

## Matemática

25ª Semana



### FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU



| MONITORAMENTO                                         | PEDADOGA/O: PED.<br>PROFESSOR/A: PRO<br>LÍDER: LID                                                                                                                                                           | PED. | PRO. | LID. |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|
| DESCRIPTOR DO SAEB                                    | <b>D133_M</b> Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função do 2º grau.                                                                                                     |      |      |      |
| HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES | <b>EM13MAT503</b> Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. |      |      |      |
| HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS                  | <b>EF07MA26</b> Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.     |      |      |      |

# MATEMÁTICA

## CONTEXTUALIZAÇÃO



### Um dos mais antigos esportes do mundo

A cada quatro anos, atletas de todo o mundo são reunidos em um país predeterminado para a realização dos Jogos Olímpicos. Diversas modalidades estão presentes, desde atividades realizadas individualmente, como arco e flecha, até atividades coletivas, como o futebol.

Dentre as modalidades que estão presentes com frequência nos jogos, algumas delas são praticadas desde a Antiguidade, como é o caso do lançamento de discos.

A inspiração para esse esporte tem origem nas atividades dos guerreiros da Antiguidade, os quais jogavam seus escudos antes de atravessar rios para diminuir a massa que teriam de carregar durante a travessia. O lançamento de discos foi a modalidade esportiva que menos sofreu alterações nos Jogos Olímpicos da Era Moderna, sendo a primeira edição realizada em 1896, em Atenas, na Grécia.

RONALDO INACIO



O lançamento de disco é realizado dentro de uma área circular de 2,5 m de diâmetro. O competidor não pode pisar fora do círculo (B) até que o disco lançado toque o solo.

Observe que a trajetória do disco é uma curva chamada parábola. O disco percorre certa distância, alcançando sua altura máxima para depois começar a “cair”. Essa altura máxima é o nosso objeto de estudo neste material, em que daremos continuidade ao estudo de máximos ou mínimos, desta vez, incluindo aplicações abordadas pela Física, em particular, pela cinemática. Bons estudos!

# CONCEITOS E CONTEÚDOS

## RETOMAMOS O QUE VIMOS

No material anterior estudamos sobre o vértice de uma parábola e seus pontos de máximo ou pontos de mínimos, aplicados em cálculos de área máxima e na matemática financeira, obtendo lucro máximo ou menor custo.

Neste material, daremos continuidade ao estudo de máximos ou mínimos, desta vez, com aplicações à Física, como na Cinemática, por exemplo.

## MÁXIMOS OU MÍNIMOS NA CINEMÁTICA

Nas aulas de física você já estudou sobre a cinemática, que estuda o movimento dos corpos sem considerar as causas desse movimento. Agora, vamos estudar uma aplicação da função quadrática na física.

Observe:

Um móvel em movimento uniformemente variado (MVU) tem o espaço percorrido  $S$  em função do tempo  $t$  modelado pela seguinte função quadrática:

$$S = 2t^2 - 18t + 36$$

Sendo  $S$  dado em metros e  $t$  em segundos, em qual instante o móvel muda de sentido?

Como a parábola correspondente ao gráfico dessa função tem a concavidade voltada para cima, esse móvel muda de sentido quando a velocidade do móvel é zero, ou seja, no instante correspondente à abscissa do vértice da parábola.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t_v = -\frac{(-18)}{2 \cdot 2} \Rightarrow t_v = 4,5$$

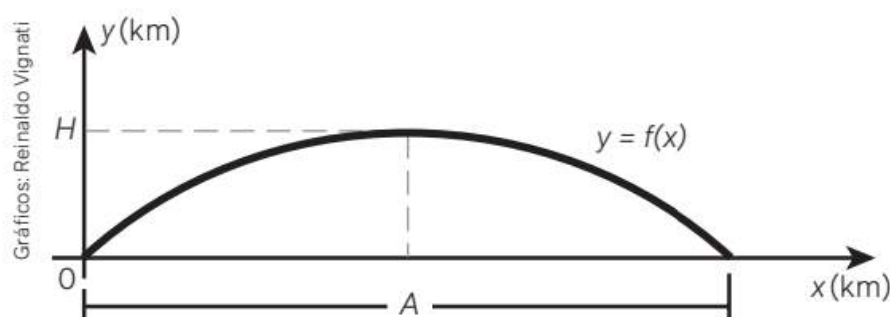
Portanto, após 4,5 segundos o móvel muda seu sentido de deslocamento.

