

Matemática

1ª Série | Ensino Médio

29ª Semana



ÁREA DE POLÍGONOS



MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRIPTOR DO PAEBES	D058_M Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	EM13MAT307 Empregar diferentes métodos para obtenção da medida de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	EF06MA11 consiste em: Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.			

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



Parte de uma das pinturas de parede do túmulo de Mena (por volta de 1400 a.C. a 1350 a.C.), na antiga Tebas (Egito), mostrando o trabalho de alguns agrimensores da época.

O RIO NILO E O CÁLCULO DE ÁREAS

O conceito de área já era utilizado pelos egípcios há milhares de anos. Na época das cheias, quando as águas do rio Nilo começavam a subir, era inundada uma região ao longo de suas margens. Após as águas baixarem, as margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornava o solo mais fértil para o cultivo. No entanto, ao baixarem as águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições.

Essas medições eram realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, em que a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de medida de comprimento.

A ideia de área está relacionada à medida de uma superfície. A área de uma região ou superfície pode ser obtida relacionando quantas unidades de área correspondem a ela.

Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

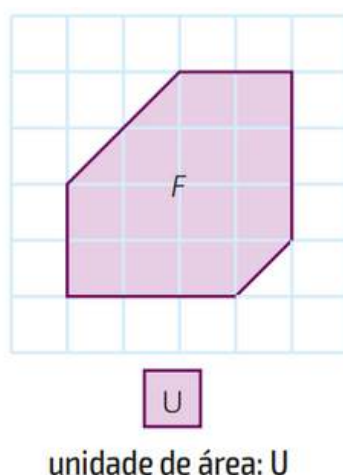
Neste material vamos estudar o cálculo de área de diferentes figuras planas.

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A IDEIA INTUITIVA DE ÁREA

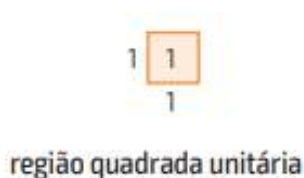
Suponha que queiramos medir a região do plano indicada por F na figura abaixo. Para isso, precisamos comparar F com uma unidade de área que chamaremos de U . O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região F contém a unidade de área U . Esse número assim obtido é a área de F .



Então, a área da região plana F é $13,5 U$, ou seja, área de $F = 13,5 U$.

REGIÃO QUADRADA UNITÁRIA

Vamos estabelecer como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ela será chamada região quadrada unitária.



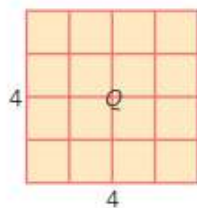
Qualquer região quadrada cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DO QUADRADO

Consideremos um quadrado Q cujo lado mede n , em que n é um número natural. Ele pode ser decomposto em n^2 quadrados justapostos, cada um com lado unitário e, portanto, com área 1. Logo, o quadrado Q tem área n^2 .

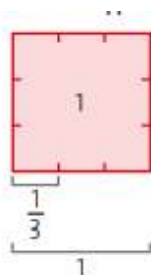
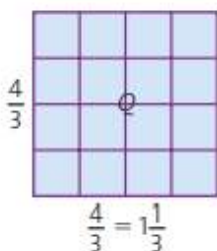
$$\text{área de } Q = n^2$$



Região quadrada de lado 4, decomposta em $16 = 4^2$ quadrados unitários.

Passemos agora para um caso mais geral, em que a medida do lado do quadrado Q é um número racional do tipo $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}^*$

Neste caso, pode-se decompor Q em a^2 quadrados, cada um dos quais com lado $\frac{1}{b}$. Assim, a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{b^2}$.



