

Matemática

3ª Série | Ensino Médio

30ª Semana



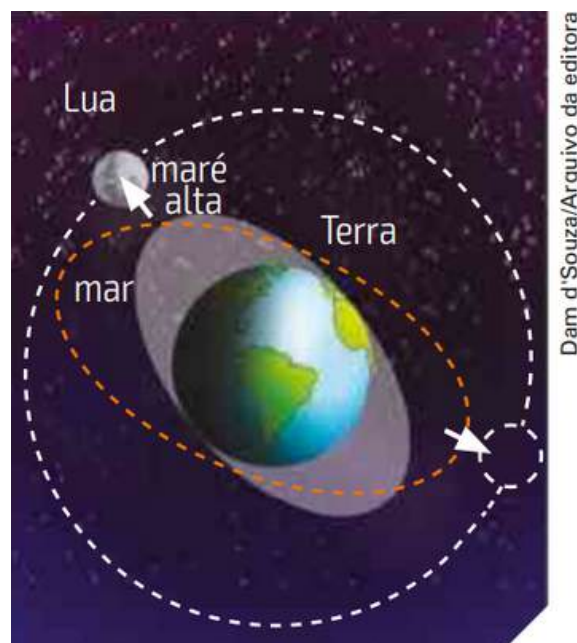
O SENO



MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRIPTOR DO PAEBES	D126_M Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	EM13MAT306 Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	EF09MA08 Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.			

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Os movimentos periódicos de elevação e abaixamento da superfície de oceanos, mares e lagos são provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a Terra.

As marés ocorrem em intervalos regulares de 6 horas e 12 minutos. Portanto, a cada 24 horas e 48 minutos, o mar sobe e desce duas vezes, constituindo o fluxo e refluxo das águas. À medida que a Terra gira, outras regiões passam a sofrer elevações, como se a subida de nível se deslocasse, seguindo a Lua.

No lado oposto da Terra dá-se o mesmo fenômeno: as águas também se erguem, de forma que uma elevação compensa a outra. Assim, nas regiões da costa, essas elevações das águas correspondem às marés altas.

Enquanto o nível das águas sobe em dois lados opostos na Terra, em outras duas regiões do globo (também diametralmente opostas) ele desce: é a maré baixa. A diferença entre a maré baixa e a maré alta é denominada amplitude das marés, medida por meio de uma régua graduada, ou marégrafo. Como o movimento das marés é periódico, as funções trigonométricas são amplamente utilizadas para fazer uma modelagem matemática desse fenômeno.

Texto extraído do livro Contexto & Aplicações, de Luiz Roberto Dante

Neste material nós vamos iniciar o estudo das funções trigonométricas, começando pela função seno.

Bons estudos!

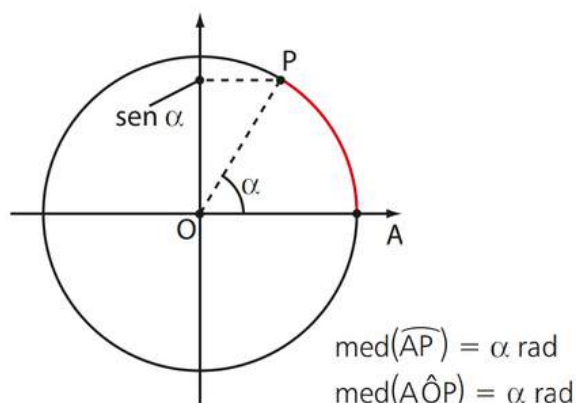
CONCEITOS E CONTEÚDOS

O SEÑO

No ciclo trigonométrico, considere um arco AP que possui medida angular α (em radianos). Podemos definir a ordenada do ponto P como o seno de α e a abscissa do ponto P como cosseno de α .

Neste material, estudaremos apenas o **seno** de α (ordenada do ponto P):

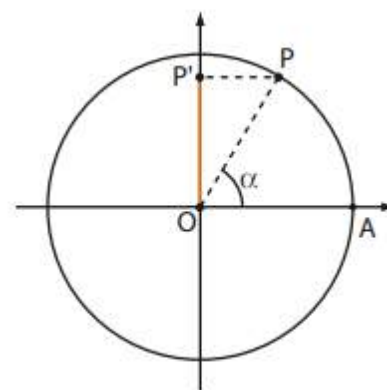
sen α = ordenada de **P**



Observe que, projetando ortogonalmente o ponto P sobre o eixo vertical, obtemos o ponto P'.

Considerando o sentido positivo ("para cima") do eixo vertical e tomando o segmento $\overline{OP'}$, podemos também definir o seno de α como a medida algébrica desse segmento, isto é,

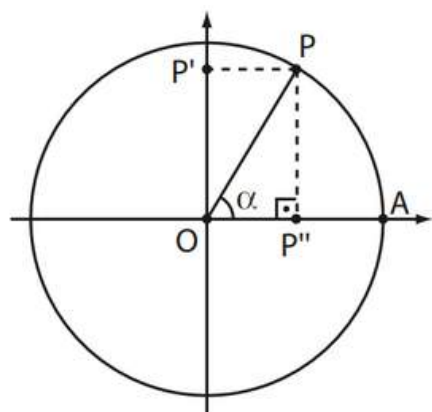
sen α = med($\overline{OP'}$)



Daqui em diante, o eixo vertical da circunferência trigonométrica será chamado eixo dos senos.

Observação:

Veja a figura abaixo. Ela nos permite compreender que a definição anterior é "compatível" com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:



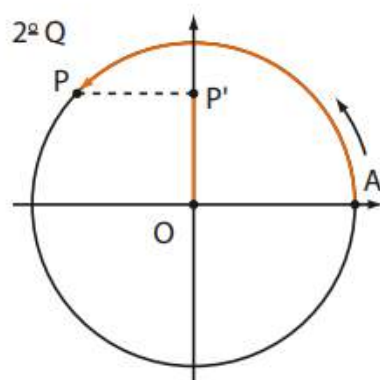
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Traçando o segmento $\overline{PP''} \parallel \overline{OP'}$, temos no $\triangle OPP''$:

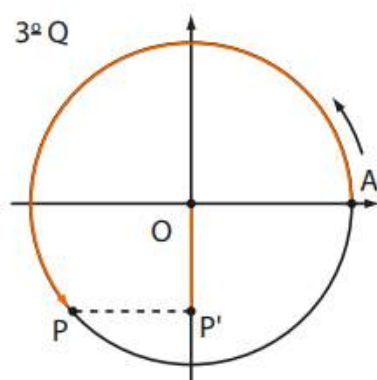
$$\text{sen } \widehat{AÔP} = \text{sen } \alpha = \frac{PP''}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP' = \text{med}(\overline{OP'})$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

