

Matemática

1ª Série | Ensino Médio

30ª Semana



MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DE ÁREAS DE POLÍGONOS



MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRIPTOR DO PAEBES	D058_M Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	EM13MAT307 Empregar diferentes métodos para obtenção da medida de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	(EF07MA26) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.			

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



O Código Florestal, Lei 12.651/12, em seu artigo 4º, além de definir o que é uma área de preservação permanente, estabelece as diferentes larguras correspondentes.

Nele há diversas outras preocupações relacionadas ao entorno dos reservatórios de água artificiais e as áreas em torno das nascentes, dos olhos d'água, das encostas, das restingas e dos mangues, entre outras.

No material anterior foi trabalhado o conceito de medida de superfície. Algumas relações matemáticas para o cálculo de áreas de regiões em forma de quadrado, de retângulo, de triângulo, de trapézio, do losango e de paralelogramos foram estabelecidas.

Neste material vamos retornar, aplicar e ampliar tais conhecimentos na resolução de situações diversas.

Assim, por exemplo, como poderemos calcular a área de uma grande superfície que foi desmatada se ela não tem uma forma geométrica conhecida, como citamos anteriormente?

Ou como poderemos encontrar a área, por exemplo, de um lago totalmente irregular?

Veremos que existem procedimentos que possibilitam o cálculo aproximado de medidas de superfície por meio da decomposição em partes.

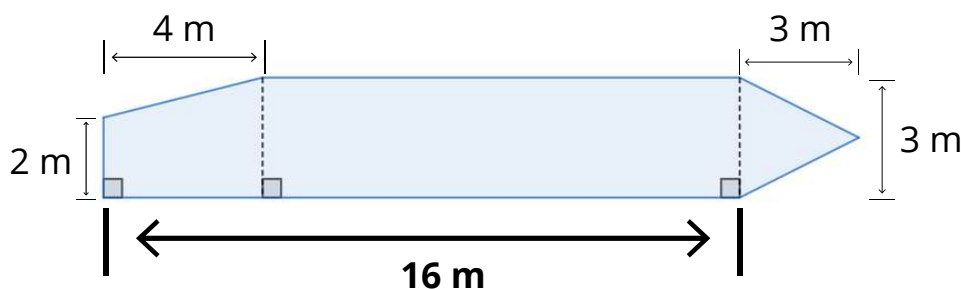
Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

No material anterior nós estudamos como calcular a área de alguns polígonos por meio de fórmulas específicas. Neste material nós vamos usar essas fórmulas para calcular a área de outros polígonos.

ÁREA DE OUTROS POLÍGONOS UTILIZANDO A DECOMPOSIÇÃO

Vamos determinar a área da figura a seguir.



Resolução:

Podemos decompor a figura em três: um trapézio, um retângulo e um triângulo.

Assim:

$$A = A_{\text{trapézio}} + A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}}$$

- Área do trapézio: $A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b)h}{2}$

O diagrama mostra apenas o trapézio da figura principal, com base inferior de 4 m, base superior de 3 m e altura de 2 m.

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(3 + 2)4}{2} = \frac{(5)4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

- Área do retângulo: $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

O diagrama mostra apenas o retângulo da figura principal, com largura de 12 m (calculada como 16 m menos 4 m) e altura de 3 m.

$$A_{\text{retângulo}} = 12 \cdot 3 = 36$$

- Área do triângulo: $A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$

O diagrama mostra apenas o triângulo da figura principal, com base de 3 m e altura de 3 m.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$
$$A = A_{\text{trapézio}} + A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}}$$

$$A = 10 + 36 + 4,5 = 50,5$$

Portanto, a área da figura é 50,5 m².

