GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

MATERIAL ESTRUTURADO

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
GERÊNCIA DE ENSINO MÉDIO

Matemática

1ª Série | Ensino Médio

28ª Semana

ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES E FUNÇÕES

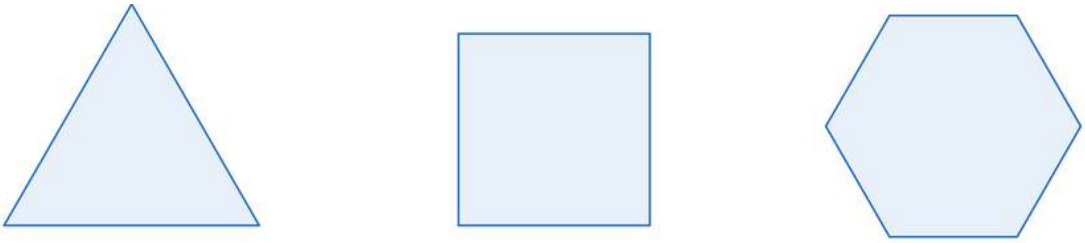
MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO PAEBES	**D058_M** Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT506** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	(**EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.			

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

Ao longo da história, os favos das abelhas têm fascinado os seres humanos pela complexidade e pela geometria.

Inúmeras **hipóteses** foram elaboradas para explicar o formato dos favos, que se aproxima de um hexágono regular. Uma delas trata de uma propriedade matemática: dentre os polígonos regulares que ladrilham o plano (cobrem o plano sem sobreposições e sem deixar espaços em branco), dado um perímetro fixo, o hexágono regular possui a maior área. Veja uma comparação entre os polígonos regulares que ladrilham o plano com um perímetro de 12 mm (a título de exemplo):



4 mm	3 mm	2 mm
$A \cong 6,93$ mm²	$A = 9$ mm²	$A \cong 10,39$ mm²

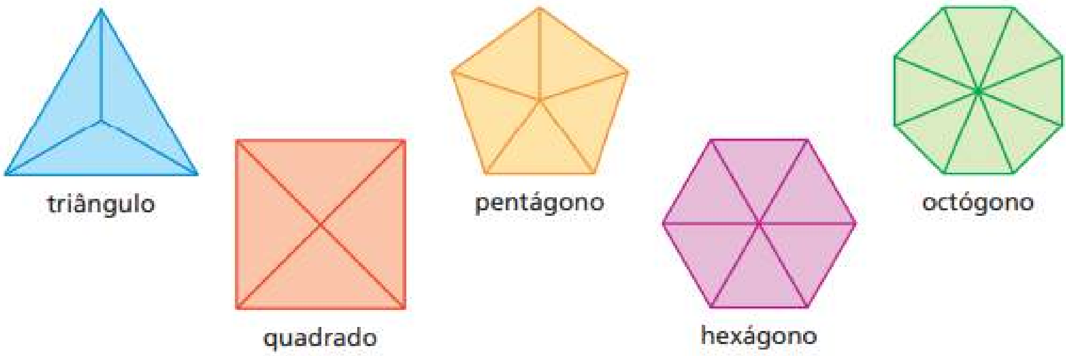
No presente material estruturado, vamos estudar as relações entre polígonos, seus perímetros, áreas e funções.

Bons estudos!

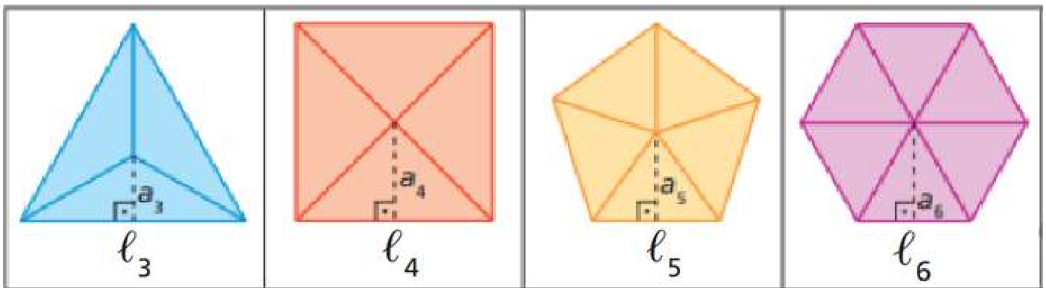
CONCEITOS E CONTEÚDOS

A ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES E A FUNÇÃO RELACIONADA

Sempre é possível decompor um polígono regular de n lados em n triângulos isósceles congruentes entre si.