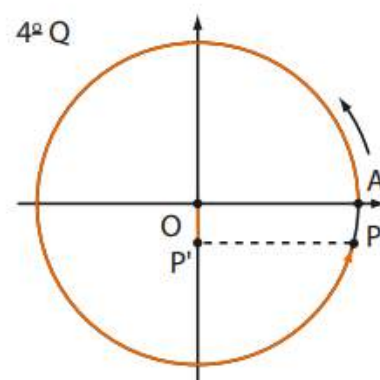
O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando o sentido positivo “para cima” no eixo dos senos e negativo “para baixo”, observe o sinal do seno de α em cada quadrante, à medida que a ordenada de P varia.



ordenada de **P** > 0
 $\text{sen } \alpha > 0$



ordenada de **P** < 0
 $\text{sen } \alpha < 0$

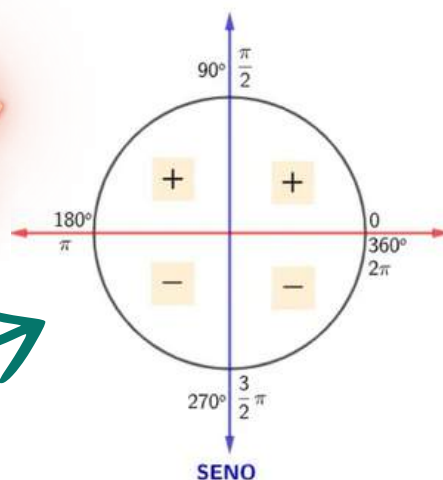


ordenada de **P** < 0
 $\text{sen } \alpha < 0$

Observação:

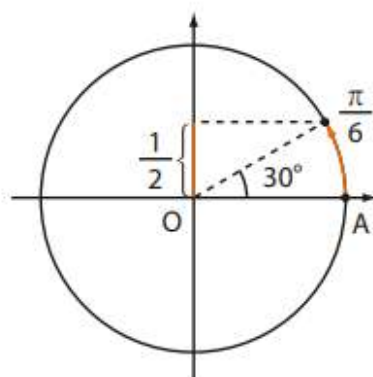
Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, temos que, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, $-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$, uma vez que a ordenada de qualquer ponto da circunferência trigonométrica varia de -1 a 1.

vale
LEMBRAR

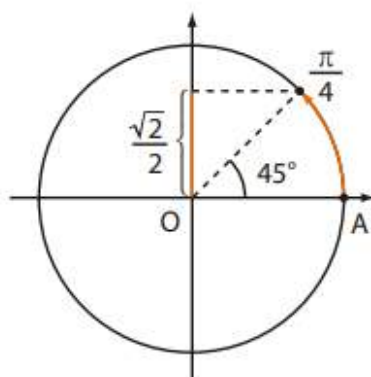


VALORES NOTÁVEIS

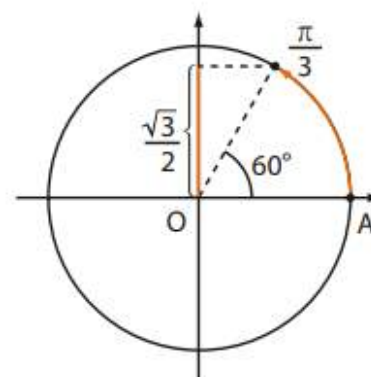
Já estamos familiarizados com o seno de alguns arcos, como $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$:



$$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$



$$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



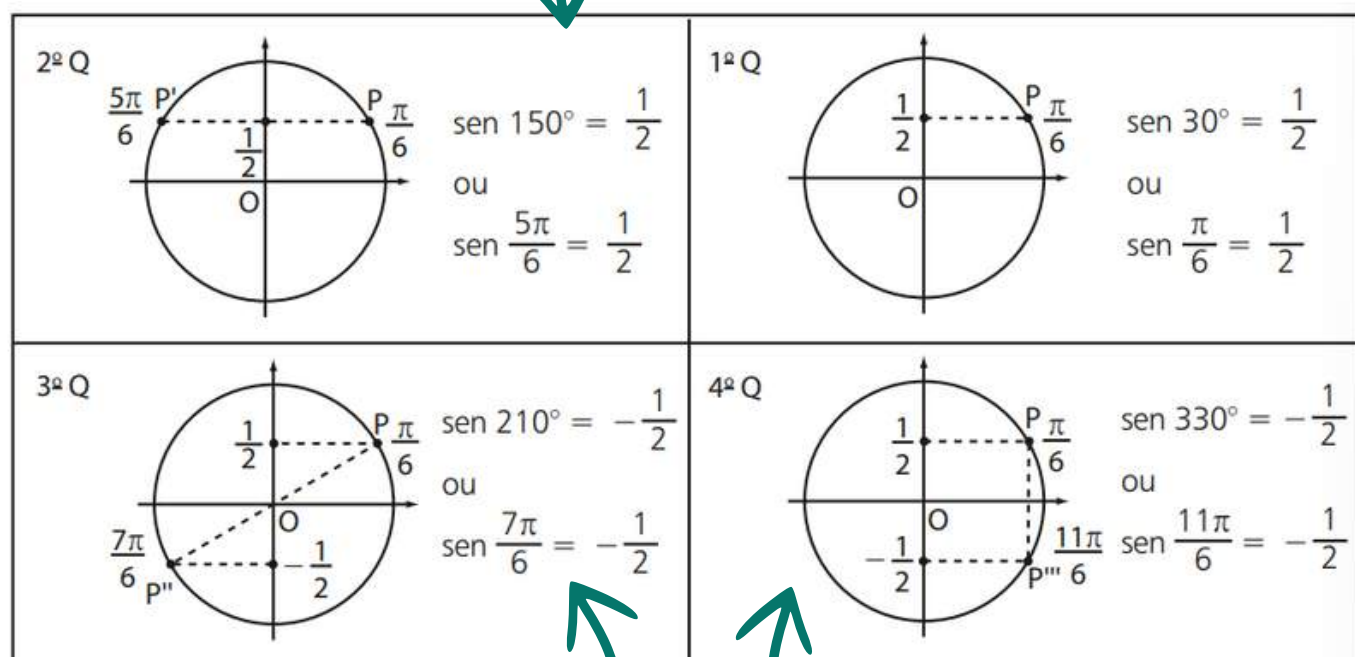
$$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando os valores acima, é possível obter, por simetria, o seno de outros arcos. Veja a seguir exemplos para o arco de medida $\frac{\pi}{6}$ radianos.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Acompanhe, na sequência dos quadrantes abaixo, os valores dos senos de arcos correspondentes a pontos simétricos de P. Nestes exemplos, P está relacionado a um arco AP de medida igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos.

O ponto P' pertence ao 2º quadrante e é simétrico a P em relação ao eixo y.

