Matemática

3ª Série | Ensino Médio

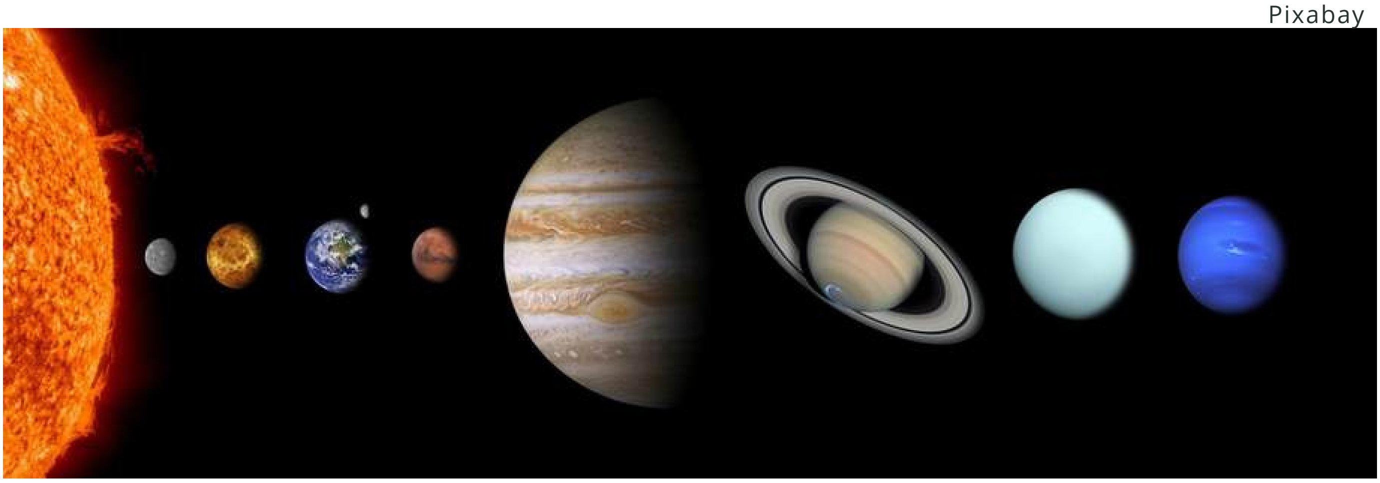
27ª Semana

CIRCUNFERÊNCIA

MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO PAEBES	**D128_M** Relacionar as representações algébricas e gráficas de uma circunferência.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EF07MA22** - Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF09MA09**: Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.			

CONTEXTUALIZAÇÃO

Pixabay



Entre as formas geométricas que podemos observar ao nosso redor e na natureza, a forma circular talvez tenha sido aquela que mais despertou a curiosidade dos seres humanos desde os tempos mais remotos.

Não há como imaginar que nossos ancestrais não tenham sido estimulados em sua curiosidade observando as formas do Sol e da Lua, por exemplo. Mais adiante, ao observar os astros, as pessoas perceberam suas formas circulares, associaram seus movimentos a circunferências e estabeleceram processos de cálculo angulares, que permitiram sofisticadas navegações, com base nas posições das estrelas.

As medir uma circunferência, descobriam a “magia” do número π e, depois, conseguiram determinar a forma circular da Terra.

Você já ouvir a expressão “não é preciso reinventar a roda”? faz referência à roda, que traduz a importância que a forma circular teve na história dos seres humanos, por viabilizar os meios de transporte e os processos que facilitaram movimentações de grandes cargas. A roda é considerada uma invenção que é propriedade de todos e, de tão perfeita e óbvia, não precisa ser reinventada. Essa é a ideia da expressão.

Neste material nós vamos estudar a **circunferência** e relacionar as representações algébricas e gráficas de uma circunferência.

Bons estudos!

Texto extraído do livro Matemática, 8º Ano, Antonio Nicolau, Clarice Foinseca e Heloisa Hessel, Editora Cereja

CONCEITOS E CONTEÚDOS

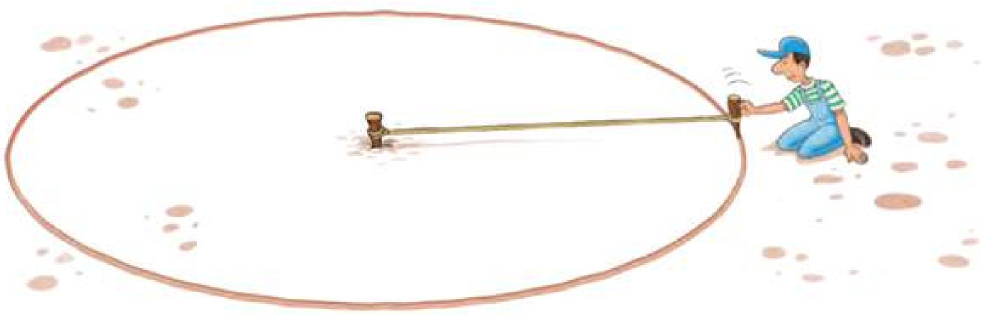
A CIRCUNFERÊNCIA

Observe a situação a seguir.

Para traçar o canteiro de uma praça, o jardineiro Luís usou uma corda presa a duas hastes de madeira, uma em cada ponta.

Com uma das hastes presa ao chão e mantendo a corda esticada, ele riscou a terra com a outra, dando uma volta completa.

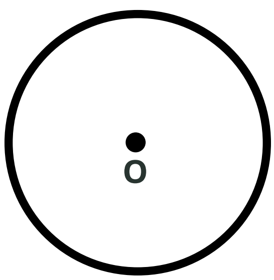
JOSÉ LUÍS JUHAS



O traçado obtido pelo jardineiro dá ideia de uma circunferência.