CONCEITOS E CONTEÚDOS

O TEOREMA DE PICK

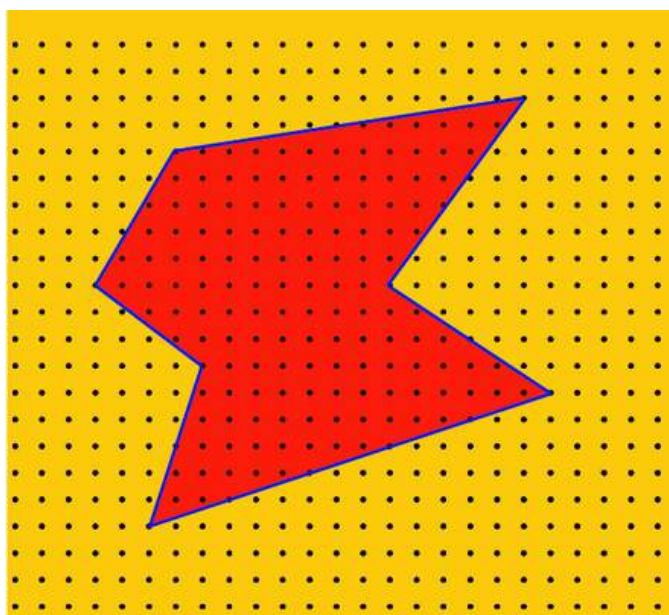
Considere um polígono P no plano cartesiano. Se todos os vértices de P possuem coordenadas inteiras, então a Fórmula de Pick para a sua área é dada por:

$$A = i + \frac{f}{2} - 1$$

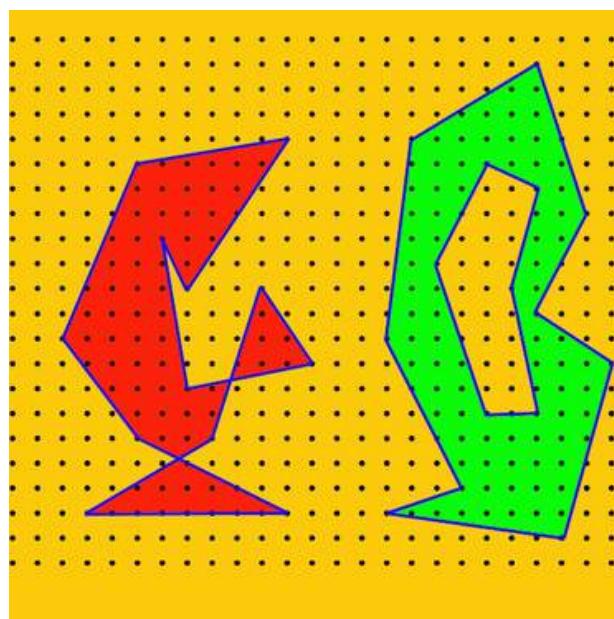
sendo i e f o número de pontos com coordenadas inteiras no interior e no bordo (fronteira) do polígono, respectivamente.

Normalmente, essa fórmula não é prática para calcular a área de polígonos porque a suposição que ela usa geralmente não é verdadeira ou não sabemos se é verdadeira. Ainda assim, é muito interessante por várias razões. Primeiro, tem um apelo curioso porque transforma o problema difícil de calcular áreas em algo mais simples, apenas contando pontos.

O teorema foi descoberto em 1899 por Georg Alexander Pick e é válido apenas para polígonos simples, ou seja, aqueles que consistem em uma única “peça” e não contêm “buracos”.