## CONCEITOS E CONTEÚDOS

### MÁXIMOS OU MÍNIMOS NO MOVIMENTO PARABÓLICO

Observe a questão a seguir:

(UFPB) O gráfico da função  $y = f(x) = -\left(\frac{1}{200}\right)x^2 + \left(\frac{1}{5}\right)x$ , representado na figura abaixo, descreve a trajetória de um projétil a partir da origem.



Sabendo-se que  $x$  e  $y$  são dados em quilômetros, a altura máxima  $H$  e o alcance  $A$  do projétil são, respectivamente,

- A) 2 km e 40 km
- B) 40 km e 2 km
- C) 2 km e 10 km
- D) 10 km e 2 km
- E) 2 km e 20 km

A metade do alcance do projétil corresponde à abscissa do vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{\frac{1}{5}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{200}\right)} \Rightarrow x_v = \frac{1}{5} \cdot \frac{100}{1} \Leftrightarrow x_v = 20$$

Assim, o alcance do projétil é de 40 km (o dobro da abscissa do vértice da parábola).

A altura máxima alcançada pelo projétil corresponde ao valor da ordenada do vértice, isto é:

$$H_{max} = y_v = f(x_v) = f(20) \Rightarrow H_{max} = y_v = -\left(\frac{1}{200}\right) \cdot 20^2 + \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 20$$

$$H_{max} = -\left(\frac{1}{200}\right) \cdot 400 + 4 \Rightarrow H_{max} = 2$$

Portanto, a altura máxima atingida é de 2 km, ou seja, alternativa A

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1



Dartfish Solutions/  
Arquivo da editora

A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura  $y$ , em metros,  $x$  segundos após o chute, seja dada por  $y = -x^2 + 6x$ .

- Qual é a altura máxima atingida pela bola?

Conforme a ilustração acima, percebemos que a trajetória da bola é uma curva chamada parábola. Podemos, então, determinar a altura máxima dessa curva associando com o vértice da parábola. No entanto, para o vértice  $(x, y)$ , temos valores de  $x$  e valores de  $y$ . Como os valores de  $x$  estão na horizontal, o que nos interessa é um valor de  $y$ , que está na vertical.

Usamos  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ , em que  $-\frac{b}{2a}$  determina  $x$  e  $-\frac{\Delta}{4a}$  determina  $y$ .

$$\text{Temos, então, } -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4(-1)} = -\frac{36}{-4} = 9$$

Portanto, a altura máxima atingida pela bola é 9 metros.

Observe, ainda, que o enunciado chamou de  $x$  o tempo após o chute. Por isso, podemos ainda determinar:

- Em que instante a bola atinge a altura máxima?

Neste caso, vamos utilizaremos  $-\frac{b}{2a}$ :

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

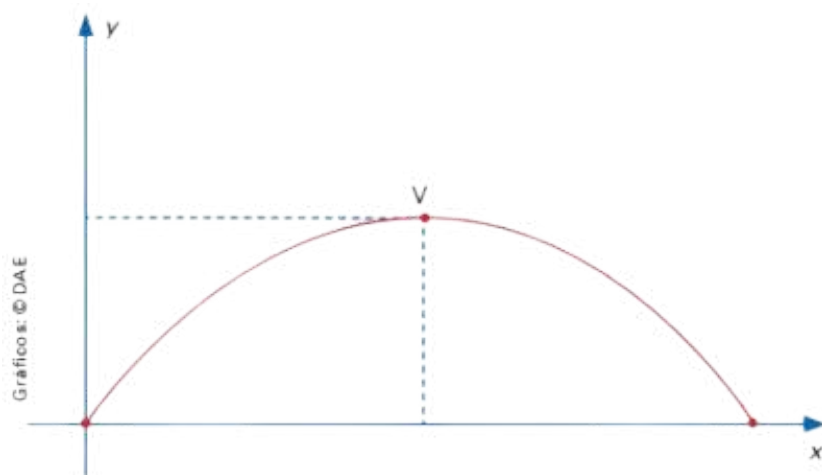
Logo, a bola atinge a altura máxima em 3 segundos após o chute.