Circunferência é a linha formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano.

Considere a circunferência abaixo.

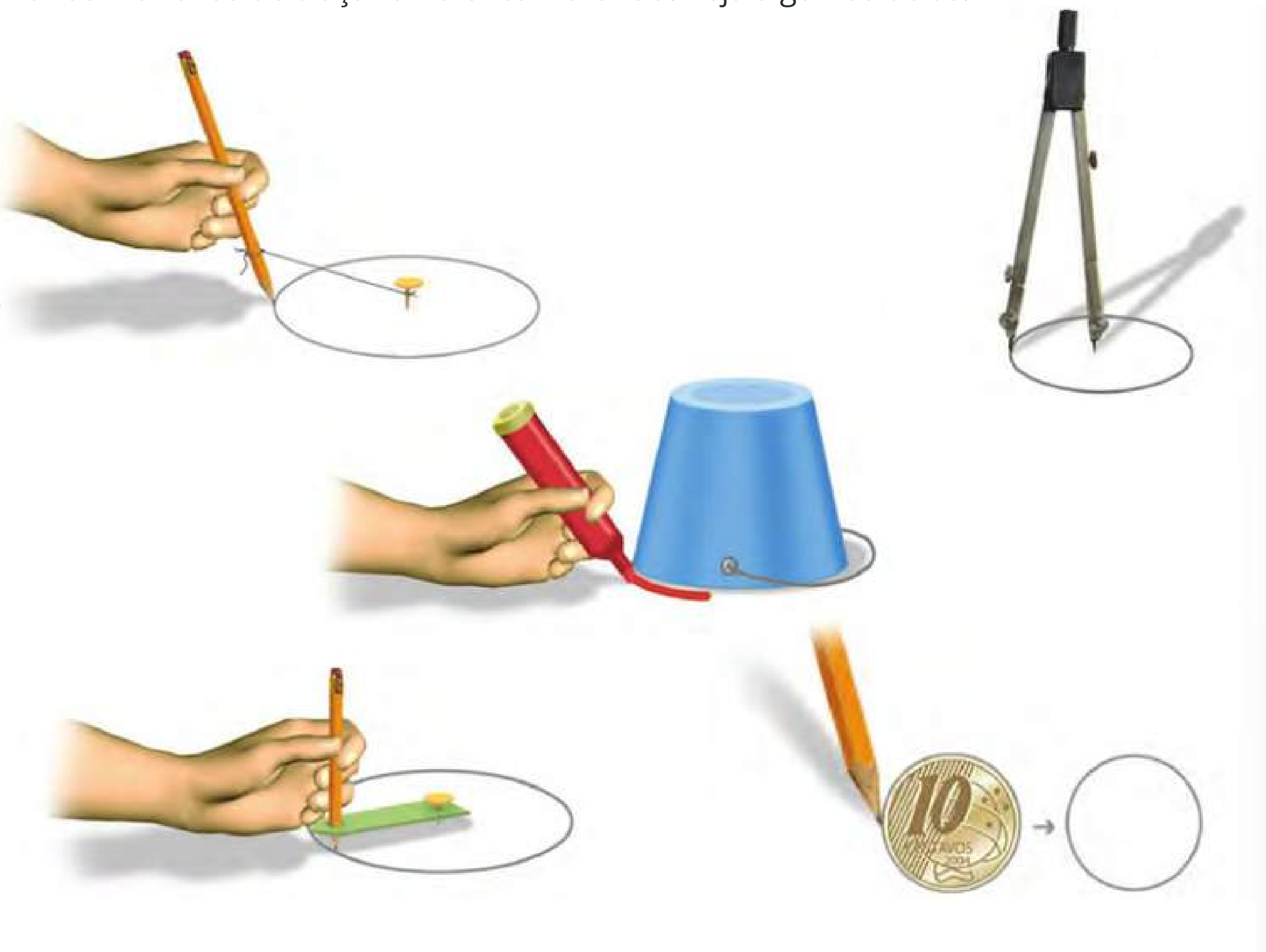


Todos os pontos de uma circunferência são equidistantes de um ponto fixo, chamado de centro da circunferência. Nessa circunferência, o centro é o ponto O.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

CONSTRUÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS

Há várias maneiras de traçar uma circunferência. Veja algumas delas.



Ilustrações: Paulo Manzi/Arquivo da editora

O compasso é o instrumento ideal para traçar circunferências. Usando a ponta seca, fixamos um ponto do plano, O, que será o centro da circunferência. A abertura do compasso determina a medida do raio r.

Quando traçamos a circunferência, todos os pontos da curva traçada estarão a uma mesma distância r do centro O.

Fernando Favoretto/Criar Imagem

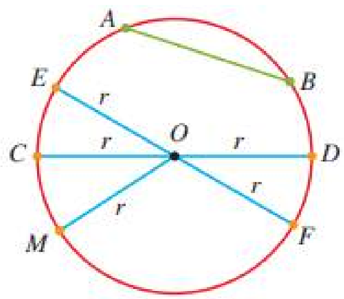
CONCEITOS E CONTEÚDOS

ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA

Em uma circunferência, destacamos alguns elementos:

- Raio: segmento cujos extremos são o centro e um ponto qualquer da circunferência
- Corda: segmento cujos extremos são dois pontos quaisquer de uma circunferência.
- Diâmetro: corda que passa pelo centro de uma circunferência.