Polígono simples

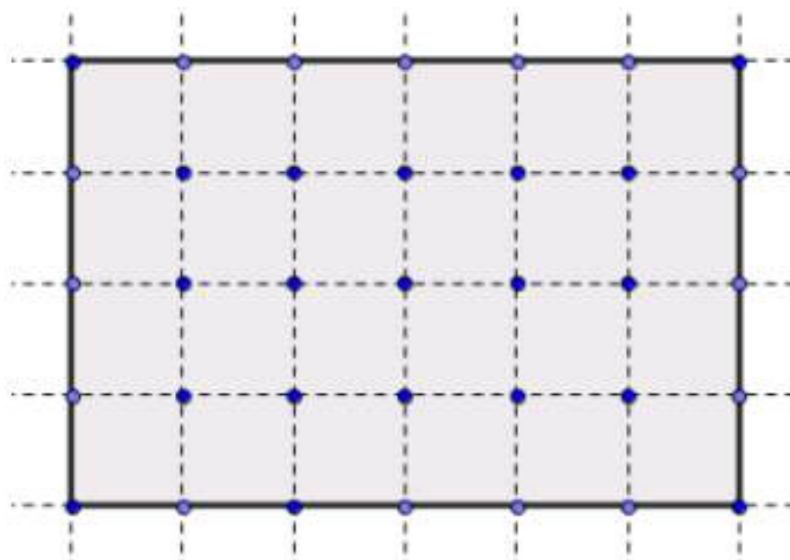


Polígonos não simples

CONCEITOS E CONTEÚDOS

EXEMPLO 1

Um retângulo de dimensões 4 por 6 pode ter a sua área calculada multiplicando o comprimento pela largura, ou base vezes altura, o que resulta em 24 unidades de área. Vamos calcular essa área agora aplicando o Teorema de Pick.



Ao inserir uma malha quadriculada sobre esse retângulo, podemos calcular a sua área apenas usando o número de pontos em seu bordo (fronteira) e em seu interior.

Temos 15 pontos em seu interior e 20 pontos em seu bordo, ou seja, sobre os “lados” do retângulo.

Vamos utilizar a fórmula $A = i + \frac{f}{2} - 1$, em que i = pontos interiores, que neste caso é 15 e f = pontos no bordo, que neste caso é 20

$$A = 15 + \frac{20}{2} - 1$$

$$A = 15 + 10 - 1$$

$$A = 24$$

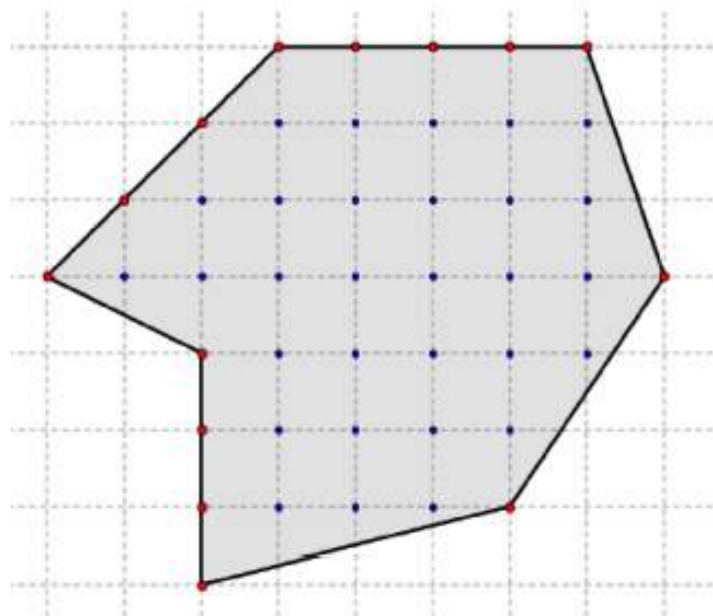
De fato, encontramos também 24 de área.

É claro que não convém utilizar essa fórmula para determinar a área de um retângulo. Usamos um retângulo neste exemplo para comparar as respostas.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

EXEMPLO 2

Na figura abaixo temos um heptágono com vértices sobre pontos de uma malha. Vamos calcular a sua área usando a fórmula de Pick.