Cada um desses triângulos tem pelo menos dois lados congruentes, de medida igual ao raio da circunferência circunscrita ao polígono.
A base e a altura de cada um desses triângulos são, respectivamente, o lado e o apótema do polígono regular. Como a área de cada um desses polígonos regulares é igual à soma das áreas dos triângulos que os compõem, podemos chegar às seguintes igualdades:



$A_3 = 3.\dfrac{\ell_3 . a_3}{2}$	$A_4 = 4.\dfrac{\ell_4 . a_4}{2}$	$A_5 = 5.\dfrac{\ell_5 . a_5}{2}$	$A_6 = 6.\dfrac{\ell_6 . a_6}{2}$

Dessa maneira, concluímos que, se um polígono regular tem n lados de medida ℓ_n, e apótema a_n , sua área A_n pode ser dada por:

$$A_n = n.\frac{\ell_n . a_n}{2} \Rightarrow A_n = \frac{n . \ell_n}{2} . a_n \Rightarrow \boxed{A_n = p . a_n}$$

A variável p representa o semiperímetro do polígono.

O apótema de um polígono é o segmento de reta que liga o centro da figura ao ponto médio (ponto que divide ao meio exatamente) de um dos lados do polígono.

A seguir, veremos como é possível organizar uma função que permita o cálculo da área de um polígono regular a partir da medida do lado.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A ÁREA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

PARA SABER MAIS:

- Apótema do triângulo equilátero

Clique aqui

O apótema do triângulo equilátero é calculado pela fórmula

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

Veja como chegar a essa conclusão apontando a câmera do celular para o QR CODE ao lado ou clicando no botão.

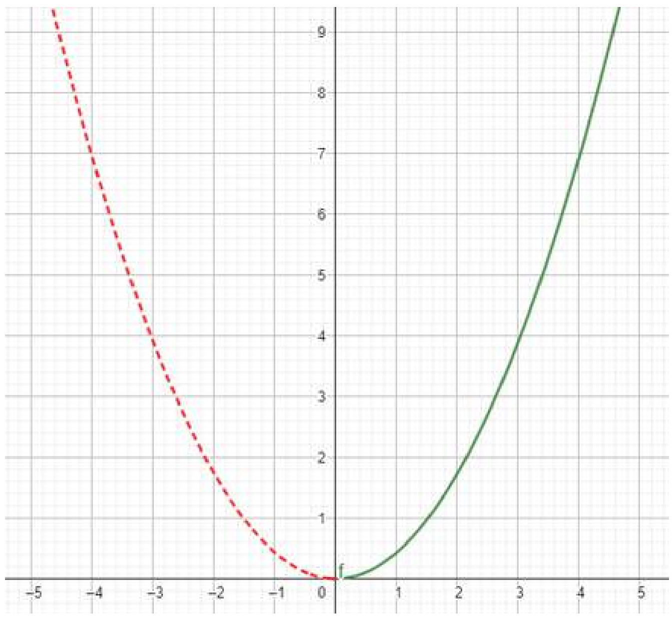
Substituindo essa igualdade na equação que permite cálculo da área do polígono regular, temos:

$$A = p.a \Rightarrow A = \frac{3l}{2}.\frac{l\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{12} \Rightarrow A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Ou seja, a função que calcula a área y do lado x dado é uma função quadrática.

$$y = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{4}.x^2$$

Observe o gráfico dessa função.



Para os valores de x menores que zero a função não está definida (não trabalhamos com medidas negativas para o lado). Assim, indicamos o traçado do gráfico para x < 0 com um tracejado.

Note que a função não é limitada superiormente. Ou seja, não podemos apontar o valor máximo para y (área).

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A ÁREA DO QUADRADO

Já no quadrado, o apótema pode ser facilmente calculado porque sua medida é igual à metade da medida do lado.