NELSON MATSUDA

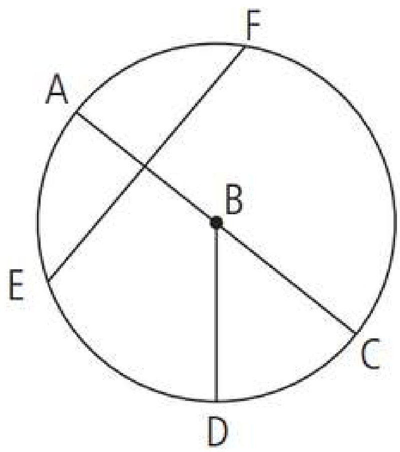


Na figura ao lado:
- $\overline{AB}$ é uma corda;
- $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são alguns dos diâmetros;
- $\overline{OM}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OF}$ são alguns dos raios.

A palavra **raio** será usada tanto para designar um segmento como para indicar a medida desse segmento. Assim, por exemplo, quando dizemos que uma circunferência tem raio 2cm, queremos dizer que os infinitos segmentos que são raio dessa circunferência medem essa mesma medida.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1 Considere a circunferência e indique:
a) o centro;
b) três raios;
c) um diâmetro;
d) duas cordas.



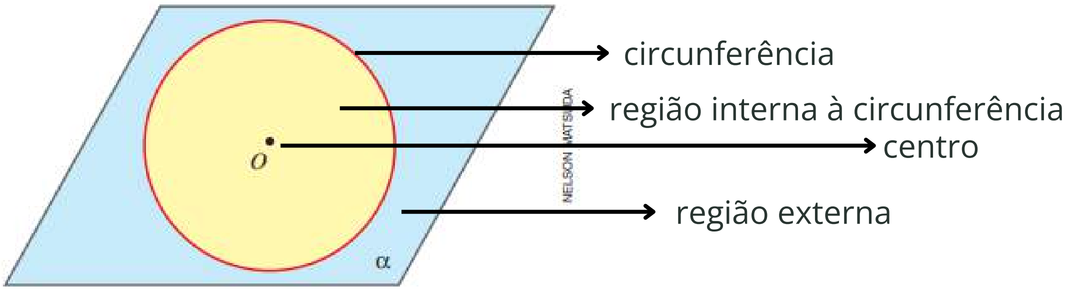
Resolução:

a) O centro da circunferência é o ponto B.
b) Os três raios da circunferência são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$
c) O diâmetro da circunferência é o segmento $\overline{AC}$
d) Duas cordas da circunferência são os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{EF}$

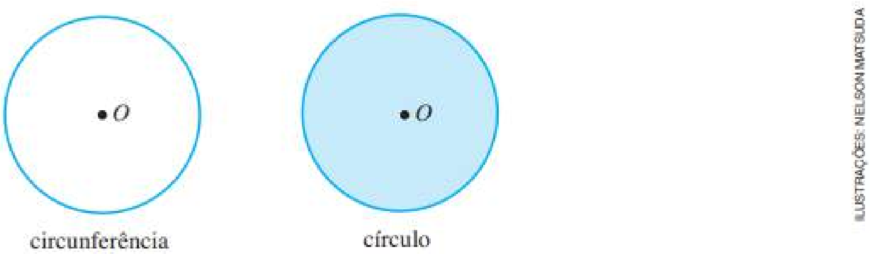
CONCEITOS E CONTEÚDOS

CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA

Uma circunferência de centro O, contida em um plano α, determina duas regiões: região interna e região externa.

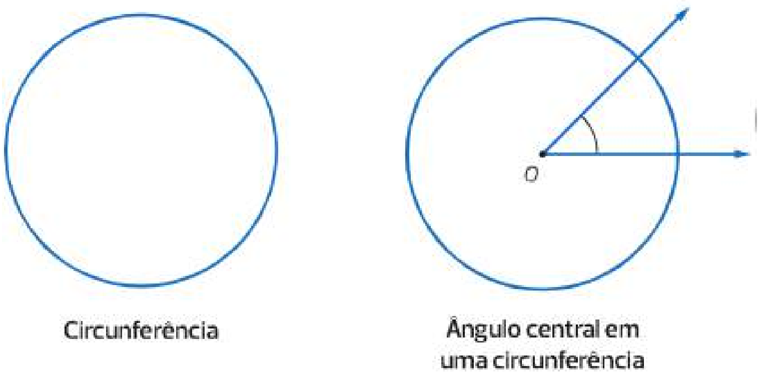


A região do plano formada por uma circunferência e pela região interna a ela é chamada de círculo.



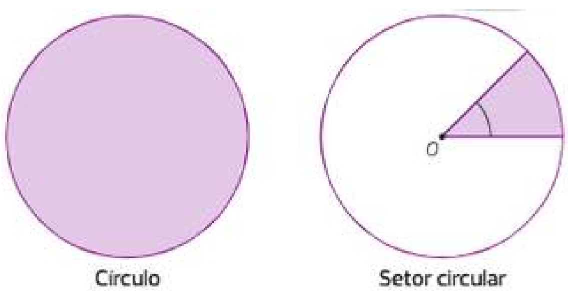
ÂNGULO CENTRAL

O ângulo central em uma circunferência é todo ângulo que tem como vértice o centro dessa circunferência.



SETOR CIRCULAR

O setor circular é qualquer uma das partes do círculo determinadas por um ângulo central.

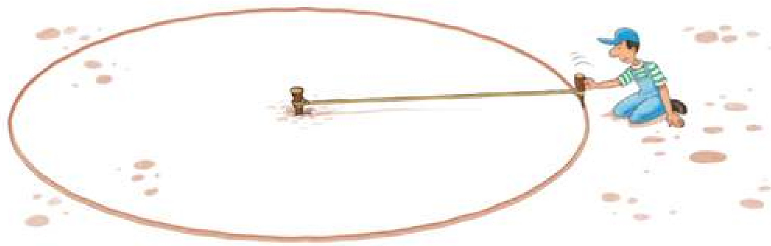


CONCEITOS E CONTEÚDOS

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Você se lembra do jardineiro Luís, que traçou o contorno de um canteiro em uma praça com duas hastes de madeira e uma corda?

