV-SP, 2010) O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia em um único voo diário. O avião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem p relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação:

$p = 300 - 0{,}75x$. A receita máxima possível por viagem é:

A) R$ 30 000,00

B) R$ 29 900,00

C) R$ 29 800,00

D) R$ 29 700,00

E) R$ 29 600,00

GABARITO

ATIVIDADE 1: C
ATIVIDADE 2: B
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: E
ATIVIDADE 5: C
ATIVIDADE 6: C
ATIVIDADE 7: B
ATIVIDADE 8: C
ATIVIDADE 9: C
ATIVIDADE 10: D

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 9:

Essa é uma questão de maximização (ou minimização) que é muito comum em equações do segundo grau, onde utilizaremos o conceito de vértices de uma parábola.

A Receita é dada pelo preço vezes o número de quantidades vendidas. Mas há um detalhe, em função de um desconto dado no preço, desconto este que chamaremos de "x", haverá variações nas quantidades vendidas. Podemos definir a função receita em função de x, como sendo:

R(x) = (10 - x) . (200 + 100.x)

Ou seja, para cada um real de desconto, mais 100 unidades vendidas.

Agora basta desenvolvermos R(x)

R(x) = 2000 + 1000x - 200x - 100x^2
R(x) = -100x^2 + 800x + 2000

Repare que R(x) é uma parábola, onde seus coeficientes são:
a = -100
b = 800
c = 2000

Como o coeficiente a é negativo, então a concavidade dessa parábola será voltada para baixo. Logo, ela possui um ponto de máximo exatamente em seu vértice.
O ponto X da coordenada do vértice da parábola é dado pela fórmula Xv = -b/2a
Xv = [-800] / [2.(-100)] = -800/-200 = 4
O desconto que dará a maior receita é o desconto de 4 reais.
R(4) = (10-4) . (200 + 100.4)
R(4) = 6 . (200 + 400)
R(4) = 6 . 600
R(4) = 3600 (ALTERNATIVA c

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática : ciência e aplicações, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Mori, Iracema. Matemática: ideias e desafios, 9º ano / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. -- 18.ed.-- São Paulo : Saraiva, 2015.