Observe que existem pontos da malha no interior ($I = 30$) e pontos da malha sobre o bordo deste polígono ($B = 14$). Portanto sua área A é igual a

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1$$

$$A = 30 + \frac{1}{2} \cdot 14 - 1$$

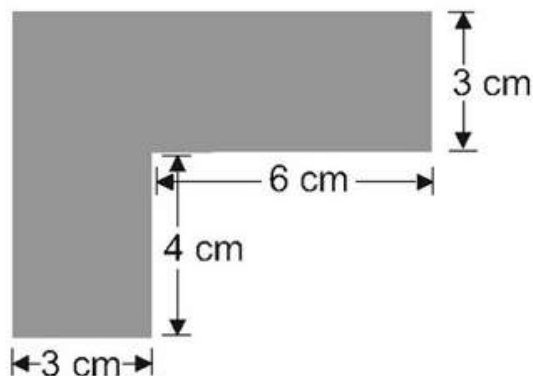
$$A = 36 u$$

A área calculada pela fórmula de Pick desse heptágono é de 36 unidades, quer seja centímetros quadrados, metros quadrados ou qualquer outra unidade de medida.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

(M11327MG) Observe o desenho abaixo.

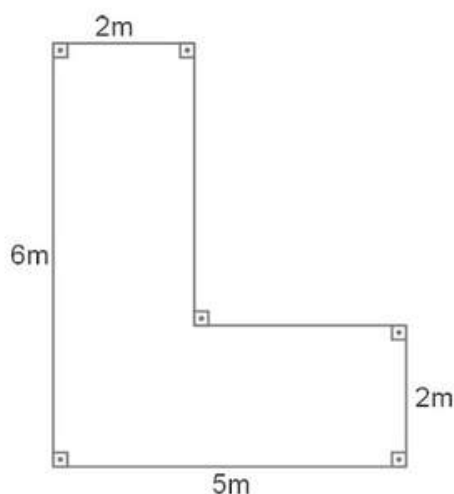


A medida da área desse desenho é

- A) 16 cm^2
- B) 30 cm^2
- C) 39 cm^2
- D) 78 cm^2
- E) 216 cm^2

Atividade 2

(PAMA11031AC) Abaixo, temos representada a sala de uma casa.



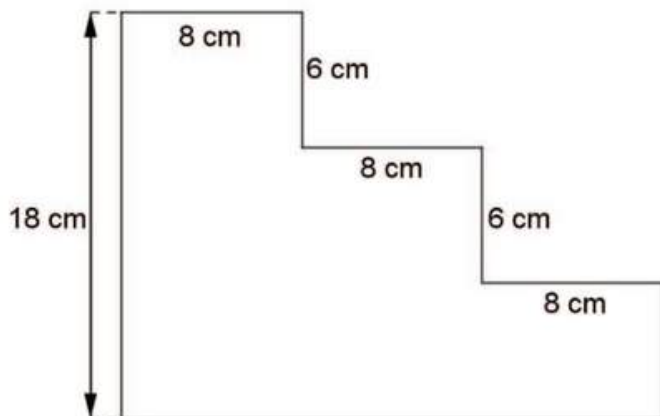
A área dessa sala, em m^2 , é igual a

- A) 13
- B) 15
- C) 18
- D) 24
- E) 30

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 3

(M110274E4) Observe o desenho abaixo.

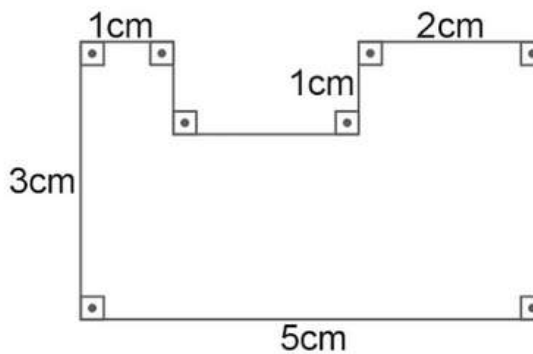


Qual é a medida da área desse desenho?

- A) 84 cm^2
- B) 144 cm^2
- C) 288 cm^2
- D) 336 cm^2
- E) 432 cm^2

Atividade 4

(PAMA11032AC) Observe a figura representada abaixo.