JOSÉ LUÍS JUHAS



Vimos que o traçado obtido por Luís dá ideia de uma circunferência.

Após o traçado, Luís fez, com uma enxada, um sulco sobre a circunferência

Desejando saber quantos metros de tela seriam necessários para cercar esse canteiro, ele esticou uma corda, acompanhando o sulco, e cortou-a ao final do contorno.

JOSÉ LUÍS JUHAS

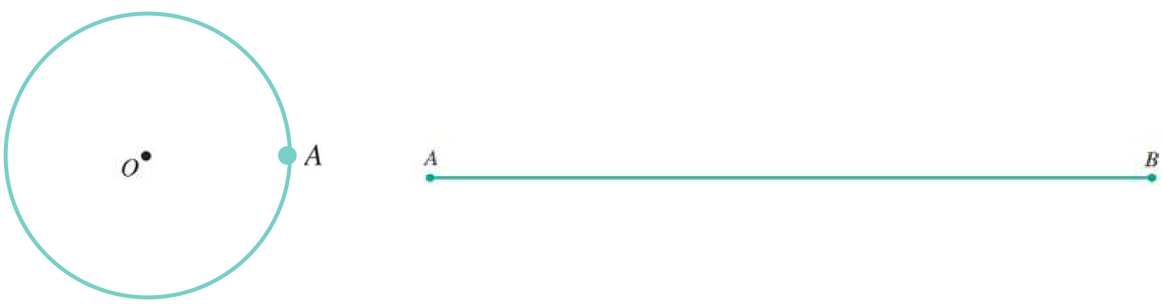
Depois, com uma trena, mediu a corda e verificou que o comprimento da circunferência era de 18,84 m. Desse modo, concluiu que seriam necessários aproximadamente 19 m de tela.

Considerando que a distância entre as duas hastes era de 3 m, podemos dizer que ele traçou uma circunferência de 3 m de raio, ou seja, de 6 m de diâmetro.

Outro exemplo:

Para encontrar o comprimento da circunferência de um pneu de bicicleta e a medida de seu diâmetro, podemos utilizar um barbante e uma fita métrica.

Suponha que fosse possível contornar a circunferência abaixo com um barbante. Esticando o barbante, ele teria a mesma medida do segmento $\overline{AB}$.



CONCEITOS E CONTEÚDOS

A medida do segmento $\overline{AB}$ é o comprimento dessa circunferência.

A razão entre o comprimento da circunferência e a medida de seu diâmetro é um número que, na forma decimal, apresenta infinitas casas decimais não periódicas.

O avanço da tecnologia na área da informática tem validado, na prática, o que a teoria mostra: já é possível expressar esse número com milhões de casas decimais, e essa representação não apresenta nenhum período, pois trata-se de um número irracional.

Esse número irracional, que representa a razão entre o comprimento C de uma circunferência e a medida D de seu diâmetro, é representado pela letra grega π (lemos: pi).

Assim, podemos escrever:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi \text{ ou } \frac{C}{D} = \pi$$

Veja a representação decimal desse número com suas primeiras oito casas decimais:

3,14159265

Como a medida D do diâmetro de uma circunferência é o dobro da medida r de seu raio, podemos escrever:

$$\frac{C}{2r} = \pi \text{ ou } C = 2\pi r$$

Veja que, no exemplo da página anterior, é possível chegar a um valor aproximado para π, pois o comprimento da circunferência do canteiro, dividido pela medida de seu diâmetro, é: 18,84 : 6 = 3,14

Que tal fazer uma experiência? Determine o comprimento da circunferência do pneu de uma bicicleta e a medida do diâmetro dessa circunferência. Calcule a razão entre o comprimento da circunferência do pneu e a medida de seu diâmetro. A que número você chegou? Provavelmente você tenha encontrado valores próximos a 3,14.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2

Uma roda de bicicleta tem 40 cm de raio. Calcule o comprimento da circunferência dessa roda, considerando π = 3,14.

Resolução:

$C = 2\pi r$

C = 2 . 3,14 . 40

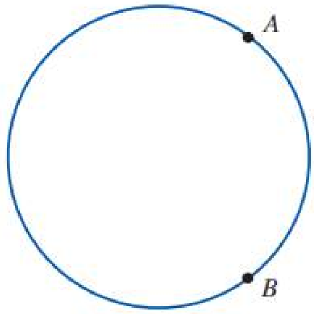
C = 251,20 cm

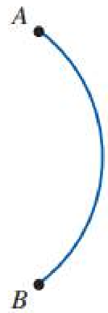
CONCEITOS E CONTEÚDOS

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

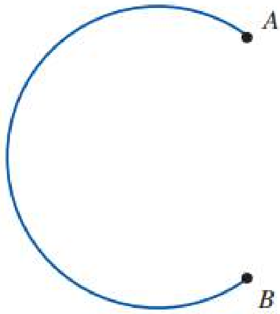
Dois pontos distintos de uma circunferência dividem-na em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada de arco.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



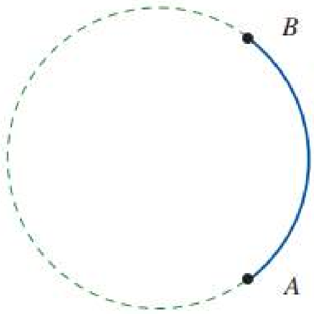


arco menor

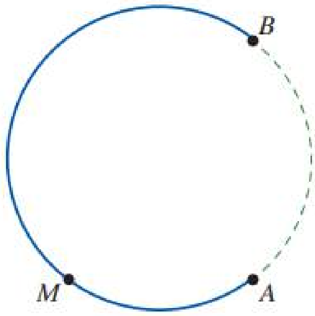


arco maior

Como existem dois arcos de extremos A e B, para diferenciar um do outro, o menor será indicado por $\widehat{AB}$ e, para indicar o maior, usaremos um terceiro ponto auxiliar. Veja as figuras.

