

Matemática

3ª Série | Ensino Médio

29ª Semana



ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA



MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRIPTOR DO PAEBES	D126_M Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	EM13MAT306 Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	EF09MA08 Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.			

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



Mustangloe por Pixabay

As engrenagens são peças dentadas, normalmente circulares, que, unidas a eixos, transmitem movimento a diversos tipos de máquina. As engrenagens funcionam em pares, encaixando os dentes de uma na outra.

A primeira engrenagem de que se tem conhecimento é em uma carruagem chinesa do ano 260 a.C. chamada “carro que segue o sul”. Ela movia uma estátua com um braço estendido apontando em certa direção; era usada como uma espécie de bússola. Os primeiros registros escritos de uma engrenagem foram feitos por Aristóteles, no século 4 a.C.

Em 2013, cientistas descobriram uma estrutura similar a uma engrenagem em um inseto, o *Issus coleoptratus*, uma espécie de percevejo encontrado nos jardins europeus. Os pesquisadores afirmam que essa engrenagem biológica é muito parecida com os mecanismos utilizados nas máquinas.

texto extraído do livro Conexões, conforme referências bibliográficas

No material anterior, estudamos as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em um triângulo retângulo e as usamos para obter a medida de lados e de ângulos. No entanto, elas foram definidas apenas para ângulos agudos e não se mostram práticas para trabalhar com triângulos que não sejam retângulos.

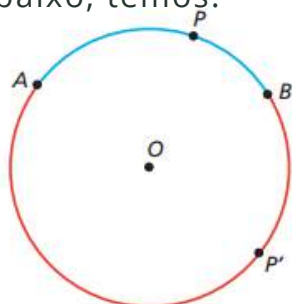
A partir deste material definiremos os conceitos de seno, cosseno e tangente em uma circunferência, começando pelos arcos de uma circunferência e suas medidas, o que possibilitará a aplicação da Trigonometria a triângulos quaisquer e servirá de base para o desenvolvimento dos próximos materiais sobre “Funções trigonométricas”

Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ARCOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Dois pontos, A e B, de uma circunferência a dividem em duas partes. Cada uma das partes, incluindo esses pontos, é chamada de arco de circunferência. Na figura abaixo, temos:



- $\widehat{APB}$: arco de extremidades A e B, contendo P;
- $\widehat{AP'B}$: arco de extremidades A e B, contendo P'.

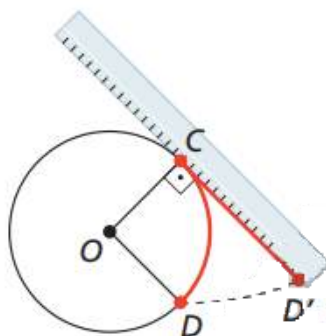
Se não houver dúvida sobre qual das partes estamos considerando, podemos indicar o arco apenas por $\widehat{AB}$.

Podemos obter duas medidas de um arco: o comprimento e a medida angular.

COMPRIMENTO DE UM ARCO

O comprimento de um arco é sua medida linear, podendo ser expressa em milímetros, centímetros, metros, entre outras unidades.

Considere o arco $\widehat{CD}$, destacado na figura abaixo.



Se pudéssemos retificar esse arco, transformando-o em um segmento reto, conseguiríamos medi-lo com uma régua graduada.

No material 27, na página 8, foi trabalhado o conceito de comprimento de uma circunferência (C), chegando-se à fórmula $C=2\pi r$ (sendo r, o raio da circunferência). Essa fórmula será usada para obter o comprimento de arcos de circunferência.

Lembre-se de que π é um número irracional cujo valor é 3,14159265... Para fins de cálculos, é comum adotarmos como aproximação $\pi = 3,14$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Calcular o comprimento de um arco de 50° contido em uma circunferência com 8 cm de raio.