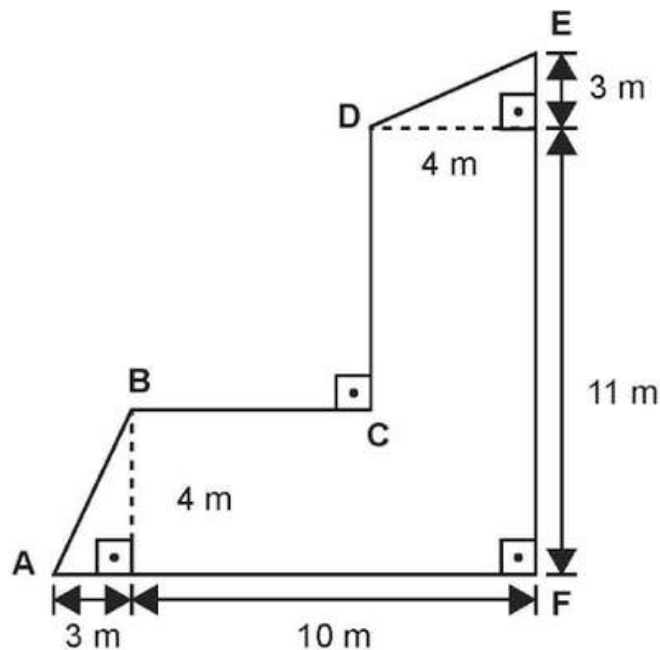
A área dessa figura, em centímetros quadrados, é

- A) 8
- B) 13
- C) 15
- D) 16
- E) 18

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

(M11117SI) Observe a figura a seguir:

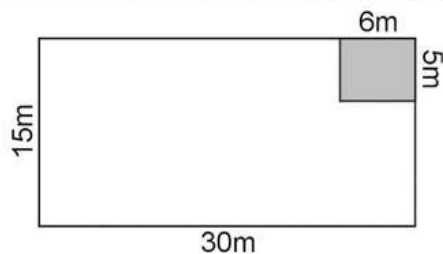


Nessa figura, BC é paralelo a AF. A área dessa figura é:

- A) 64 m^2
- B) 80 m^2
- C) 92 m^2
- D) 96 m^2
- E) 108 m^2

Atividade 6

(PAMA11037AC) Observe a representação de um terreno retangular comprado por Carlos.



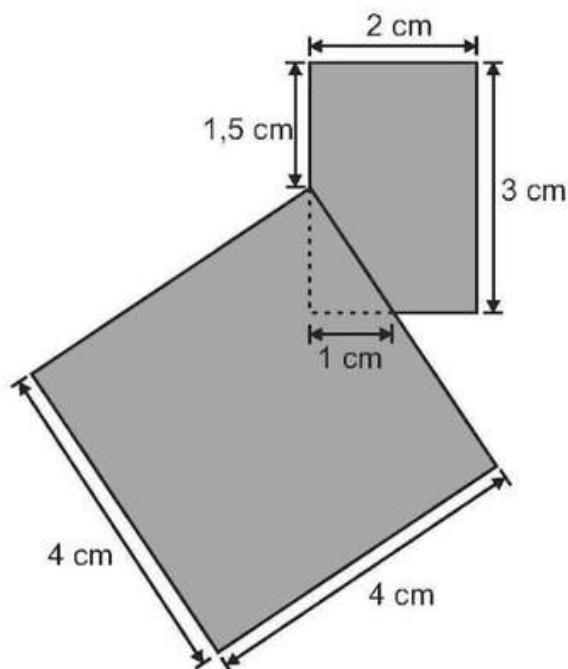
Carlos deseja usar o retângulo assinalado para fazer uma plantação. Qual é a área que sobrá após Carlos fazer a plantação?

- A) 280 m^2
- B) 320 m^2
- C) 380 m^2
- D) 420 m^2
- E) 450 m^2

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 7

(M120217A9) Observe o desenho abaixo formado por um quadrado e um retângulo.