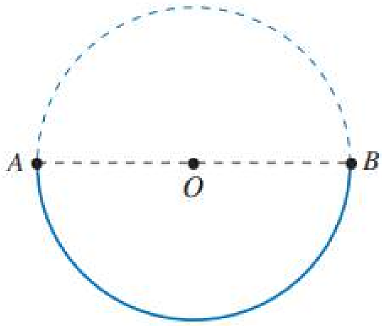


arco $\widehat{AB}$



arco $\widehat{AMB}$

Quando os extremos A e B coincidirem com os extremos de um diâmetro, cada um dos arcos será chamado de semicircunferência.



semicircunferência

Photodisc

Arco do Triunfo, Paris.

Nas Olimpíadas Paris 2024 você deve ter visto e ouvido falar do **Arco** do Triunfo, e agora você já sabe o porquê desse nome.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

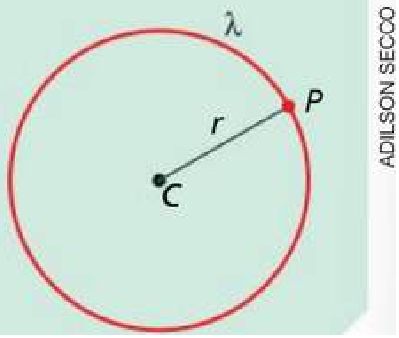
A CIRCUNFERÊNCIA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Quando analisamos figuras geométricas com base em certa propriedade, estamos estudando um lugar geométrico. Veja a definição:

Lugar geométrico plano é um conjunto de pontos do plano que partilham uma propriedade, de modo que todos esses pontos atendam a essa propriedade e somente esses pontos tenham essa propriedade.

Na Geometria analítica, estudamos a circunferência como um lugar geométrico, pois ela é um conjunto de pontos que obedecem à seguinte propriedade: todos estão à mesma distância do centro. Além disso, todos os pontos da circunferência, e somente eles, atendem a essa propriedade.

Dados um ponto fixo **C** do plano e uma distância *r*, a **circunferência** λ é o lugar geométrico dos pontos *P* do plano que estão à mesma distância *r* de *C*.

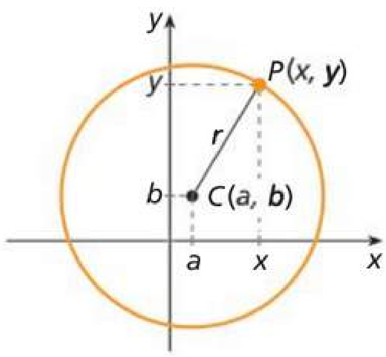


A distância r é a medida do raio, e C é o centro da circunferência.
Todo segmento cujas extremidades são o centro e um ponto qualquer da circunferência é um raio dessa circunferência.

EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Em materiais anteriores estudamos que podemos obter a equação da reta. Agora veremos que podemos determinar a equação da circunferência.

A partir de sua definição como lugar geométrico, vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer P(x y) que pertence à circunferência de centro C (a, b) e raio r.



ADILSON SECCO

A distância entre o centro C e o ponto P é igual ao raio.

O ponto P(x,y) pertence à circunferência se, e somente se, $d_{C,P} = r$.
logo: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$
Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

A equação descrita acima é a equação reduzida da circunferência de centro C(a b) e raio r.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

3

Determinar a equação reduzida da circunferência de raio = 3 e centro C(-2, 1).

Resolução:

Tomando um ponto P(x y) qualquer da circunferência, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$[x - (-2)]^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$
$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

Logo, $(x+2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ é a equação reduzida dessa circunferência.

4

Verificar se os pontos A(6, -3) e B(4, 0) pertencem à circunferência de raio 4 e centro (2, -3).

Resolução:

Primeiro, vamos encontrar a equação reduzida dessa circunferência:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$(x - 2)^2 + [y - (-3)]^2 = 4^2$
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Para saber se os pontos A e B pertencem à circunferência, vamos substituir suas coordenadas na equação obtida.

- Substituindo as coordenadas de A(6, -3) na equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, temos:

$(6 - 2)^2 + (-3 + 3)^2 = 16$
$4^2 + 0^2 = 16$
$16 = 16$

Como obtemos uma sentença verdadeira, o ponto A(6, -3) pertence à circunferência.

- Substituindo as coordenadas de B(4,0) na equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, temos:

$(4 - 2)^2 + (0 + 3)^2 = 16$
$2^2 + 3^2 =16$
$4 + 9 = 16$
$13 = 16$

Como obtemos uma sentença falsa, o ponto B(4,0) não pertence à circunferência.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5

Determinar as coordenadas do centro e o raio r de uma circunferência a partir de sua equação $(x + 1)^2 + y^2 = 16$.

Resolução:

Podemos encontrar o centro e o raio da circunferência comparando a equação dada com a equação na forma reduzida:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$(x + 1)^2 + y^2 = 16$ ou $[x - (-1)]^2 + (y - 0)^2 = 16$

Logo, a = -1 e b = 0; então, C(-1,0).

Como $r^2 = 16$ e $r > 0$, então $r = 4$.