Resolução:

Lembrando que uma circunferência tem 360° e seu comprimento é dado por $2\pi r$, podemos montar a seguinte regra de três:

medida do arco (grau)	comprimento (cm)
360°	$2\pi \cdot 8$
50°	x

$$x = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 50^\circ}{360^\circ} = \frac{20\pi}{9}$$

Substituindo π por 3,14, obtemos:

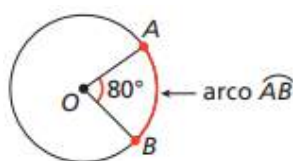
$$x \approx \frac{20 \cdot 3,14}{9} \Rightarrow x \approx 6,98$$

Logo, o arco mede aproximadamente 6,98 cm.

MEDIDA ANGULAR DE UM ARCO

Sempre que nos referimos à medida de um arco de circunferência, estamos fazendo referência à sua medida angular, que é igual à medida do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura a seguir, temos o arco $\widehat{AB}$ e seu ângulo central correspondente $\widehat{AOB}$.



Como o ângulo $\widehat{AOB}$ mede 80° , o arco $\widehat{AB}$ também mede 80° . Indicamos: $\text{med}(\widehat{AB}) = \text{med}(\widehat{AOB}) = 80^\circ$.

Geralmente, as unidades usadas para medir um arco são o grau e o radiano.

O GRAU

Considere uma circunferência dividida em 360 arcos de comprimentos iguais. Define-se um grau (1°) como a medida angular correspondente a cada um desses arcos. Por isso, dizemos que a circunferência possui 360° .

Também foram criados submúltiplos do grau, como se pode observar a seguir

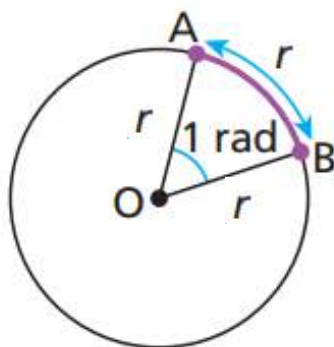
- Dividindo 1 grau em 60 partes iguais, obtemos 1 minuto ($1'$). Ou seja, $1^\circ = 60'$.
- Dividindo 1 minuto em 60 partes iguais, obtemos 1 segundo ($1''$). Ou seja, $1' = 60''$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

O RADIANO

Para medir arcos e ângulos, também podemos usar o radiano. A medida angular de um arco é 1 radiano (1 rad) quando o comprimento desse arco é igual ao raio da circunferência que o contém.

Observe a circunferência de raio r representada abaixo. Como o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é r , sua medida angular é 1 radiano. Indicamos: $\text{med}(\widehat{AB}) = 1 \text{ rad}$.



No exercício resolvido a seguir, veremos que uma circunferência (ou seja, um arco de 360°) mede 2π rad.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2

Calcular a medida angular, em radiano, de uma circunferência.

Resolução:

Dada uma circunferência de raio r , um arco de medida 1 rad tem o comprimento igual a r . Como o comprimento da circunferência é $2\pi r$, temos:

medida do arco (rad)	comprimento (cm)
----------------------	------------------

1	r
---	-----

α	$2\pi r$
----------	----------

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Logo, uma circunferência mede 2π rad.

PARA SABER MAIS

Para visualizar o conceito de arco medido em radiano, veja uma animação clicando no botão ou apontando a câmera do celular para o QR Code ao lado.



[Clique aqui](#)

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A FÓRMULA PARA O COMPRIMENTO DO ARCO

O comprimento do arco de uma circunferência pode ser calculado se você souber o raio r da circunferência e o ângulo θ subtendido pelo arco, medido em radianos. A fórmula para calcular o comprimento do arco L é:

$$L = r \cdot \theta$$

em que:

- L é o comprimento do arco
- r é o raio da circunferência
- θ é o ângulo em radianos correspondente ao arco

Exemplo:

Uma circunferência tem raio de 4 unidades, e o ângulo subtendido pelo arco é de $\pi/3$ radianos. O comprimento do arco L é:

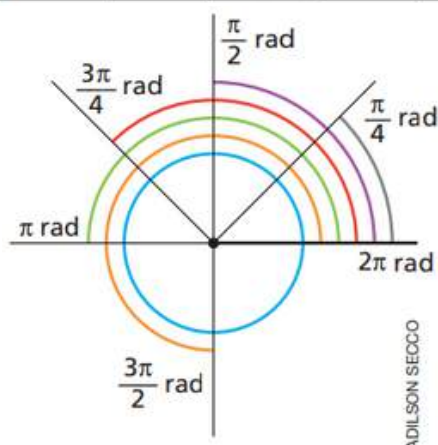
$$L = 4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ unidades}$$

RELAÇÃO ENTRE GRAU E RADIANO

Um ângulo que determina uma circunferência corresponde a um arco que mede 360° ou 2π rad. Assim, um ângulo raso, que determina uma semicircunferência, corresponde a um arco que mede 180° ou π rad.

A tabela abaixo fornece a relação entre as medidas, em grau e em radiano, de alguns ângulos. Observe também a figura a seguir.

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



Exemplos:

a) Vamos obter a medida, em grau, de um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad.

grau	_____	radiano
180	_____	π
x	_____	$\frac{\pi}{6}$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30$$

Assim, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad mede 30° .

CONCEITOS E CONTEÚDOS

b) Vamos obter a medida, em radiano, de um arco de 200° .

radiano	grau
π —————	180
x —————	200

$$x = \frac{200 \cdot \pi}{180} = \frac{10\pi}{9}$$

Assim, um arco de 200° mede $\frac{10\pi}{9}$ rad.

c) Vamos determinar a medida x , em grau e em radiano, de um arco com aproximadamente 12,56 cm de comprimento, em uma circunferência com 12 cm de raio.

• Medida em grau:

comprimento (cm)	medida (grau)
12,56 —————	x
$2 \cdot \pi \cdot 12$ —————	360

$$x \approx \frac{360 \cdot 12,56}{2 \cdot 3,14 \cdot 12} \Rightarrow x \approx 60$$

• Assim, o arco mede aproximadamente 60° .

• Medida em radiano:

comprimento (cm)	medida (rad)
12,56 —————	x
$2 \cdot \pi \cdot 12$ —————	2π

$$x = \frac{2\pi \cdot 12,56}{2 \cdot \pi \cdot 12} = \frac{12,56}{12} \approx 1,047$$

• Assim, o arco mede aproximadamente 1,047 rad.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Respostas na página 15

1. Estabeleça, em grau, a medida dos arcos de:

- a) $\frac{5\pi}{4}$ rad b) $\frac{7\pi}{6}$ rad c) $\frac{\pi}{2}$ rad

2. Determine, em radiano, a medida dos arcos de:

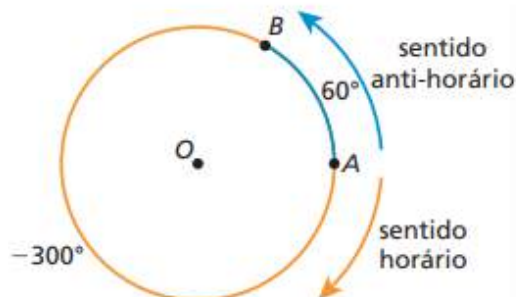
- a) 30°
b) 60°
c) 120°
d) 150°
e) 210°
f) 240°