$$a = \frac{l}{2}$$

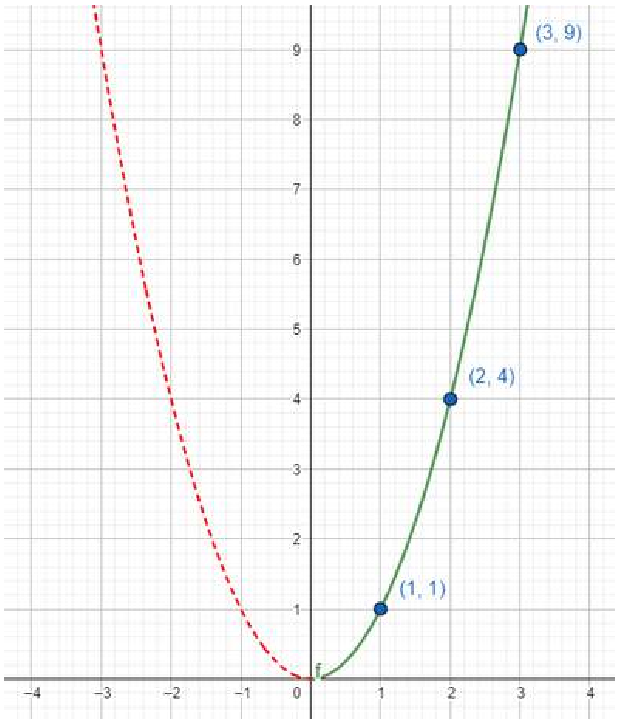
Dessa forma, podemos substituir essa igualdade na equação que permite cálculo da área do polígono regular.

$$A = p \cdot a \Rightarrow A = \frac{4l}{2} \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow A = \frac{4l^2}{4} \Rightarrow A = l^2$$

Ou seja, a função que calcula a área y, dado o lado x é uma função quadrática.

$$y = x^2$$

Observe o gráfico dessa função.



Para os valores de x menores que zero a função não está definida (não trabalhamos com medidas negativas para o lado). Assim, indicamos o traçado do gráfico para $x < 0$ com um tracejado. Destacamos alguns pontos como exemplos:

- para lado x = 1, a área y é igual a $1^2 = 1$
- para lado x = 2, a área y é igual a $2^2 = 4$
- para lado x = 3, a área y é igual a $3^2 = 9$

Note que a função não é limitada superiormente. Ou seja, não podemos apontar o valor máximo para y (área).

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A ÁREA DO HEXÁGONO REGULAR

A medida do apótema do hexágono regular coincide com a altura de um dos 6 triângulos equiláteros que podemos obter a partir dele. Desse modo, temos:

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

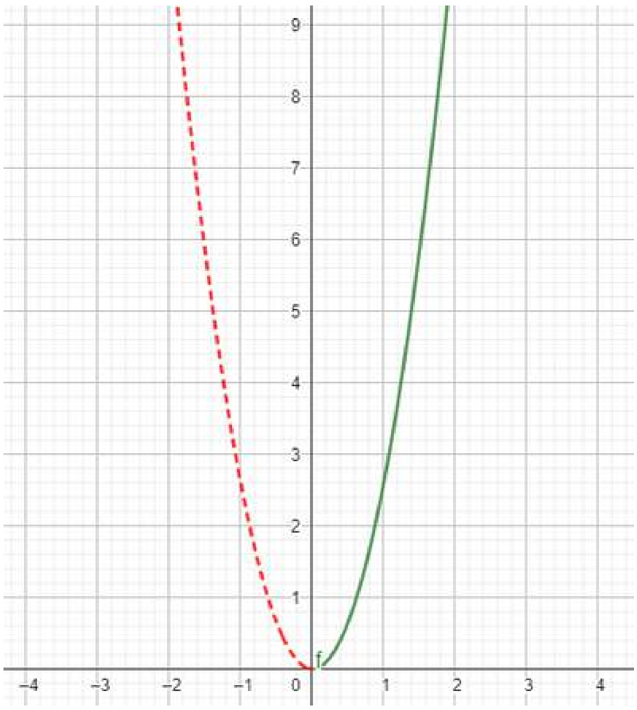
Dessa forma, podemos substituir essa igualdade na equação que permite cálculo da área do polígono regular.

$$A = p \cdot a \Rightarrow A = \frac{6l}{2} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

Então, a função que calcula a área y, dado o lado x é uma função quadrática.

$$y = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot x^2$$

Observe o gráfico dessa função.



Para os valores de x menores que zero a função não está definida (não trabalhamos com medidas negativas para o lado). Assim, indicamos o traçado do gráfico para x < 0 com um tracejado.

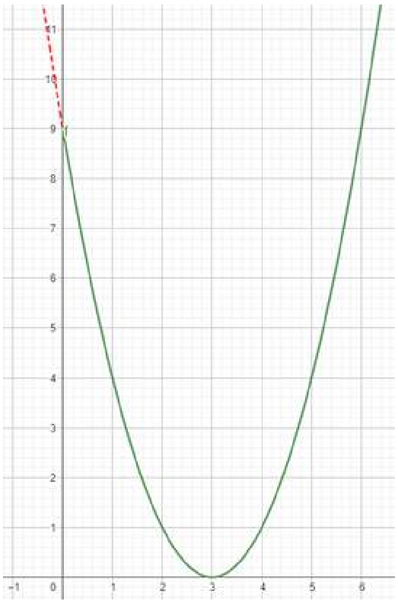
Perceba que esse gráfico é parecido com os outros dois apresentados (área do triângulo equilátero e área do quadrado). Isso se dá porque todos eles são do tipo $y = ax^2$ $(a > 0)$. Esse tipo de função possui parábola com concavidade para cima e vértice no ponto (0,0).