Portanto, o centro é C (-1,0) e o raio é 4.

EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

A equação geral da circunferência de centro C(a,b) e raio r é obtida desenvolvendo-se os quadrados da equação reduzida.

◆ Observação

O quadrado da diferença de dois termos é:
$(x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Portanto, a equação geral da circunferência é:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

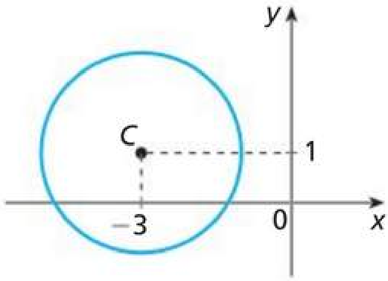
Essa equação também é chamada de equação normal da circunferência.

Observe que essa equação pode ser escrita como $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, em que c é o termo independente e $c = a^2 + b^2 - r^2$. Dessa forma, verificamos que ela é uma equação incompleta do 2º grau com duas variáveis, já que a completa seria do tipo:
$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

6

Obter a equação geral da circunferência de centro C(-3, 1) e raio r = 2.



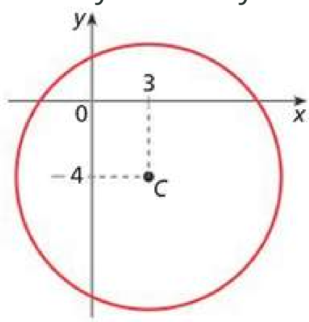
Resolução:
Podemos escrever a equação reduzida da circunferência e, em seguida, desenvolver os quadrados.

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 + 1 - 4 = 0$$

Portanto, a equação da circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$

7

Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$, vamos determinar o centro C e o raio r



Resolução:

Para obter o centro e o raio da circunferência, podemos formar o trinômio quadrado perfeito.

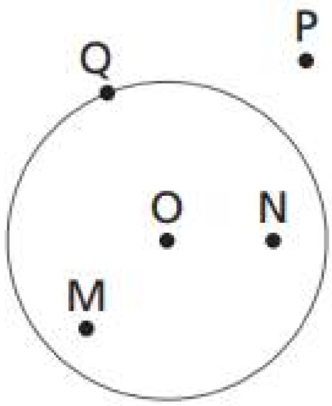
$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 6x + \square}_{(I)} + \underbrace{y^2 + 8y + \triangle}_{(II)} = 24 + \square + \triangle$$

Para que (I) e (II) sejam trinômios quadrados perfeitos, precisamos completá-los respectivamente com os números 9 e 16. Ao adicionarmos 9 e 16 ao primeiro membro, para que a igualdade se mantenha é preciso adicionar 9 e 16 também ao segundo membro. Assim:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x - 3)^2} + \underbrace{y^2 + 8y + 16}_{(y + 4)^2} = \underbrace{24 + 9 + 16}_{= 49}$$

Portanto, o centro da circunferência é C(3, -4) e o raio é 7.

Atividade 1

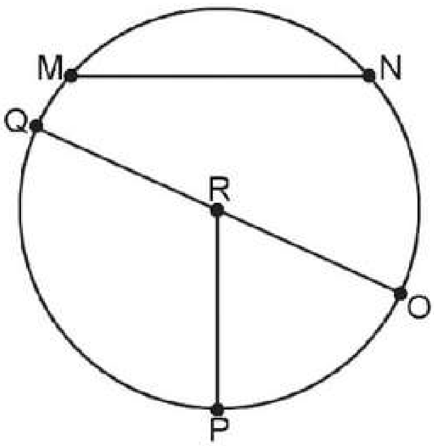


(Anresc) Na figura, estão representadas uma circunferência de centro O e raio r e quatro pontos P, Q, M e N. Entre esses quatro pontos, o ÚNICO cuja distância ao centro é igual à medida do raio é o ponto:

A) P
B) Q
C) M
D) N
E) O

Atividade 2

(M090033A8) No desenho abaixo, R é o centro da circunferência representada.



Nessa circunferência, os segmentos MN, RP e QO são, respectivamente,

A) uma corda, um diâmetro e um raio.
B) uma corda, um raio e um diâmetro.
C) um raio, uma corda e um diâmetro.
D) um diâmetro, uma corda e um raio.

Atividade 3

(M090096A9) Nas figuras, abaixo, estão desenhadas quatro circunferências, todas com o raio medindo 18 cm. A figura que indica a medida correta da corda $\overline{MN}$ é

A)

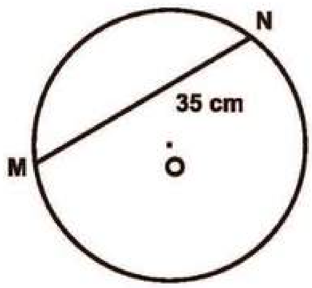


Figura 1

B)

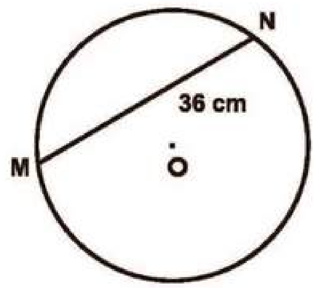


Figura 2

C)

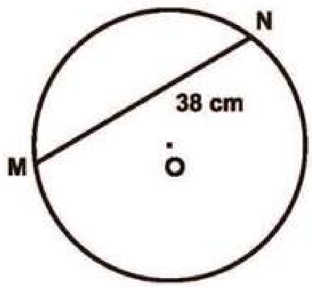


Figura 3

D)