3. Determine, em grau e em radiano, a medida do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

CICLO TRIGONOMÉTRICO

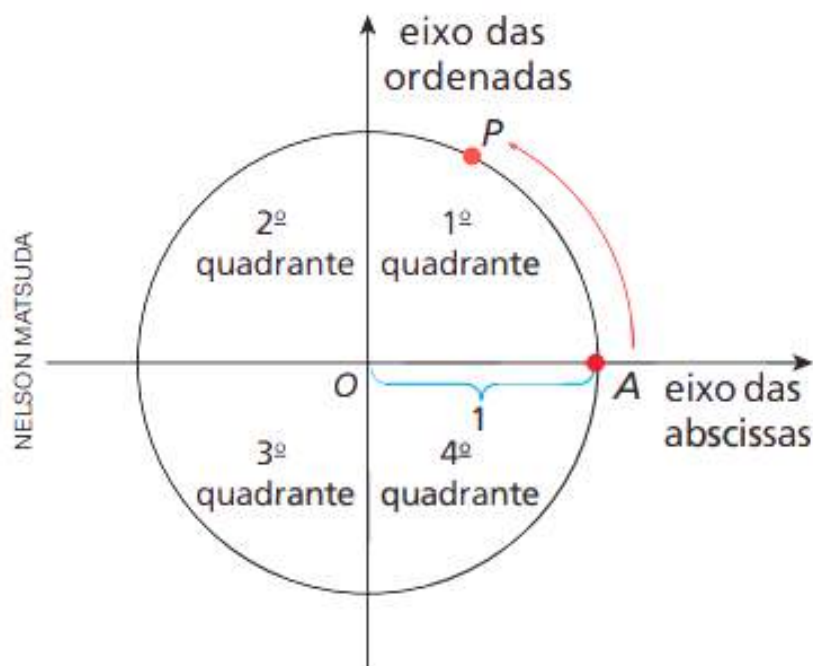
Em uma circunferência pode-se adotar dois sentidos: o sentido horário e o sentido anti-horário. Na circunferência representada abaixo, sendo A o ponto de partida, estabelecemos:



- o sentido anti-horário para medidas positivas. Assim, $\text{med}(\widehat{AB}) = 60^\circ$.
- o sentido horário para medidas negativas. Assim, $\text{med}(\widehat{AB}) = -300^\circ$.

A circunferência trigonométrica, ou ciclo trigonométrico, tem centro na origem $O(0,0)$ de um plano cartesiano e raio de 1 unidade. O eixo das abscissas e o eixo das ordenadas do plano cartesiano dividem o ciclo em quatro quadrantes. No ciclo trigonométrico, o ponto $A(1,0)$ é a origem de todos os arcos, ou seja, é o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto P qualquer para determinar o arco $\widehat{AP}$ (P é a extremidade do arco). Adotando o sentido anti-horário como positivo, associaremos, a cada ponto P da circunferência, a medida de $\widehat{AP}$ tal que

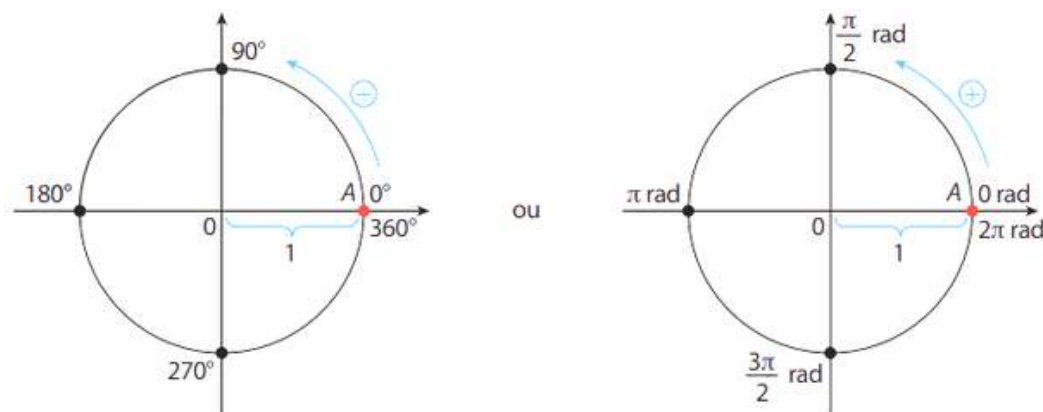
$$0 \text{ rad} \leq \text{med}(\widehat{AP}) \leq 2\pi \text{ rad}, \text{ ou } 0^\circ \leq \text{med}(\widehat{AP}) \leq 360^\circ.$$



Observe que a medida de um arco do 1º quadrante, por exemplo, está entre 0° e 90° .