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2

Considere que um projétil é lançado do solo, como sugere a figura, descrevendo uma trajetória em forma de parábola modelada pela função  $y = -0,05x^2 + 1,5x$ , sendo  $x$  e  $y$  dados em metros.

Sabendo que  $y$  representa a altura desse projétil e  $x$  o deslocamento horizontal a partir do lançamento, determine a altura máxima atingida e o alcance máximo.



Resolução:

Como a concavidade é voltada para baixo, a função quadrática tem ponto de máximo no vértice. A ordenada do vértice representa a altura máxima atingida pelo projétil, e a abscissa do vértice representa a metade do alcance.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,5}{2 \cdot (-0,05)} = \frac{1,5}{0,1} = 15$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1,5^2 - 4 \cdot (-0,05) \cdot 0}{4 \cdot (-0,05)} = \frac{2,25}{0,2} = 11,25$$

Portanto temos:

A altura máxima de 11,25 m e o alcance é 30 m (o dobro da abscissa do vértice, pois  $x = 0$  representa o ponto inicial do projétil).

# ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

## Atividade 1

(M11507SI) A trajetória de uma bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que a altura ( $h$ ) que a bola alcança seja dada pela função  $h(x) = -x^2 + 6x - 4$ , qual é a altura máxima, em metros, alcançada pela bola?

- A) – 5
- B) – 3
- C) 3
- D) 5
- E) 10

## Atividade 2

(M120368B1) Um cano está furado e a altura alcançada pelo jato d'água  $f(x)$ , em metros, é descrita pelo gráfico da função  $f(x) = 8x - 4x^2$ , onde  $x$  representa o alcance, em metros, desse jato d'água. A altura máxima atingida por essa água, em metros, é

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

## Atividade 3

(M11378SI) Um peso lançado verticalmente para cima, em cada instante  $t$ , em segundos, alcança a altura  $h$ , em metros, dada por  $h(t) = 4t - 2t^2$ .

Qual é a altura máxima alcançada por esse peso?

- A) 1 m
- B) 2 m
- C) 3 m
- D) 4 m
- E) 5 m

## Atividade 4

(M10221EL) Uma bola é lançada verticalmente para cima. Suponha que sua altura  $h$ , em metros,  $t$  segundos após o lançamento seja  $h = -t^2 + 4t + 5$ .

Qual é a altura máxima atingida por essa bola?

- A) 1 metro.
- B) 2 metros.
- C) 5 metros.
- D) 9 metros.
- E) 18 metros.

## ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

### Atividade 5

(M120041E4) A altura de uma peteca em função do tempo é descrita pela função  $h(t) = 8t - 5t^2$ , onde  $h$  é a altura e  $t$  é o tempo decorrido, em segundos, após o seu lançamento.

Qual é a altura máxima atingida por essa peteca?