Quadrado de lado $\frac{4}{3}$, decomposto em $16 = 4^2$ quadrados menores, cada um com lado cuja medida é $\frac{1}{3}$ e cuja área é $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

$$\text{Área do quadrado } Q = \frac{16}{9} \left(\frac{4^2}{3^2} \right) \text{ ou } \left(\frac{4}{3} \right)^2.$$

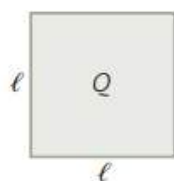
Assim, neste caso, a área do quadrado Q será dada por $a^2 \left(\frac{1}{b^2} \right) = \frac{a^2}{b^2}$, ou seja:

$$\text{área de } Q = \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

É possível provar que, se a medida do lado do quadrado Q for um número irracional k , ainda assim:

$$\text{área de } Q = k^2$$

Conclusão: A área de um quadrado Q cujo lado mede ℓ é dada por:



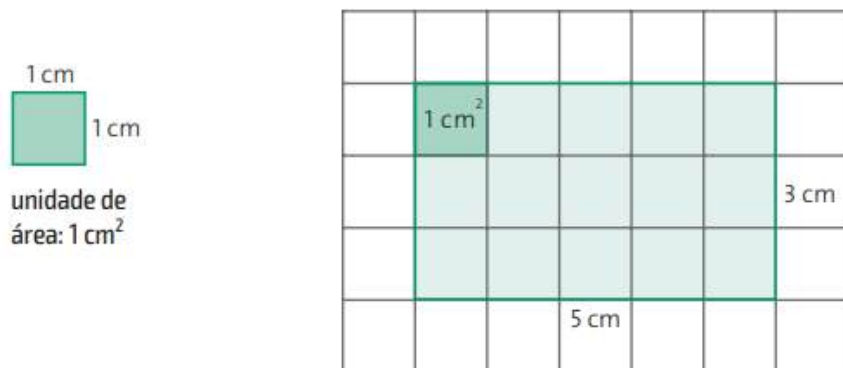
$$\text{área de } Q = \ell^2$$

sendo ℓ um número natural, racional positivo ou irracional positivo.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DO RETÂNGULO

O retângulo pintado abaixo contém 15 unidades de área. Portanto, sua área é de 15 cm^2 .



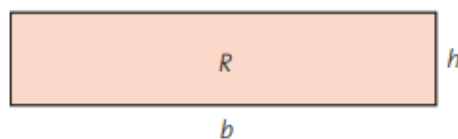
Observe que, em vez de contar quantas unidades de área estão contidas no retângulo, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura: $5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$.

Nesse caso, as medidas do comprimento e da largura são números naturais.

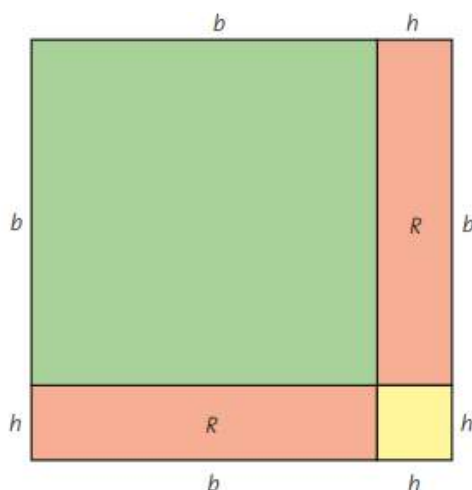
Vamos provar que, se a medida da base (b) e a medida da altura (h) forem números reais positivos quaisquer, a área do retângulo R é dada por:

$$\text{área de } R = b \cdot h$$

Consideremos um retângulo R de base b e altura h , em que b e h são números reais positivos:



Construímos um quadrado cuja medida do lado é $b + h$, que contém duas cópias de R , e mais dois quadrados, um cujo lado mede b e outro cujo lado mede h .