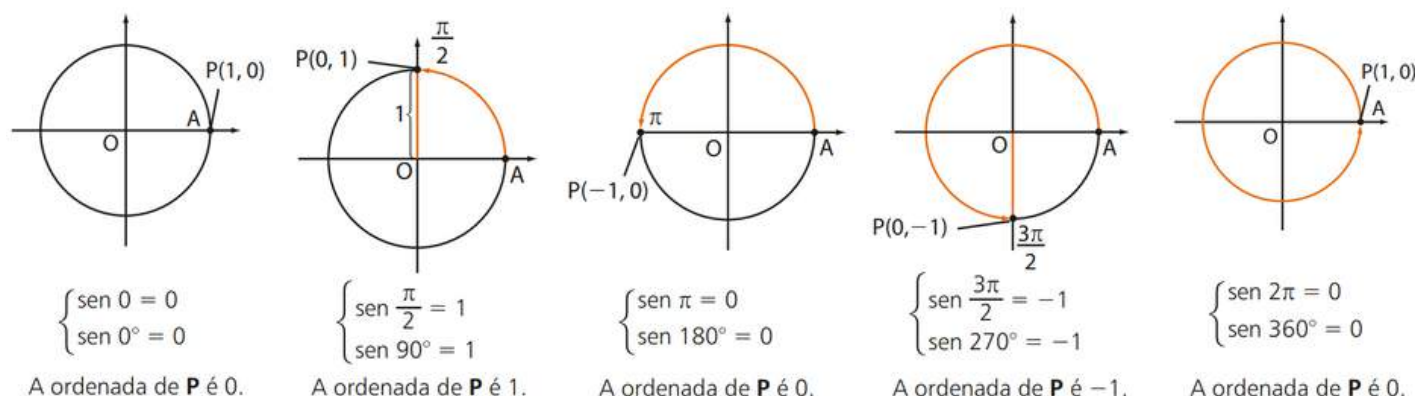


O ponto P'' pertence ao 3º quadrante e é simétrico a P em relação ao ponto O (origem).

O ponto P''' pertence ao 4º quadrante e é simétrico a P em relação ao eixo x.

Observe que determinamos o valor do seno de um arco comparando-o com o seno de um outro arco **simétrico** que pertence ao 1º quadrante.

É possível obter o valor do seno de arcos cujos pontos P coincidem com os pontos de intersecção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados, observando a ordenada de P.



CONCEITOS E CONTEÚDOS

NA CALCULADORA

Nas calculadoras científicas, é possível obter o valor do seno (e de outras razões trigonométricas, como veremos adiante) de um arco qualquer expresso em graus ou em radianos.

Em graus, é preciso ajustar a calculadora na configuração [DEG] (degree, em inglês, significa grau) utilizando a tecla [MODE].

Para obtermos o valor de $\sin 36^\circ$, por exemplo, é preciso seguir a sequência abaixo: Primeiro ajustamos a configuração da calculadora para “graus”:

[MODE] , [DEG]

Em seguida, utilizamos a tecla [SIN] que fornece o valor do seno:

Ao clicar nas teclas [SIN] , [3] , [6] , [=], obtemos o valor aproximado 0,587785252

Em radianos, é preciso ajustar a calculadora na configuração [RAD], usando a tecla [MODE].

Para obtermos o valor de $\sin \frac{\pi}{5}$, que corresponde a 36° , é preciso seguir a sequência abaixo:

Ajustamos a configuração para “radianos”:

[MODE] , [RAD]

[SIN] , [(] , [π] , [:] , [5] , [)] , [=]

Obtemos o valor aproximado 0,587785252.

Observe a importância do uso dos parênteses: se pressionássemos

[sin] , [π] , [:] , [5] , a calculadora “entenderia” a operação $\frac{\sin \pi}{5}$, que é,

obviamente, diferente de $\sin \left(\frac{\pi}{5} \right)$ e obteríamos, como resultado, o número zero, pois $\sin \pi = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Qual é o valor de:

a) $\sin 240^\circ$?

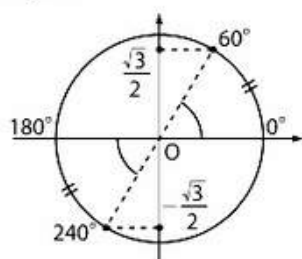
b) $\sin 135^\circ$?

c) $\sin \frac{5\pi}{3}$?

d) $\sin \frac{7\pi}{6}$?

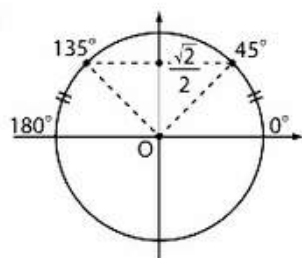
Solução:

a)



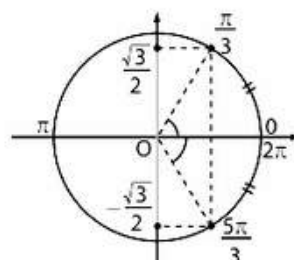
$$\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)



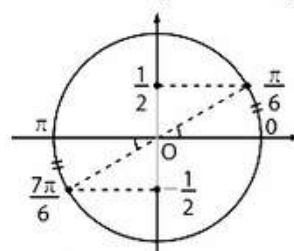
$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Observe, inicialmente, que $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$:



$$\sin \frac{5\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) Note que $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$:



$$\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2

Utilizando uma tabela trigonométrica, obtenha o valor de $\sin 200^\circ$. Confira a resposta usando uma calculadora científica.

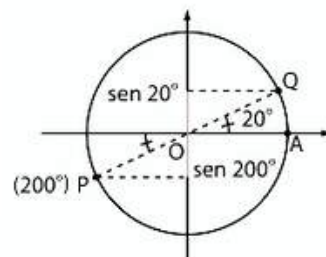
Solução:

No cálculo de $\sin 200^\circ$ podemos traçar, a partir do ponto **P**, o diâmetro da circunferência, obtendo o ponto **Q** no 1º quadrante.

Temos: $\text{med}(\widehat{AOQ}) = 200^\circ - 180^\circ = 20^\circ$.

Daí, $\sin 200^\circ = -\sin 20^\circ$.

Consultando uma tabela trigonométrica, obtemos o valor aproximado para o $\sin 20^\circ = 0,342$. Portanto, $\sin(200^\circ) \cong -0,342$



Na calculadora, basta pressionar

sin → **2** **0** **0** → **=** → -0.342020143

desde que ela esteja configurada na opção **DEG**. Obtemos o valor aproximado -0,342020143.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

São diversas as aplicações da Trigonometria em diferentes campos do conhecimento, como na realização de cálculos de distâncias inacessíveis (Trigonometria nos triângulos) e o estudo de **fenômenos periódicos**. Esses fenômenos possuem oscilações que se repetem sistematicamente e podem ser observados na Música, por exemplo.

O diapasão é um instrumento metálico em forma de “U”, utilizado, por exemplo, para afinar instrumentos musicais, porque emite um som puro (sem mistura de ondas), produzido por vibrações após ser golpeado.