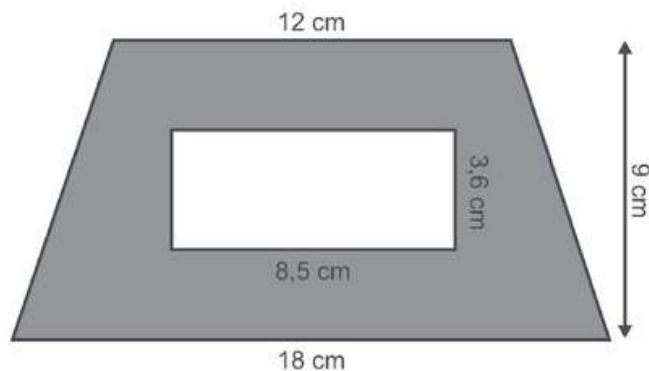


Qual é a medida da área, em centímetros quadrados, desse desenho?

- A) 10
- B) 21,25
- C) 22
- D) 22,75
- E) 23.50

Atividade 8

(M11449SI) A figura abaixo é composta por um trapézio de bases que medem 12 centímetros e 18 centímetros e altura medindo 9 centímetros. Interno à esse trapézio temos um retângulo cujas dimensões são 8,5 centímetros e 3,6 centímetros.



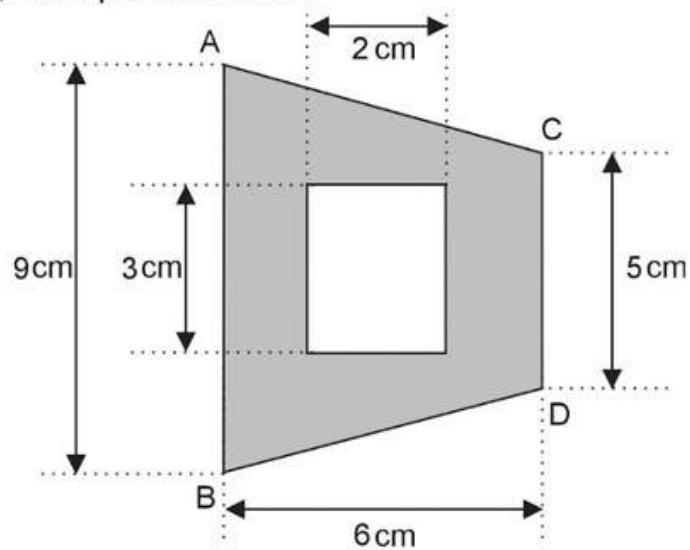
A área da região colorida de cinza, em cm^2 , é

- A) 300,60
- B) 185,40
- C) 165,60
- D) 135,00
- E) 104,40

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 9

(PAMA11113AC) Na figura abaixo, AB é paralelo a CD.

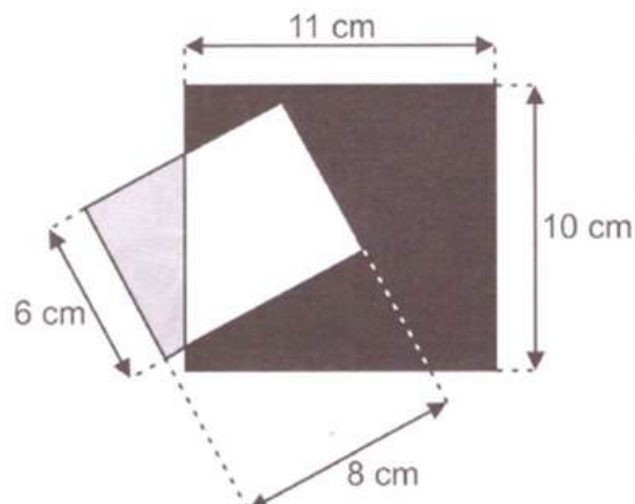


A área da figura sombreada é

- A) 24 cm^2
- B) 36 cm^2
- C) 42 cm^2
- D) 48 cm^2
- E) 54 cm^2

Atividade 10

E9223 - (PAEBES TRI) Um retângulo de dimensões 6 cm por 8 cm está parcialmente sobreposto a um outro retângulo, de dimensões 10 cm por 11 cm, conforme ilustrado na figura abaixo.