A área desse quadrado (Q) é dada pelo quadrado de uma soma:

$$\text{área de } Q = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \quad (\text{I})$$

Como os quadrados têm áreas iguais a h^2 e b^2 , concluímos que:

$$\text{área de } Q = b^2 + h^2 + 2 \cdot (\text{área de } R) \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), chegamos a:

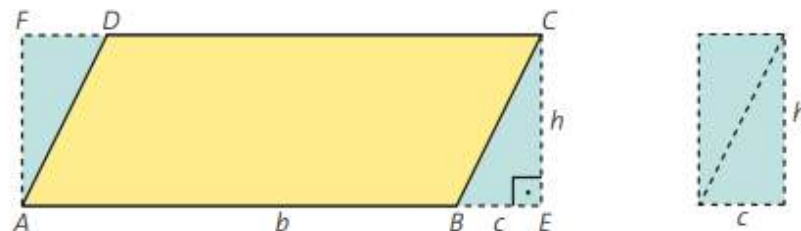
$$\text{área de } R = b \cdot h$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DO PARALELOGRAMO

Vamos calcular a área do paralelogramo ABCD tomando como base $\overline{AB}$ de medida b e sua altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AB}$) de medida h .

Examine a figura:



O paralelogramo está contido em um retângulo de base $b + c$ e altura h . A área desse retângulo é dada por:

$$(b + c)h = bh + ch$$

Observe que o retângulo é formado pelo paralelogramo mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ch . Assim:

$$bh + ch = (\text{área do paralelogramo}) + ch$$

Portanto:

$$\text{área do paralelogramo} = bh$$

ÁREA DO TRIÂNGULO

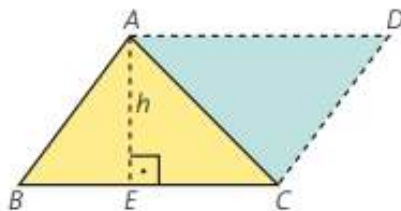
Conhecendo-se a área de um paralelogramo, fica muito simples determinar a área de um triângulo. Sabe por quê? Porque todo triângulo é metade de um paralelogramo de mesma base e mesma altura.

Veja:

Dado o triângulo ABC, cuja área queremos determinar, traçamos paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto D e o paralelogramo ABCD.

Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida h desse paralelogramo.

Já sabemos que, se a medida de $\overline{BC}$ é b , então a área do paralelogramo é bh . Mas os triângulos ABC e ADC são congruentes (pelo caso de congruência de triângulos ALA: têm um lado comum compreendido entre dois ângulos de mesma medida). Logo, esses triângulos têm áreas iguais.



Assim,

$$\text{área de ABCD} = 2 \cdot \text{área do triângulo ABC}$$

ou

$$bh = 2 \cdot \text{área do triângulo ABC}$$

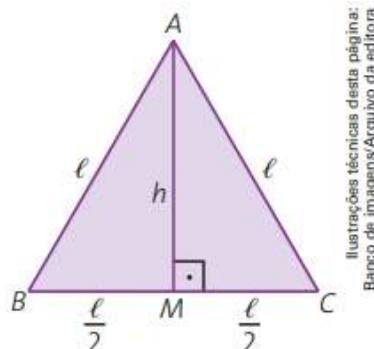
Portanto,

$$\text{área do triângulo ABC} = \frac{bh}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}bh$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

No triângulo equilátero, todos os lados são congruentes (ℓ , ℓ e ℓ), todos os ângulos internos são congruentes (60° , 60° e 60°), e toda altura é também mediana e bissetriz. Veja o cálculo da área, usando a base (ℓ) e a altura (h):



O triângulo AMC é retângulo em M e, portanto, vale a relação de Pitágoras:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

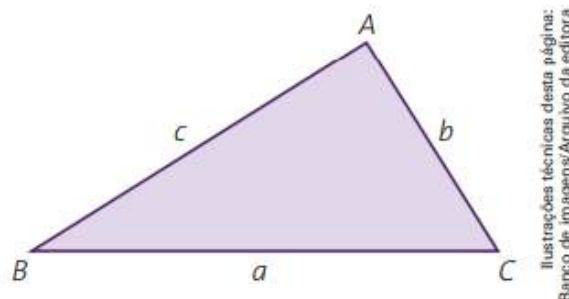
Portanto,

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ÁREA DE UM TRIÂNGULO SENDO CONHECIDOS OS TRÊS LADOS

Conhecidos os três lados (a , b e c) de um triângulo, a área do triângulo pode ser calculada pela fórmula de Heron.