O osciloscópio é um aparelho que permite visualizar ondas sonoras.



O microfone é responsável por captar o som.

visor

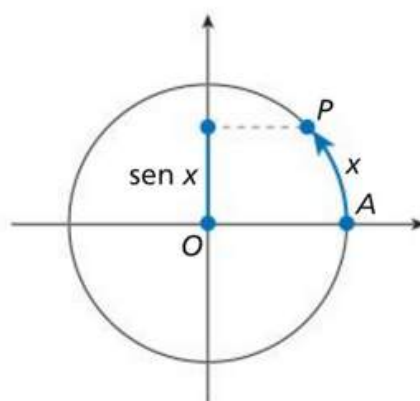
Representação das ondas sonoras produzidas pelo diapasão

Estudaremos agora as funções trigonométricas, começando neste material pela função seno e algumas de suas aplicações.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FUNÇÃO SENO

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x . Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada do ponto P é o **seno do arco** de medida x



A função **seno** é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\text{sen } x$, ou seja, $f(x) = \text{sen } x$.

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \text{sen } x$, com base nos dados de uma tabela de valores para x . Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta, para os quais o seno já é conhecido:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\text{sen } x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\text{sen } x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

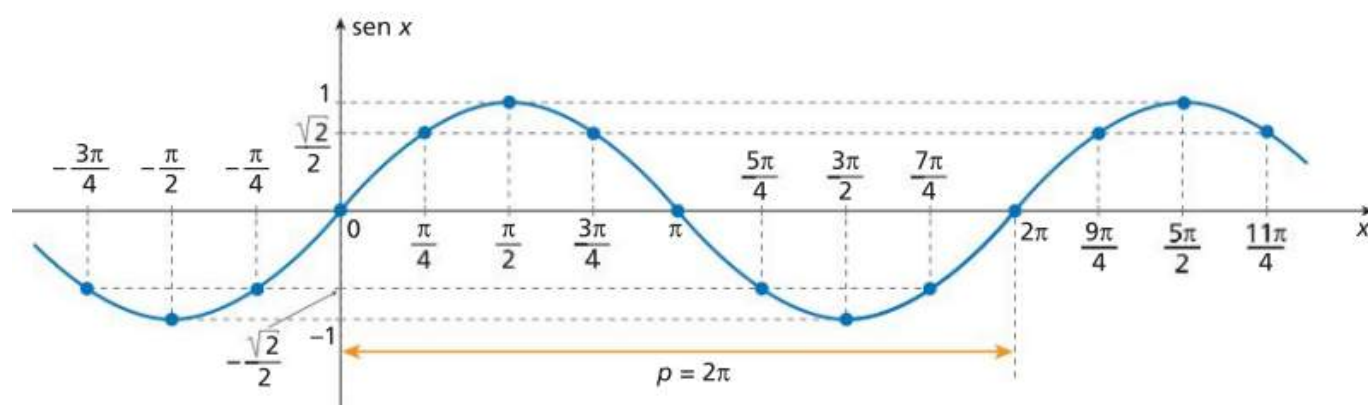
Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o seno de x assume os valores do seno de arcos da 1ª volta. Assim, a função seno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \dots = \text{sen } (x + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.

Assim, o gráfico da função seno se estende por todo o eixo x e tem o seguinte formato:

CONCEITOS E CONTEÚDOS



Características da função seno:

Por definição, o domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, chamado de senoide, observamos ainda que a função seno:

- é periódica, de período 2π (a curva se repete a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de $\sin x$ estão no intervalo $[-1, 1]$; logo, seu conjunto imagem é $IM = [-1, 1]$.
- tem amplitude (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico) igual a 1.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6

Determinar os valores reais de m para os quais existe a igualdade:

$$\sin(x) = 3m - 2$$

Resolução:

Sabemos que os valores da função $f(x) = \sin x$ variam no intervalo $[-1, 1]$.

Assim:

$$\begin{array}{lcl} -1 \leq \sin x \leq 1 & \leftarrow & \text{substituindo} \\ & & \text{sen } x \text{ por } 3m - 2 \\ -1 \leq 3m - 2 \leq 1 & \leftarrow & \text{adicionando 2 em} \\ & & \text{todos os membros} \\ 1 \leq 3m \leq 3 & \leftarrow & \text{dividindo todos} \\ \frac{1}{3} \leq m \leq 1 & \leftarrow & \text{os membros por 3} \end{array}$$

Então, m assume valores em $\mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{3} \leq m \leq 1$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7

Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

$$Z(t) = 850 + 400 \cdot \sin \frac{\pi t}{4},$$

em que o tempo t é medido, em ano, a partir de janeiro de 2000 ($t = 0$).

- a) Quantas zebras havia em janeiro de 2016?
- b) Qual foi a população mínima de zebras atingidas nessa região?
- c) De acordo com a função dada, quando foi a primeira vez que a população de zebras foi mínima?
- d) De quanto em quanto tempo a população de zebras se repete?

Resolução:

a) Em janeiro de 2016, temos $t = 16$. Substituindo t por 16 na equação dada, obtemos:

$$Z(16) = 850 + 400 \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot 16}{4} \right)$$

$$Z(16) = 850 + 400 \cdot \sin (4\pi)$$

$$Z(16) = 850 + 400 \cdot 0 = 850$$

Logo, em janeiro de 2016 havia 850 zebras.

b) A população mínima ocorre quando $\sin \frac{\pi t}{4}$

atinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$\sin \frac{\pi t}{4} = -1$. Então, para esse valor, temos:

$$Z(t) = 850 + 400 \cdot (-1) = 450$$

Logo, a população mínima foi de 450 zebras.

c) Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, $\sin x$ atinge seu valor mínimo (-1) para $x = \frac{3\pi}{2}$.

Então, a função dada será mínima para:

$$\frac{\pi t}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow t = 6$$

Portanto, a população de zebras atingiu seu valor mínimo, pela primeira vez, 6 anos após janeiro de 2000, ou seja, em janeiro de 2006.

d) A função seno tem período 2π . Assim:

$$\frac{\pi t}{4} = 2\pi \Rightarrow \frac{t}{4} = 2 \Rightarrow t = 8$$

Logo, a população de zebras se repete de 8 em 8 anos.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