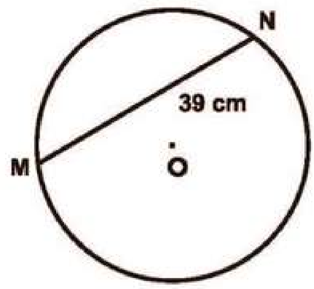
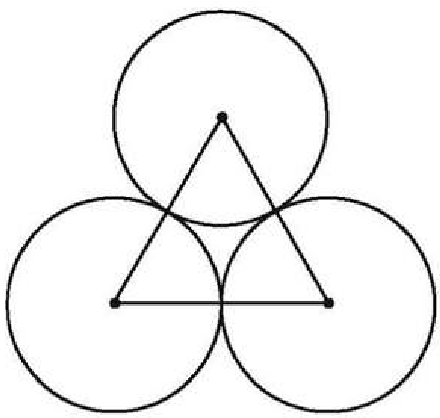


Figura 4

Atividade 4

(M090288A9) Na figura abaixo, todas as circunferências têm raio medindo 5 cm.



Quanto mede o lado do triângulo formado pelos centros dessas 3 circunferências?

A) 5 cm
B) 10 cm
C) 15 cm
D) 30 cm

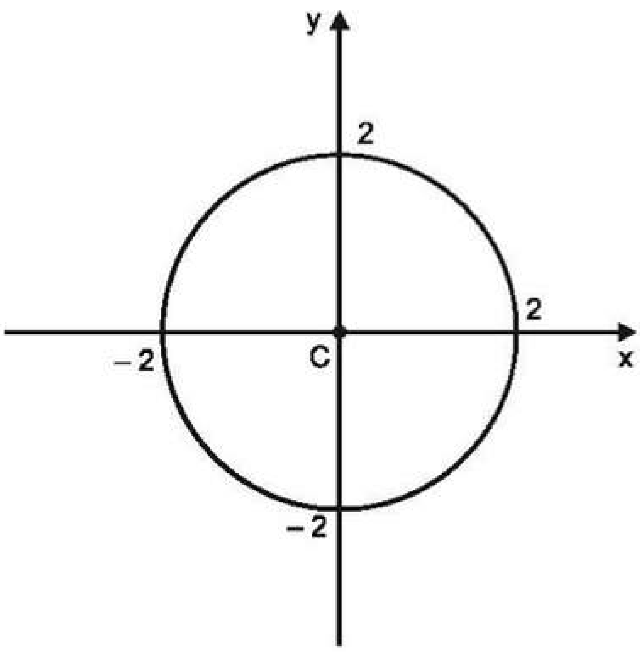
Atividade 5

(M120080B1) Dentre as equações abaixo a que representa uma circunferência é

A) $4x^2 + 4y^2 = 16$
B) $x^2 + y^2 = 0$
C) $4x^2 - 9y^2 = 16$
D) $x^2 + y^3 + 4x - 4x + 9 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$

Atividade 6

(M120098E4) Observe a circunferência abaixo.

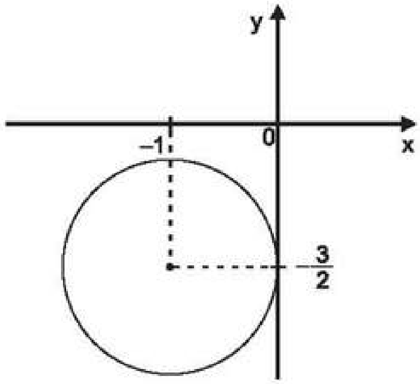


A equação reduzida dessa circunferência é

A) $x^2 + y^2 = 4$
B) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
C) $x^2 + y^2 = 2$
D) $x^2 - y^2 = 4$
E) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Atividade 7

(M120097E4) Observe abaixo a representação de uma circunferência.



A equação reduzida dessa circunferência é

A) $x^2 + y^2 = 1$

B) $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

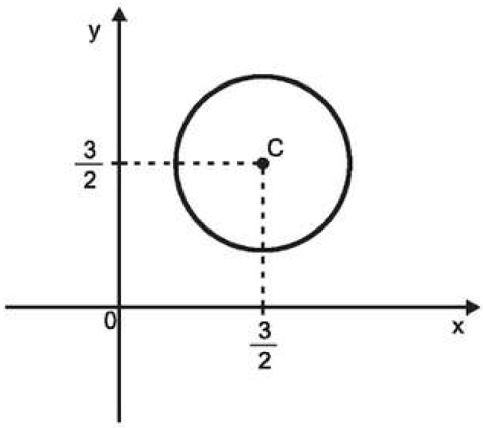
C) $(x + 1)^2 - \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

D) $(x - 1)^2 - \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

E) $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

Atividade 8

(M120099E4) Veja o esquema abaixo que representa uma circunferência de raio 1 cm.



A equação reduzida dessa circunferência é

A) $x^2 + y^2 = 1$

B) $(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 1$

C) $(x - \frac{3}{2})^2 - (y - \frac{3}{2})^2 = 1$

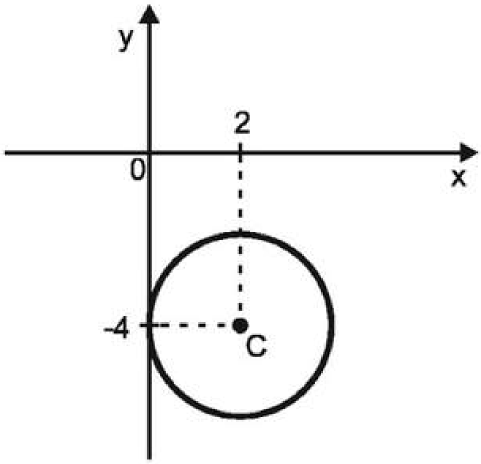
D) $(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 1$

E) $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 1$

Atividade 9

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

(M120100E4) Veja abaixo a circunferência que Marina desenhou na aula de Matemática.