- A) 0 m
- B) 0,3 m
- C) 0,8 m
- D) 1,6 m
- E) 3,2 m

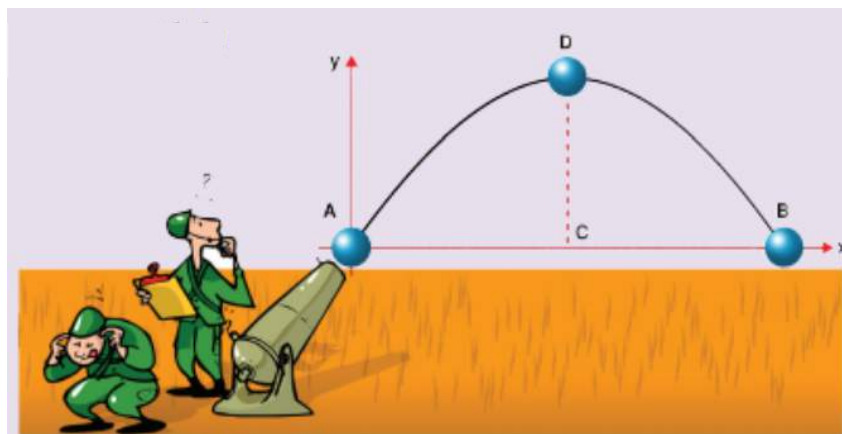
### Atividade 6

(M11361SI) Uma bola é lançada verticalmente para cima. Após  $t$  segundos do lançamento, sua altura em metros é dada pela expressão  $h(t) = 1 + 40t - 5t^2$ .

A altura máxima alcançada pela bola será igual a

- A) 40 metros.
- B) 61 metros.
- C) 76 metros.
- D) 81 metros.
- E) 162 metros.

### Atividade 7



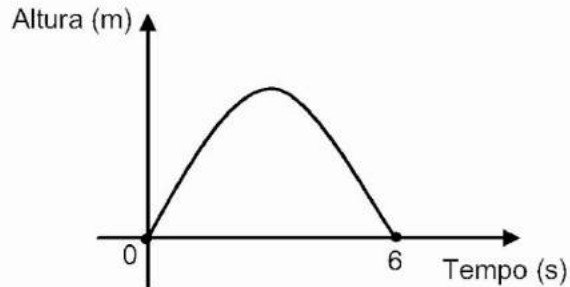
A bala lançada por este canhão descreve uma parábola de equação  $y = 100x - 2x^2$ . A altura máxima atingida é:

- A) 1000
- B) 1100
- C) 1150
- D) 1200
- E) 1250

## ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

### Atividade 8

(M120571A9) A parábola representada no gráfico abaixo mostra a variação da altura de uma bola lançada para cima em função do tempo.



Em quanto tempo, após o lançamento, a bola atinge a altura máxima?

- A) 1 segundo.
- B) 2 segundos.
- C) 3 segundos.
- D) 4 segundos.
- E) 5 segundos.

### Atividade 9

(M10223EL) Suponha que um sapo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) dada pela expressão  $h(t) = 2t - 2t^2$ , onde  $h$  é a altura atingida em metros. Em que instante  $t$  o sapo retorna ao solo?

- A)  $t = 0$  s
- B)  $t = 0,5$  s
- C)  $t = 1$  s
- D)  $t = 2$  s
- E)  $t = 3$  s

### Atividade 10

(M100075ES) Um projétil é lançado do solo verticalmente para cima, em condições ideais. A altura atingida por esse projétil é descrita pela expressão  $h: -t^2 + 8t$ , na qual  $t$  indica o tempo em segundos para que ele retorne ao solo. Quanto tempo após o lançamento, esse projétil atinge a altura máxima?

- A) 1 segundo.
- B) 2 segundos.
- C) 4 segundos.
- D) 8 segundos.
- E) 16 segundos.

## **GABARITO**

**ATIVIDADE 1: D**  
**ATIVIDADE 2: D**  
**ATIVIDADE 3: B**  
**ATIVIDADE 4: D**  
**ATIVIDADE 5: E**  
**ATIVIDADE 6: D**  
**ATIVIDADE 7: E**  
**ATIVIDADE 8: B**  
**ATIVIDADE 9: C**  
**ATIVIDADE 10: C**

# REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática : ciência e aplicações, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Mori, Iracema. Matemática: ideias e desafios, 9º ano / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. -- 18.ed.-- São Paulo : Saraiva, 2015.