CONCEITOS E CONTEÚDOS

As intersecções entre os eixos e o ciclo trigonométrico são as extremidades dos arcos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° .



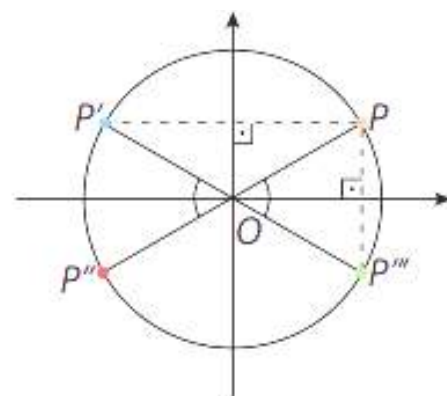
SIMETRIA NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Vamos estudar três tipos de simetria no ciclo trigonométrico: em relação ao eixo das ordenadas, em relação à origem O e em relação ao eixo das abscissas.

Na figura ao lado:

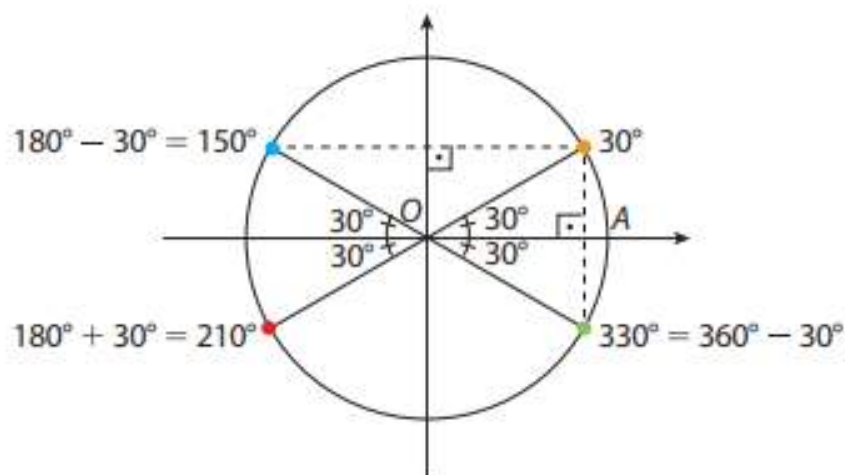
- P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas;
- P e P'' são simétricos em relação à origem O ;
- P e P''' são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Se as extremidades de dois arcos são pontos que apresentam uma dessas simetrias, dizemos que os arcos são **arcos simétricos**.



Exemplo:

Dado o arco de 30° , vamos obter as medidas de seus arcos simétricos. Observe o ciclo trigonométrico representado abaixo.



CONCEITOS E CONTEÚDOS

As medidas de seus arcos simétricos são:

- em relação ao eixo das ordenadas: $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
- em relação à origem: $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$
- em relação ao eixo das abscissas: $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

Esse mesmo raciocínio pode ser usado para outros arcos, medidos em grau ou em radiano.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3

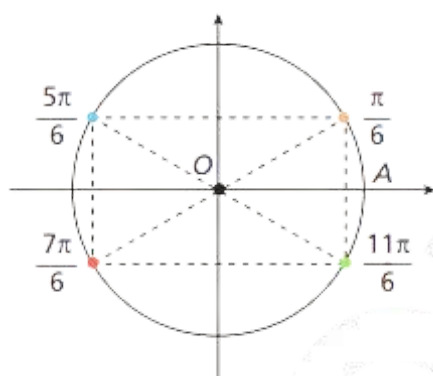
Determinar as medidas, em radiano, dos arcos simétricos ao arco de $\pi/6$ rad em relação ao eixo das ordenadas, à origem O e ao eixo das abscissas.