TRANSLADANDO O GRÁFICO

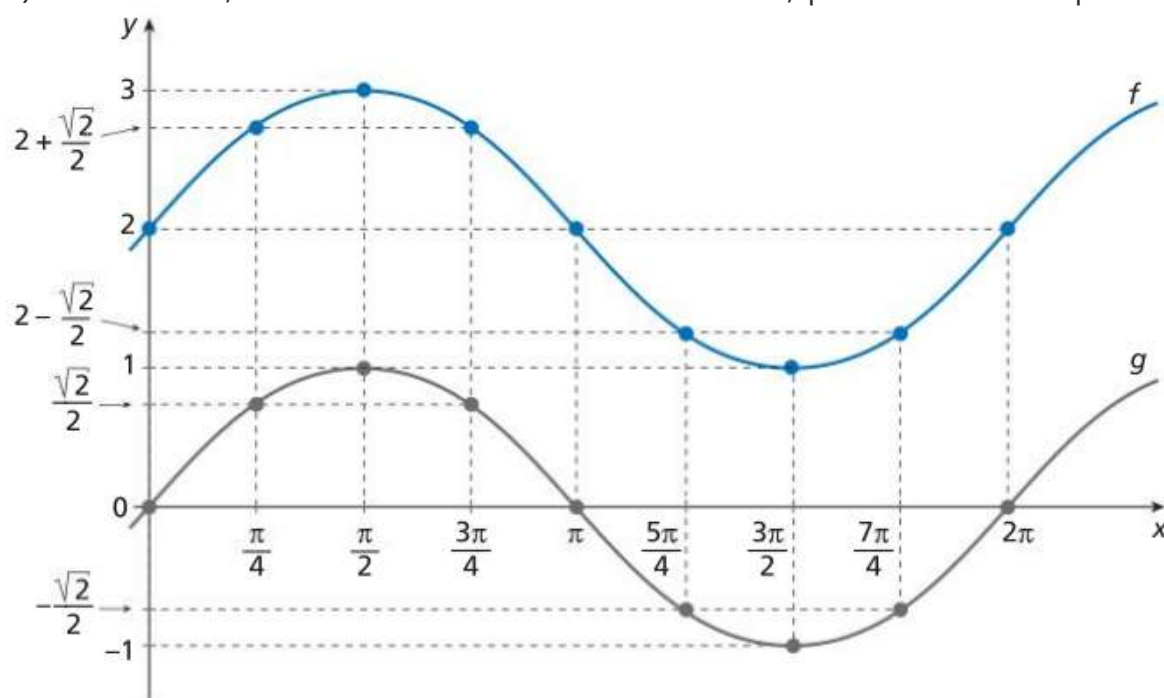
Transladar significa deslocar. A seguir, veremos alguns gráficos de funções que podem ser obtidos por meio de deslocamentos verticais ou horizontais dos gráficos das funções fundamentais. Acompanhe.

$$f(x) = 2 + \sin x$$

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2 + \sin x$	2	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Construímos, então, os gráficos das funções dadas por $g(x) = \sin x$ e $f(x) = 2 + \sin x$, em um mesmo sistema de eixos, para efeito comparativo:



Observe que, transladando (deslocando) o gráfico de g , ponto a ponto, duas unidades para cima, obtemos o gráfico de f . Agora, o gráfico oscila entre os valores mínimo 1 e máximo 3. Ou seja, o conjunto imagem de f é $[1, 3]$. Note que o domínio, o período e a amplitude, em relação à função g , não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = c + \sin x$ são obtidos a partir de uma translação de $|c|$ unidades em relação ao gráfico $y = \sin x$ da seguinte forma:

- se $c > 0$, a translação é para cima;
- se $c < 0$, a translação é para baixo.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ALTERANDO O PERÍODO

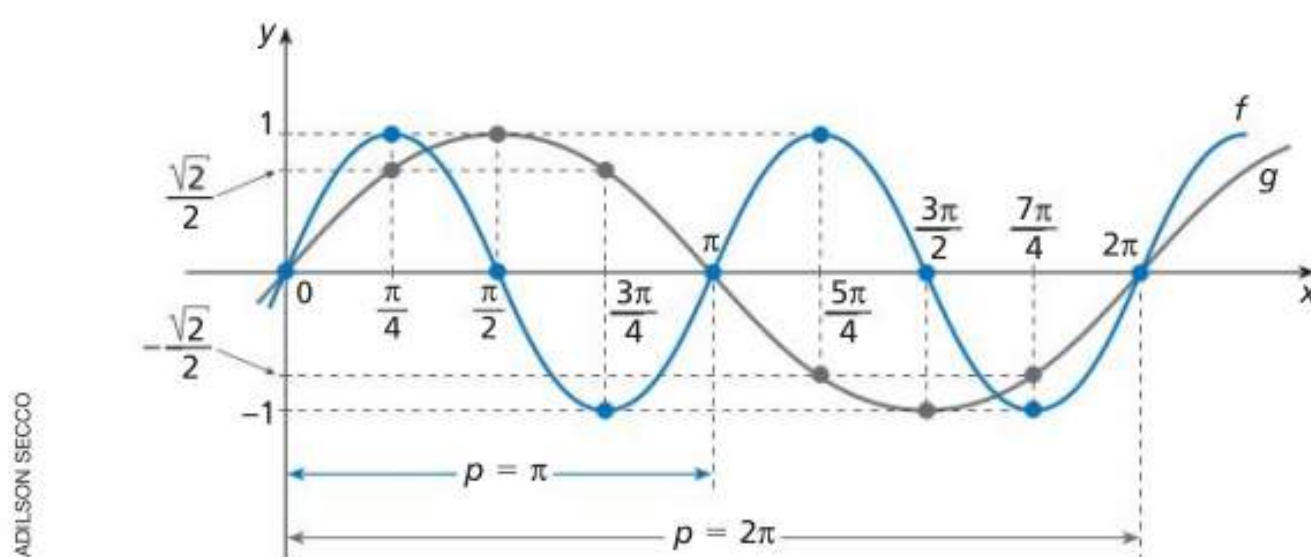
Nos tópicos anteriores, estudamos alguns gráficos que são obtidos a partir de translações horizontais ou verticais ou modificação na amplitude dos gráficos das funções trigonométricas fundamentais, embora conservem o período. Neste tópico, veremos exemplos de gráficos que sofrem alteração de período em relação às funções fundamentais. Acompanhe.

Vamos construir o gráfico da função f dada por $f(x) = \sin 2x$ e compará-lo com o da função g dada por $g(x) = \sin x$.

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Construímos, então, os gráficos das funções g e f dadas por $g(x) = \sin x$ e $f(x) = \sin 2x$ no mesmo sistema de eixos:



Observe que f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem e mesma amplitude que g , porém tem período igual a π , ou seja, metade do período de g .