Ilustrações técnicas desta página:
Banco de Imagens/Arquivo da editora

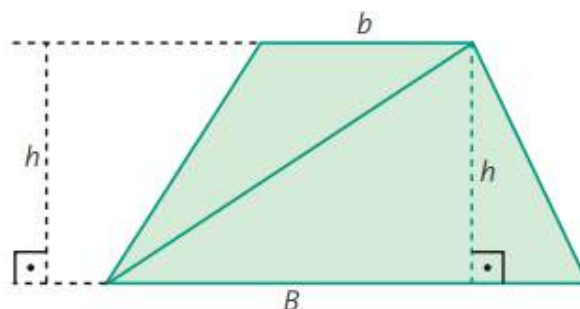
Sendo o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$, é possível demonstrar que:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(Fórmula de Heron, muito útil quando não conhecemos a altura do triângulo.)

ÁREA DE UM TRAPÉZIO

Podemos decompor uma figura plana em regiões cujas áreas já sabemos calcular. A área dessa figura plana será a soma das áreas das regiões em que a figura foi decomposta. Por exemplo, vamos decompor a área de um trapézio traçando uma de suas diagonais. Dividimos o trapézio em dois triângulos: um de base B e altura h e outro de base b e altura h .



A área de um triângulo você já aprendeu a calcular. Portanto, a área do trapézio é dada por:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B + b)h}{2}$$

Então:

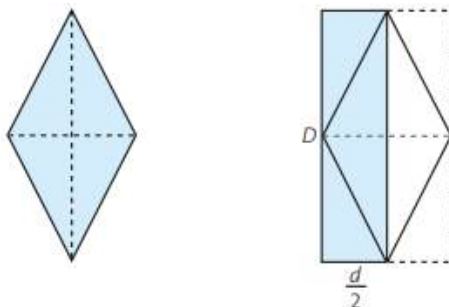
$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

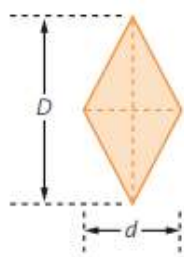
ÁREA DE UM LOSANGO

Todo losango é um paralelogramo, daí a área dele pode ser calculada como o produto da base pela altura. Entretanto, em geral, as dimensões de um losango são expressas pelas medidas de suas diagonais D e d .

Todo losango tem a mesma área de um retângulo com altura D e base $\frac{d}{2}$, como mostram as figuras:



Assim, a área de um losango é dada pela metade do produto das medidas das diagonais. Veja:

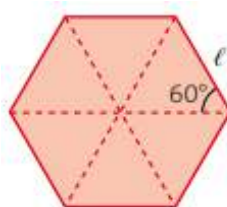


$$A = D \cdot \frac{d}{2} \text{ ou } A = \frac{Dd}{2}$$

ÁREA DE UM HEXÁGONO REGULAR

O hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros. Temos que a área do triângulo equilátero é dada por:

$$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$



Logo, a área de um hexágono regular é dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2}$$

ou seja,

$$A = \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2}$$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(M110018CE) Um terreno tem a forma retangular e as medidas dos seus lados são 5 m e 7 m. Qual é a medida da área desse terreno?