A equação reduzida dessa circunferência é

A) $x^2 + y^2 = 4$

B) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 2$

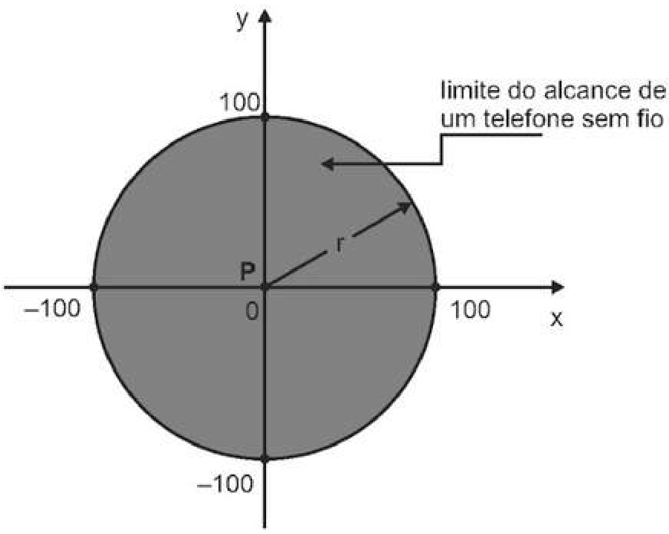
C) $(x - 2)^2 - (y + 4)^2 = 4$

D) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$

E) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$

Atividade 10

(M120150ES) Um engenheiro determinou a região de alcance de um telefone sem fio. Essa região é limitada por uma circunferência do centro P como a que está representada no plano cartesiano abaixo.



A equação dessa circunferência é

A) $x^2 + y = 100$

B) $x + y^2 = 100$

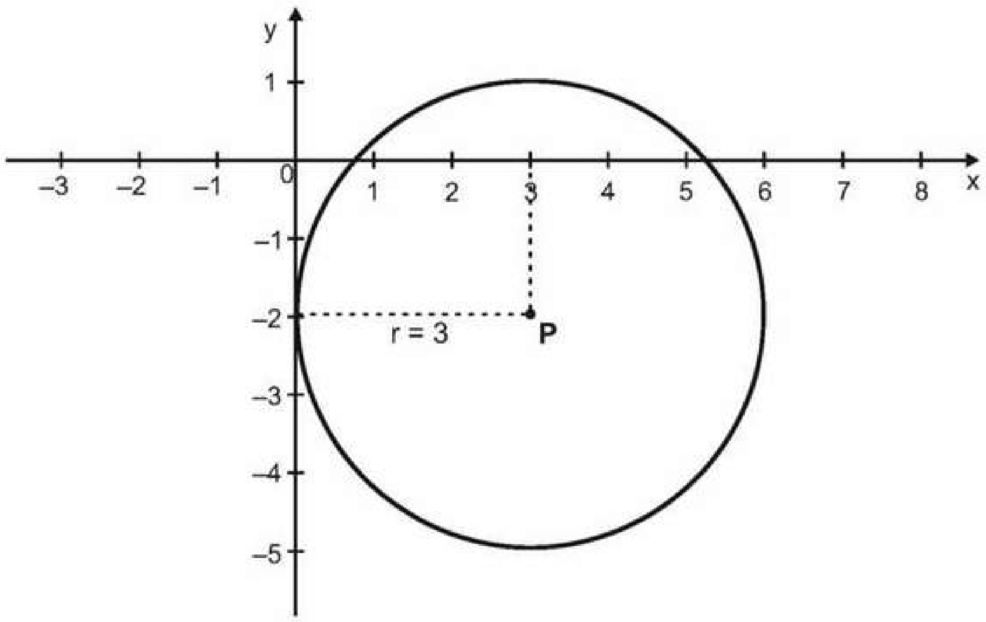
C) $x^2 + y^2 = 100$

D) $x^2 + y^2 = 10\,000$

E) $x + y = 10\,000$

Atividade 11

(M120179G5) João construiu, utilizando um programa de computador, a circunferência de centro P, conforme representado no plano cartesiano abaixo.

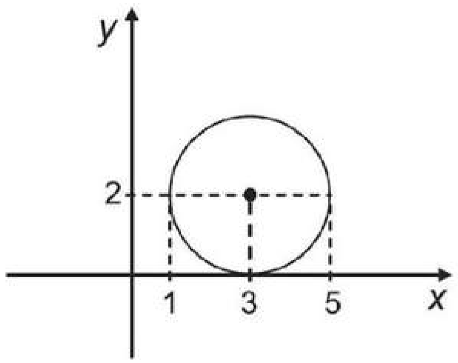


Qual é a representação algébrica dessa circunfência construída por João?

A) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 4 = 0$

Atividade 12

(M120013PE) Observe a circunferência na figura abaixo.



Qual é a equação dessa circunferência?

A) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
B) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
C) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 11 = 0$

GABARITO

ATIVIDADE 1: B
ATIVIDADE 2: B
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: A
ATIVIDADE 6: A
ATIVIDADE 7: E
ATIVIDADE 8: E
ATIVIDADE 9: E
ATIVIDADE 10: D
ATIVIDADE 11: A
ATIVIDADE 12: A

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. - 3. ed. - São Paulo : Moderna, 2016.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática Bianchini / Edwaldo Bianchini - 8. ed. São Paulo : Moderna, 2015.

Matemática, primeira série, ensino médio: autores. Ana Lúcia Bordeaux... [et al.], coordenação João Bosco Pitombeira; - Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. 376p. :il. - (Multicurso; Coleção completa; v.1)