Novamente, não é possível apontar o valor máximo para y (área).

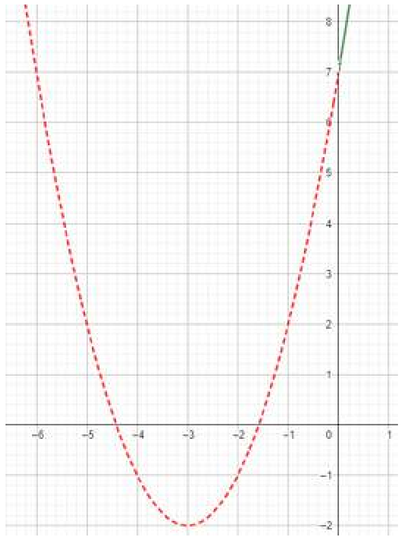
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Qual dos gráficos a seguir pode representar a área de um dodecágono regular (polígono regular de 12 lados) em função de seu lado?

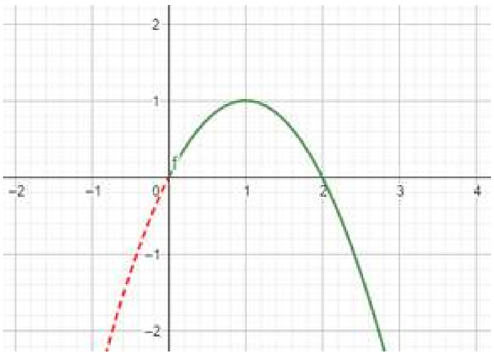
a)



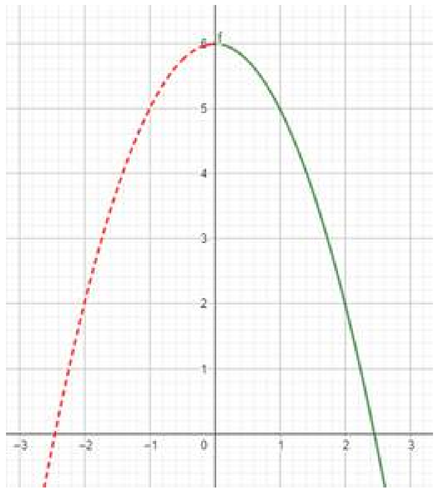
b)



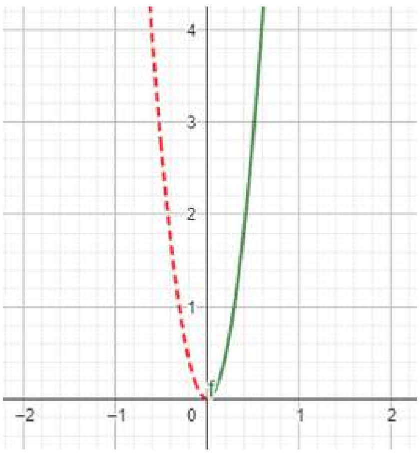
c)



d)



e)



Resolução:

Como vimos, um gráfico que represente a área y em função do lado x de um **polígono regular** deve ser de uma função quadrática do tipo $y = ax^2$ com a positivo.

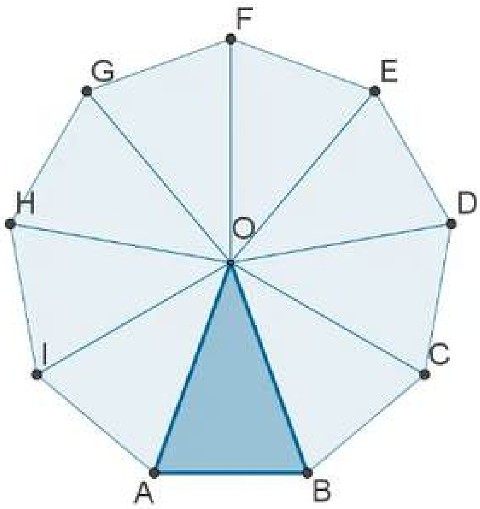
Quando a é positivo, a concavidade da parábola é para cima. Desse modo, podemos eliminar as alternativas *c* e *d*.