- A) 12 m²
- B) 24 m²
- C) 25 m²
- D) 35 m²
- E) 49 m²

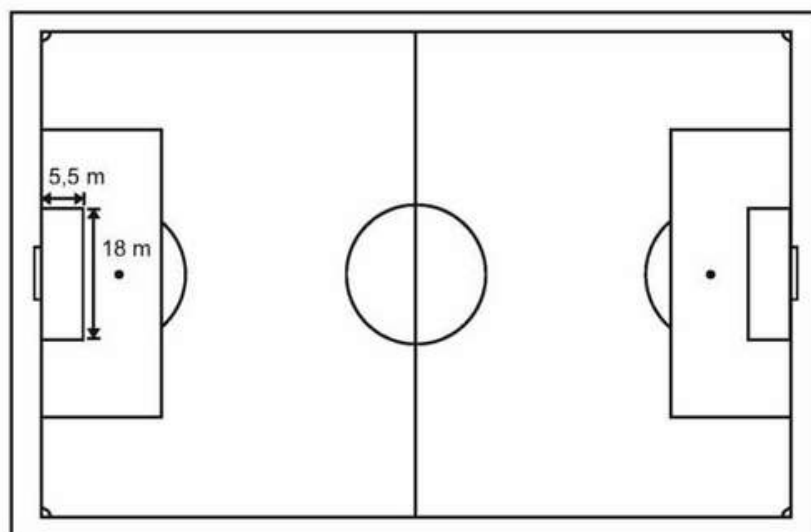
Atividade 2

(PAMA11030AC) Laura comprou um espelho retangular medindo 0,6 metros por 1 metro. A área a ser ocupada pelo espelho, em metros quadrados, será igual a

- A) 0,36
- B) 0,6
- C) 1,6
- D) 3,2
- E) 6

Atividade 3

(M120225G5) As duas pequenas áreas de meta (pequena área) do Maracanã sofreram, com a presença constante de jogadores naquela região, uma perda considerável de grama e, por isso, o administrador do estádio contratou uma empresa especializada para repor totalmente a grama dessas duas partes retangulares do campo, conforme ilustrado abaixo.



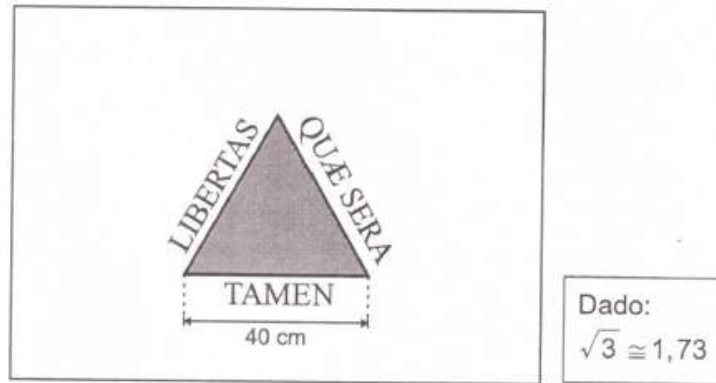
Qual é a medida da área, em m², a ser recuperada nessas duas regiões do Maracanã?

- A) 47
- B) 94
- C) 99
- D) 198
- E) 990

Atividade 4

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

E4039 – (PAEBES TRI) Uma costureira produziu um triângulo equilátero em tecido vermelho e o costurou em um tecido branco para fazer uma bandeira do estado de Minas Gerais. Essa bandeira, representada pela imagem abaixo, apresenta esse triângulo equilátero destacado de cinza e a medida de seu lado.



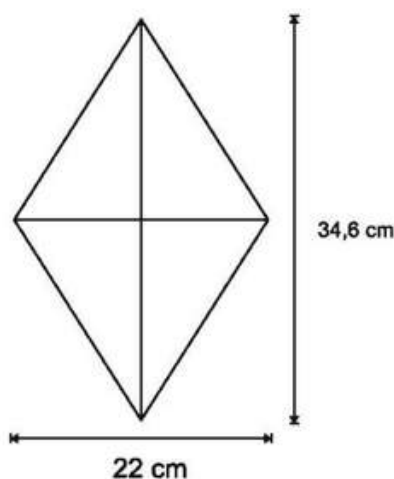
Após costurado, esse triângulo ocupou uma área de quantos centímetros quadrados dessa bandeira?

- A) 120 cm².
- B) 692 cm².
- C) 800 cm².
- D) 1 384 cm².
- E) 1 600 cm².

Atividade 5

(M120102E4) O desenho abaixo representa uma pipa que Maurício confeccionou para soltar no final de semana.

Maurício, Miguel, Tiago e Ivan compraram materiais para confeccionar pipas e soltarem no final de semana.