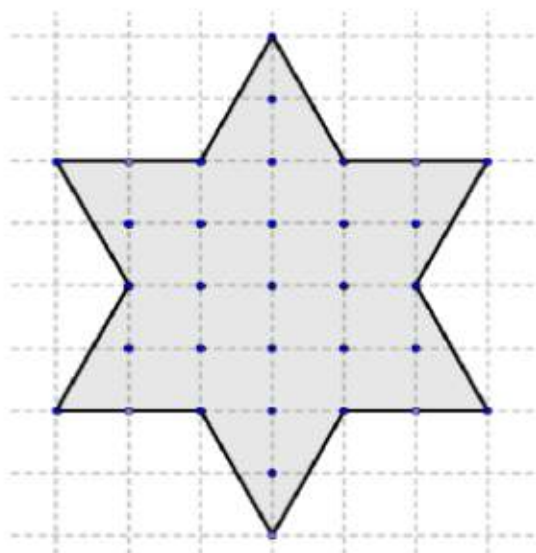
A região na cor branca representa a interseção entre os dois retângulos e a medida da área colorida de cinza é 16 cm^2 .

A medida, em centímetros quadrados, da área da região colorida de preto é

- A) 78.
- B) 94.
- C) 110
- D) 158.
- E) 174.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 11



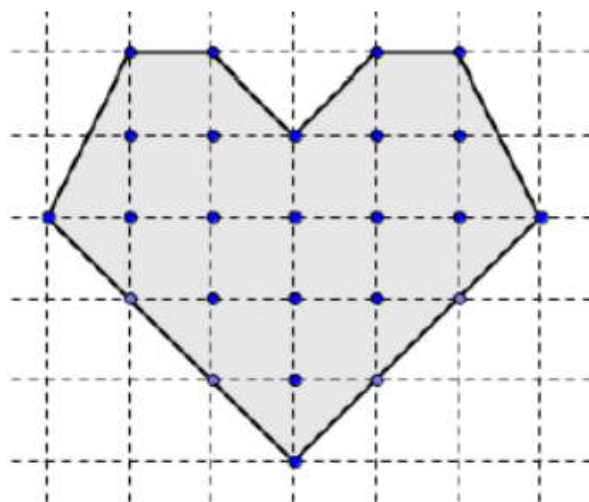
Utilizando a Fórmula de Pick, é correto afirmar que a área da figura acima é:

- A) $20 u^2$
- B) $22 u^2$
- C) $24 u^2$
- D) $26 u^2$

Atividade 12

Utilizando a Fórmula de Pick, a área da figura abaixo é:

- A) $16 u^2$
- B) $18 u^2$
- C) $20 u^2$
- D) $22 u^2$



GABARITO

ATIVIDADE 1: C
ATIVIDADE 2: C
ATIVIDADE 3: C
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: B
ATIVIDADE 6: D
ATIVIDADE 7: B
ATIVIDADE 8: E
ATIVIDADE 9: B
ATIVIDADE 10:A
ATIVIDADE 11:C
ATIVIDADE 12:B

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

<https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>. Acesso em 26/08/2024

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática : ciência e aplicações, volume 2: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7.ed. - São Paulo : Saraiva, 2013.

Mori, Iracema. Matemática: ideias e desafios, 9º ano / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. -- 18.ed.-- São Paulo : Saraiva, 2015.

Souza, Fabricio Oliveira, 1979- . Teorema de Pick : uma nova abordagem sobre área de figuras planas para o ensino básico / Fabrício Oliveira Souza - 2013. Dissertação do Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.