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

É correto afirmar que $\sin 150^\circ$ é

- A) $-\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- E) 1

Atividade 2

É correto afirmar que $\sin \frac{\pi}{2}$ é:

- A) $-\frac{1}{2}$
- B) $\frac{1}{2}$
- C) 0
- D) 1
- E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Atividade 3

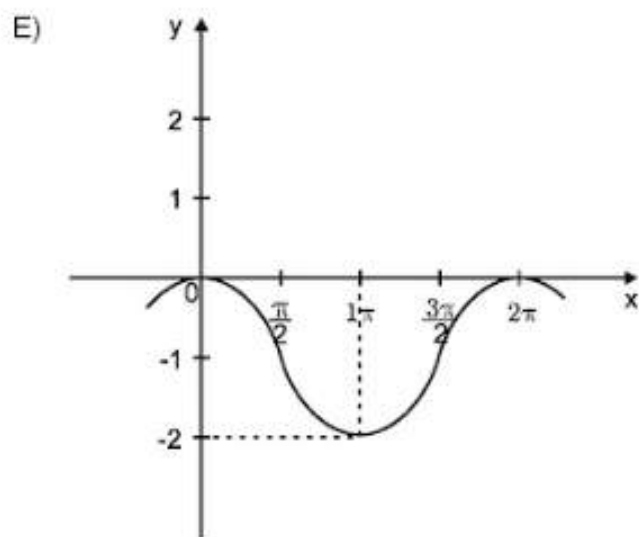
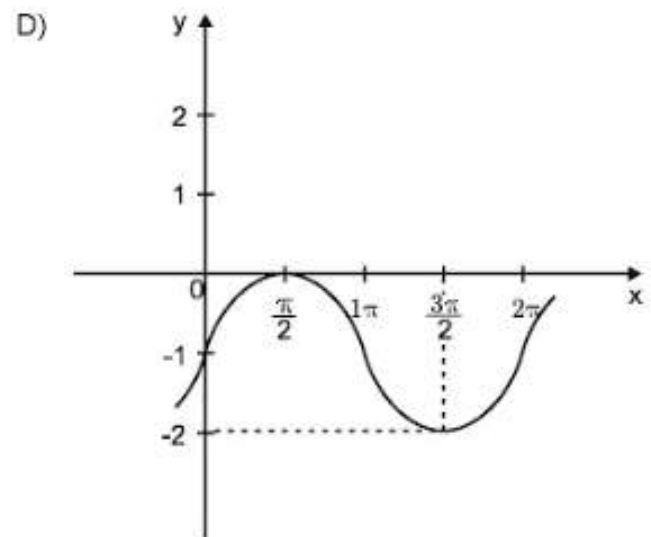
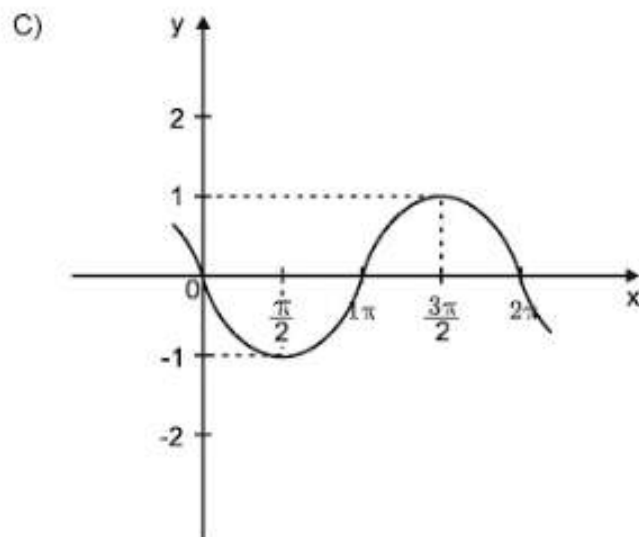
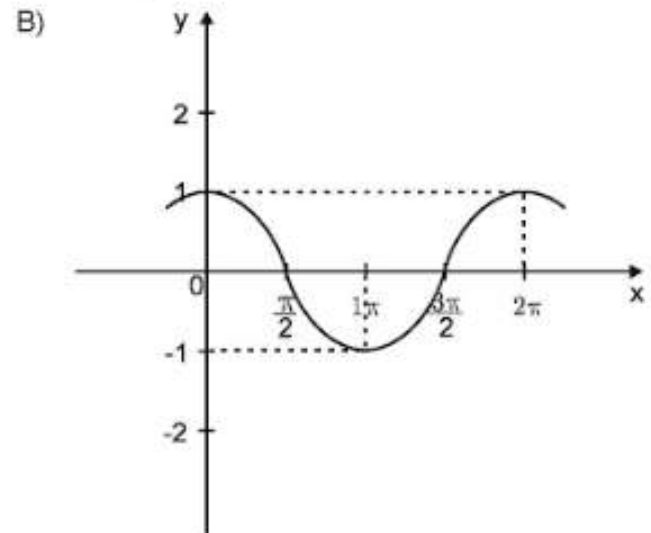
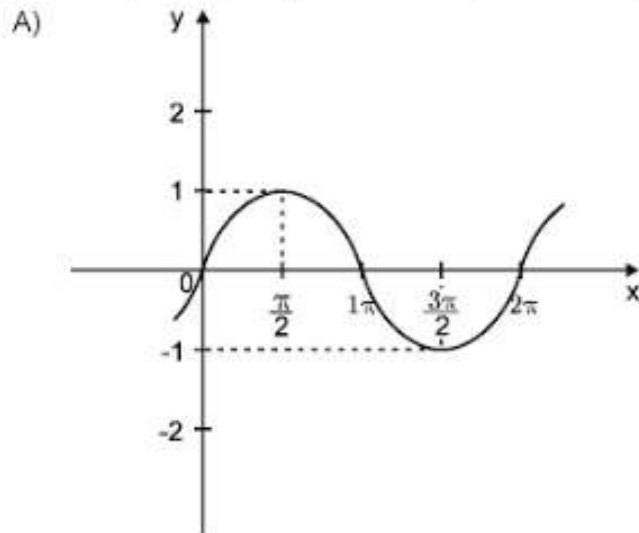
É correto afirmar que $\sin 360^\circ$ e $\sin 60^\circ$ são, respectivamente,

- A) 0 e $\frac{1}{2}$
- B) 1 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C) 0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e 0
- E) 1 e $\frac{1}{2}$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 4