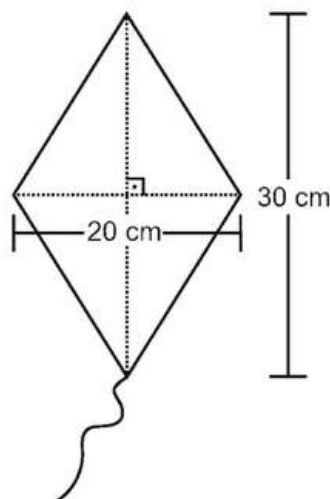
A quantidade, em centímetros quadrados, de papel que compõe essa pipa é:

- A) 56,60
- B) 82,00
- C) 380,60
- D) 420,25
- E) 761,20

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 6

(M090029PE) Pedro confecciona papagaios usando papel de seda e pedaços finos de madeira. O desenho abaixo mostra como ficou um de seus papagaios depois de pronto.

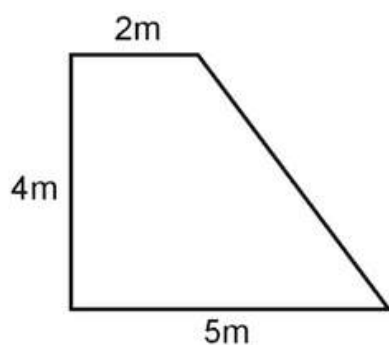


Quantos centímetros quadrados de papel de seda Pedro gastou para confeccionar esse papagaio?

- A) 25
- B) 50
- C) 300
- D) 600
- E) 3000

Atividade 7

(M120172A8) A figura abaixo representa um pátio em forma de trapézio.



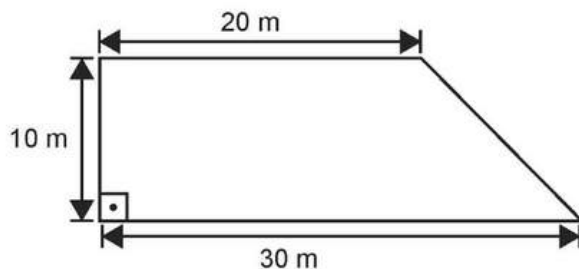
Para pavimentar esse pátio, quantos metros quadrados de cerâmica são necessários?

- A) 11 m^2
- B) 14 m^2
- C) 16 m^2
- D) 20 m^2
- E) 22 m^2

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 8

(M11223SI) A forma e as medidas do terreno que José comprou estão representadas na figura abaixo:



A área desse lote é igual a:

- A) 200 m²
- B) 250 m²
- C) 300 m²
- D) 350 m²
- E) 400 m²

Atividade 9

Em uma fazenda, planeja-se cercar uma região plana com formato de um hexágono regular, cuja região cercada tenha área medindo 255 m².

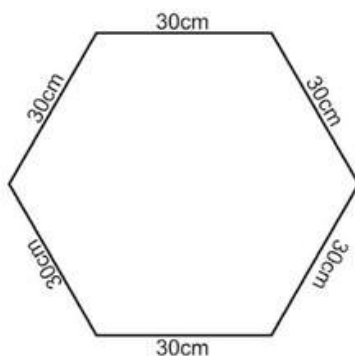
A medida de cada um dos seis lados dessa cerca é, em metros:

- A) 5,00
- B) 10,00
- C) 20,00
- D) 21,25
- E) 42,50

considere $\sqrt{3} = 1,7$

Atividade 10

(PAMA11034AC.1) Observe a representação de uma toalha na forma de um hexágono regular.



A área dessa toalha, em centímetros quadrados, será, aproximadamente,

Dado: $\sqrt{3} \approx 1,73$

- A) 900
- B) 2 335
- C) 7 785
- D) 46 710
- E) 54 000

GABARITO

ATIVIDADE 1: D
ATIVIDADE 2: B
ATIVIDADE 3: D
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: C
ATIVIDADE 6: C
ATIVIDADE 7: B
ATIVIDADE 8: B
ATIVIDADE 9: B
ATIVIDADE 10: B

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática : ciência e aplicações, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Mori, Iracema. Matemática: ideias e desafios, 9º ano / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. -- 18.ed.-- São Paulo : Saraiva, 2015.