Resolução:

Os arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ medem:

- em relação ao eixo das ordenadas: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
- em relação à origem O: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
- em relação ao eixo das abscissas: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

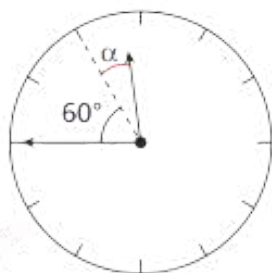
Veja a solução gráfica no ciclo trigonométrico representado abaixo.



Observação:

Em um ciclo trigonométrico, quando um valor, sem unidade de medida, estiver associado a um ponto da circunferência, subentende-se que esse valor representa a medida de um arco em radiano.

Qual é medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 11h45min é:



Resolução:

A cada intervalo de 60 min, o ponteiro das horas percorre 30° .

Usando regra de três, calculamos α :

$$\begin{array}{ccc} 30^\circ & \text{-----} & 60 \text{ min} \\ \alpha & \text{-----} & 45 \text{ min} \end{array}$$

$$\frac{30^\circ}{\alpha} = \frac{60}{45} \Rightarrow \alpha = 22,5^\circ$$

Assim:

$$\alpha + 60^\circ = 22,5^\circ + 60^\circ = 82,5^\circ = 82^\circ 30'$$

Portanto, a medida do menor ângulo é $82^\circ 30'$.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

A medida de um arco é 270° . Em radiano, esse arco tem

- A) $\pi/4$ rad
- B) $\pi/2$ rad
- C) π rad
- D) 2π rad
- E) $3\pi/2$ rad

Atividade 2

A medida de um arco é $3\pi/4$. Em grau, esse arco tem

- A) 60°
- B) 90°
- C) 135°
- D) 180°
- E) 210°

Atividade 3

O valor aproximado do raio de um arco de circunferência que mede 300° e tem comprimento de 200 m é, aproximadamente (considere $\pi=3,14$):

- A) 38,22 m
- B) 39 m
- C) 40,20 m
- D) 42,88 m
- E) 60 m

Atividade 4

Em uma circunferência de 8 m de diâmetro, toma-se um arco de 15,7 m de comprimento. Considerando $\pi = 3,14$, a medida do ângulo correspondente a esse arco, em grau, é:

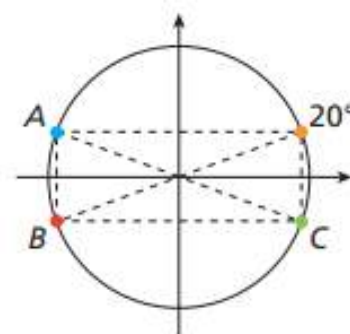
- A) $125,6^\circ$
- B) 180°
- C) 225°
- B) 270°
- C) 360°

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

A medida dos arcos de extremidades A, B e C no ciclo trigonométrico representado ao lado é:

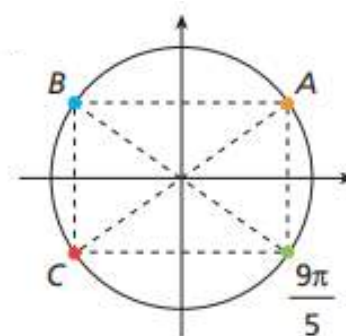
- A) $A = 160^\circ$, $B = 200^\circ$, $C = 340^\circ$
- B) $A = 160^\circ$, $B = 200^\circ$, $C = 320^\circ$
- C) $A = 140^\circ$, $B = 200^\circ$, $C = 320^\circ$
- D) $A = 140^\circ$, $B = 160^\circ$, $C = 340^\circ$
- E) $A = 120^\circ$, $B = 210^\circ$, $C = 270^\circ$



Atividade 6

A medida dos arcos de extremidades A, B e C no ciclo trigonométrico representado ao lado é:

- A) $A = \pi/5$, $B = \pi/8$, $C = 6\pi/5$
- B) $A = \pi/5$, $B = 4\pi/5$, $C = 6\pi/5$
- C) $A = 2\pi/3$, $B = 4\pi/5$, $C = \pi/5$
- D) $A = 2\pi/3$, $B = \pi/8$, $C = \pi/5$
- E) $A = 3\pi/5$, $B = \pi/8$, $C = 4\pi/5$



Atividade 7

Um ângulo central de uma circunferência de 5 cm de raio determina sobre ela um arco de 7 cm. A medida desse ângulo, em radiano, é:

- A) 1,4 rad
- B) 2,2 rad
- C) 3,6 rad
- D) 4,4 rad
- E) 4,8 rad

Atividade 8

A medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 16h15min é

- A) 36°
- B) $36^\circ 30'$
- C) 37°
- D) $37^\circ 30'$
- E) 38°

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 9

A medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2h20min é

- A) 20°
- B) 30°
- C) 36°
- D) 50°
- E) 62°

Atividade 10

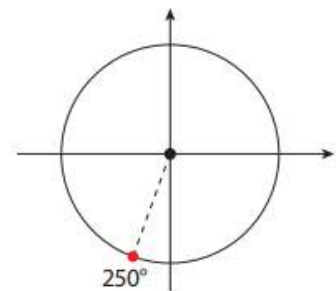
Um pêndulo oscila e forma, entre suas posições extremas, um ângulo de 70° . Sabendo que esse pêndulo tem 25 cm de comprimento, o comprimento aproximado do arco que ele descreve é, aproximadamente (considere $\pi=3,14$):

- A) 18 cm
- B) 22,5 cm
- C) 30,5
- D) 38 cm
- E) 42,5 cm

Atividade 11

A medida do arco do 1° quadrante que é simétrico ao arco cuja medida está indicada na figura ao lado é

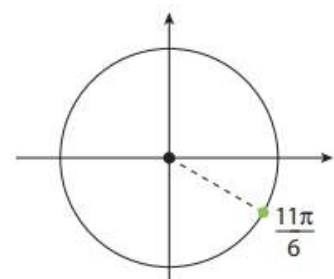
- A) 45°
- B) 60°
- C) 70°
- D) 120°
- E) 140°



Atividade 12

A medida do arco do 1° quadrante que é simétrico ao arco cuja medida está indicada na figura ao lado é

- A) $\pi/2$ rad
- B) $\pi/3$ rad
- C) $\pi/4$ rad
- D) $\pi/5$ rad
- E) $\pi/6$ rad



GABARITO

ATIVIDADE 1: E
ATIVIDADE 2: C
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: C
ATIVIDADE 5: A
ATIVIDADE 6: B
ATIVIDADE 7: A
ATIVIDADE 8: D
ATIVIDADE 9: D
ATIVIDADE 10: C
ATIVIDADE 11: C
ATIVIDADE 12: E

Respostas dos exercícios propostos

1. Estabeleça, em grau, a medida dos arcos de:

a) $\frac{5\pi}{4}$ rad 225° b) $\frac{7\pi}{6}$ rad 210° c) $\frac{\pi}{2}$ rad 90°

2. Determine, em radiano, a medida dos arcos de:

a) $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ radianos

b) $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ radianos

c) $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ radianos

d) $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ radianos

e) $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$ radianos

f) $240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ radianos

3. Determine, em grau e em radiano, a medida do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência.

Para determinar a medida do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência, tanto em graus quanto em radianos, usamos as seguintes relações:

Em graus:

A circunferência completa corresponde a 360° . Portanto:

$$\text{Medida em graus} = \frac{2}{5} \times 360^\circ = \frac{720^\circ}{5} = 144^\circ$$

Em radianos:

A circunferência completa corresponde a 2π radianos. Portanto:

$$\text{Medida em radianos} = \frac{2}{5} \times 2\pi = \frac{4\pi}{5} \text{ radianos}$$

Portanto, a medida do arco é 144° ou $\frac{4\pi}{5}$ radianos.

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. - 3. ed. - São Paulo : Moderna, 2016.

Conexões: matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.