Além disso, a função do tipo $y = ax^2$ necessariamente tem seu vértice no ponto (0,0). Assim, a alternativa correta é a letra **e**.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

2

Um eneágono regular tem lado igual a 6 centímetros. Qual a medida de sua área?
Adote: apótema = 8,24 cm.



Resolução:

O perímetro desse polígono é igual a 6·9 = 54 cm. Então, o semiperímetro é 27 cm. A medida do apótema é 8,24 cm.

Usando a fórmula para área do polígono regular, teremos:

$$A = p \cdot a$$

$$A = 27 \cdot 8,24$$

$$A = 222,48$$

A área desse eneágono é igual a 222,48 cm².

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

A função que melhor representa a área de um um quadrado é:

A) $y = x$
B) $y = x^2$
C) $y = 2x$
D) $y^2 = x$
E) $y^2 = x^2$

Atividade 2

Observe na tabela a medida do lado (em cm) de um quadrado e sua área A (em cm²).

Medida do lado (ℓ em cm)	1	3	4	5,5	10	...	ℓ
Área (A em cm²)	1	9	16	30,25	100	...	ℓ^2

Fonte: Dados experimentais.

a) Qual é a variável dependente?

b) Qual é a variável independente?

c) Qual é a lei da função que associa a medida do lado com a área?

d) Qual é a área do quadrado cujo lado mede 12 cm?

Atividade 3

Considere um triângulo equilátero com lados de 6 cm. A área desse triângulo é:

A) $9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$
B) $18\,\mathrm{cm}^2$
C) $12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$
D) $36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$
E) $6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

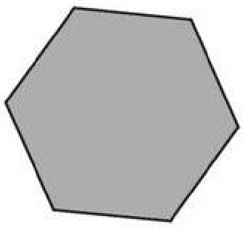
Atividade 4

Considere um quadrado com lados de 2,75 cm. A área desse quadrado é:

A) $7,5625\,\mathrm{cm}^2$
B) $5,5\,\mathrm{cm}^2$
C) $6,25\,\mathrm{cm}^2$
D) $7,25\,\mathrm{cm}^2$
E) $8\,\mathrm{cm}^2$

Atividade 5

(M120274G5) O desenho abaixo representa o piso de um ringue de luta livre que possui a forma de um hexágono regular, sendo que cada aresta mede 2 m.



A área, em metros quadrados, desse ringue é

A) $12\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $\sqrt{3}$

Atividade 6

Um dodecágono regular tem lado igual a 10 centímetros. Qual a medida de sua área? Adote: apótema = 18,6 cm.

Atividade 7

Um quadrado de área 100 cm² teve a medida de seus lados duplicada. A área desse novo quadrado é:

A) 100 cm²
B) 144 cm²
C) 200 cm²
D) 360 cm²
E) 400 cm²

Atividade 8

Quando variamos a medida x do lado de um quadrado, sua área também varia. Então, a área é dada em função da medida x do lado, ou seja, $f(x) = x^2$.

Um quadrado cuja área é 256 cm^2 tem cada lado medindo:

A) 12
B) 14
C) 16
D) 32
E) 64

Atividade 9

(M120564A9) Rodrigo construiu um canil quadrado, de 36 m^2 de área.
Qual é a medida do lado desse canil?

A) 40 m
B) 32 m
C) 12 m
D) 9 m
E) 6 m

Atividade 10

O perímetro de um quadrado é 60 cm. A área desse quadrado é:

A) 15 cm
B) 30 cm
C) 225 cm^2
D) 240 cm^2
E) 900 cm^2

Atividade 11

A área de um quadrado é 196 cm^2. O perímetro desse quadrado é:

A) 14 cm
B) 28 cm
C) 49 cm
D) 56 cm
E) 98 cm

GABARITO

ATIVIDADE 1: B
ATIVIDADE 2:
a) A variável dependente é a área A.
b) A variável independente é o lado l.
c) A lei da função que associa a medida do lado com a área é $A = l^2$
d) A área do quadrado cujo lado mede 12 cm é 144 cm^2
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: A
ATIVIDADE 5: B
ATIVIDADE 6: 1116 cm^2
ATIVIDADE 7: E
ATIVIDADE 8: B
ATIVIDADE 9: E
ATIVIDADE 10: C
ATIVIDADE 11: D

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática : ciência e aplicações, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Mori, Iracema. Matemática: ideias e desafios, 9º ano / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. -- 18.ed.-- São Paulo : Saraiva, 2015.