(M110083CE) A função $f(x) = \sin x$, é representada graficamente por

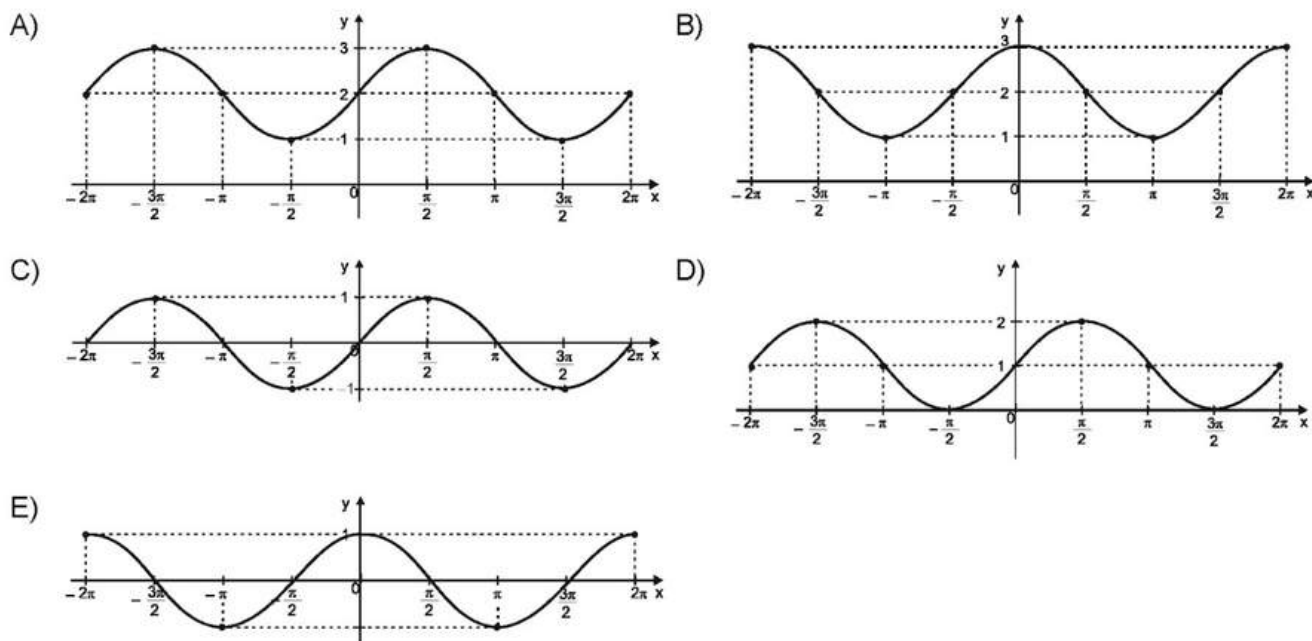


ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

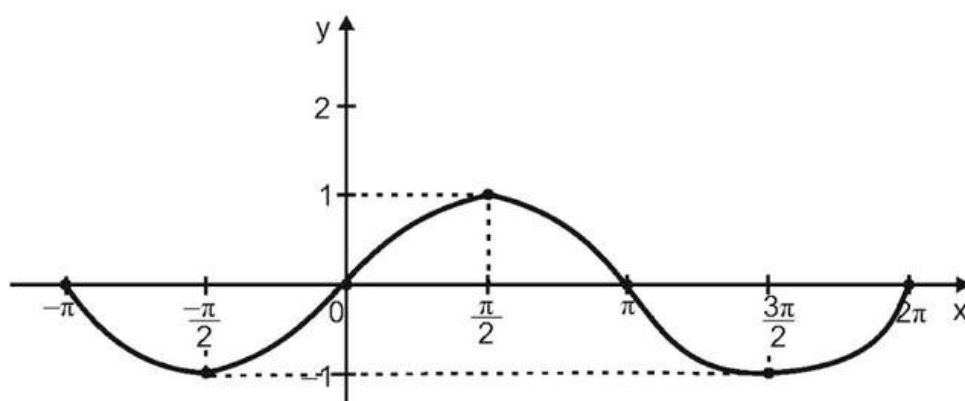
(M120243A9) O gráfico da função trigonométrica $y = 2 + \text{sen} x$ definida no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ foi traçado em um plano cartesiano.

O plano cartesiano em que essa função foi representada é



Atividade 6

(M120527A9) No plano cartesiano abaixo foi representada uma função trigonométrica $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.



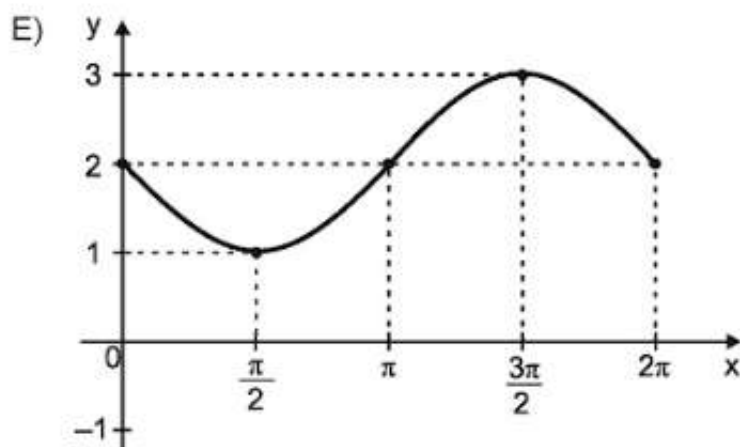
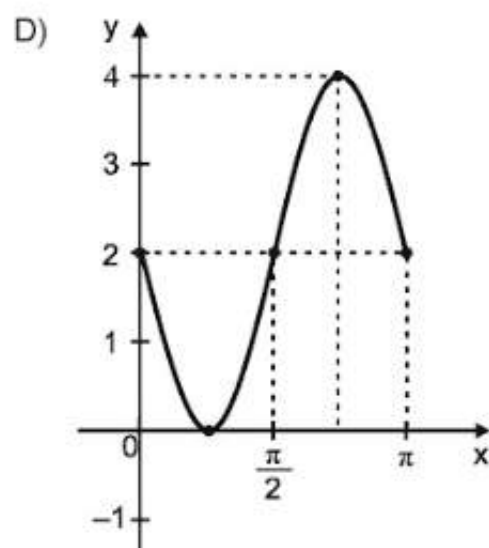
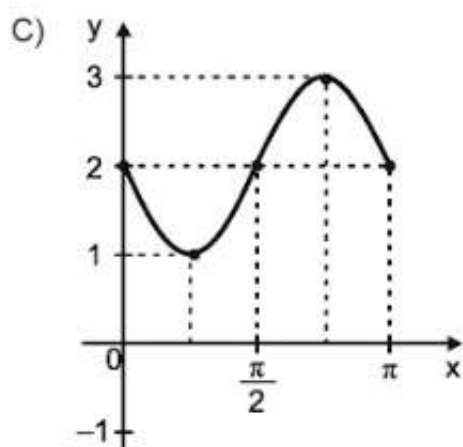
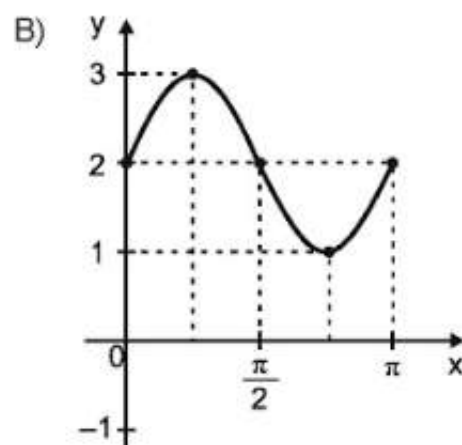
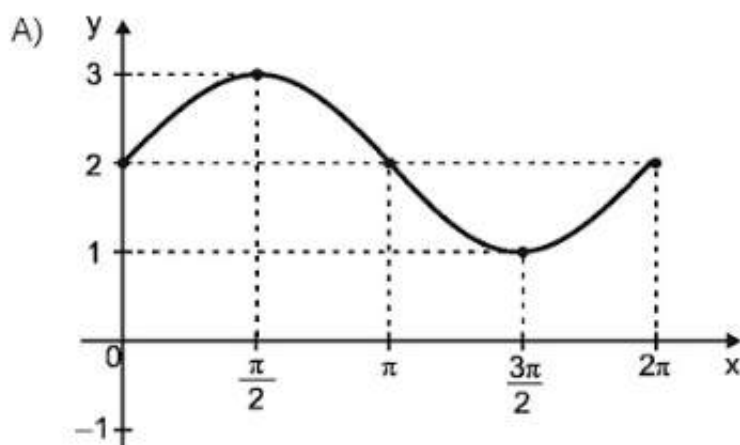
Qual é a função trigonométrica f representada nesse gráfico?

- A) $f(x) = \text{sen}(x)$
- B) $f(x) = 2 \text{sen}(x)$
- C) $f(x) = \text{sen}(2x)$
- D) $f(x) = \text{sen}(4x)$
- E) $f(x) = \text{sen}(8x)$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 7

A função $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(2x)$ definida no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ foi representada em um plano cartesiano. O gráfico que representa essa função é:

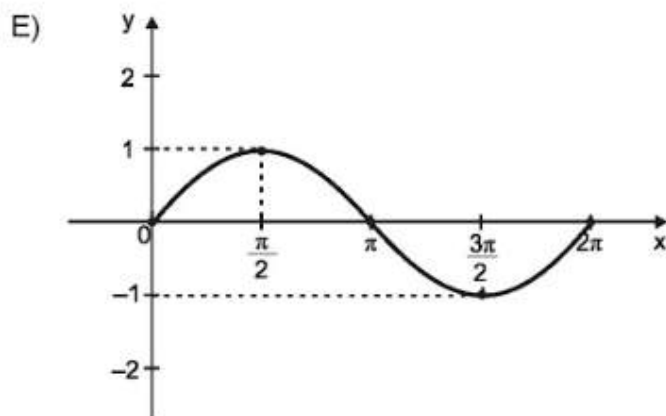
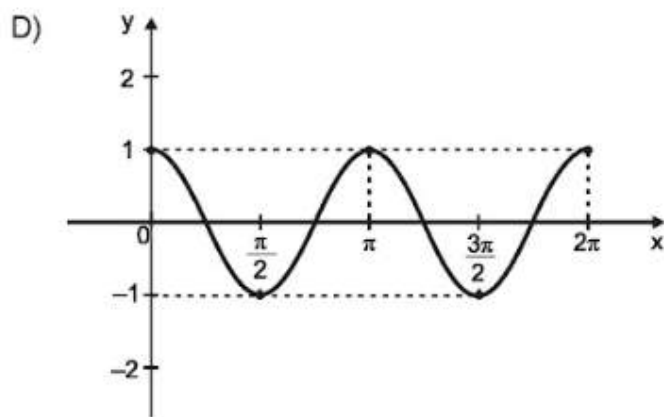
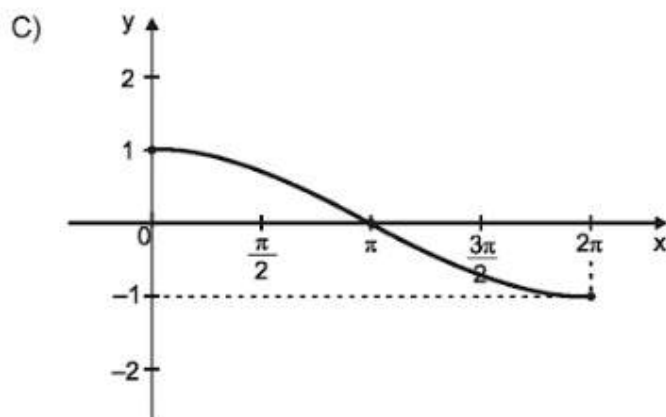
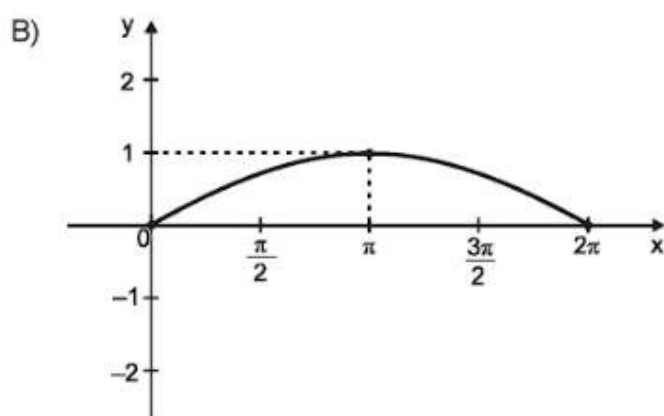
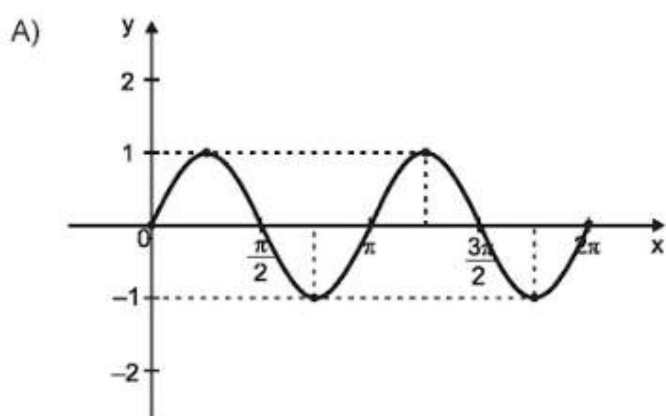


Desafio!

Atividade 8

(M120601A9) A função $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, na qual $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, foi representada graficamente em um plano cartesiano.

O plano que contém a representação gráfica dessa função é



GABARITO

ATIVIDADE 1: B

ATIVIDADE 2: D

ATIVIDADE 3: C

ATIVIDADE 4: A

ATIVIDADE 5: A

ATIVIDADE 6: A

ATIVIDADE 7: B

ATIVIDADE 8: B

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Chavante, Eduardo Quadrante matemática e suas tecnologias : trigonometria e sequências / Eduardo Chavante, Diego Prestes. -- 1. ed. -- São Paulo : Edições SM, 2020.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. - 3. ed. - São Paulo : Moderna, 2016.

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Matemática : ciência e aplicações : ensino médio, volume 2 / Gelson Iezzi. . . [et. al.] . - 9. ed. - São Paulo : Saraiva, 2016.

Souza, Joamir Roberto de #Contato matemática, 2º ano / Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia. - 1. ed. - São Paulo : FTD, 2016 - (Coleção #contato matemática)