Matemática

2ª Série | Ensino Médio

30ª Semana

Sólidos Geométricos (Prismas e Pirâmides: Cálculo de Volumes de Sólidos Geométricos)

MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO PAEBES	**D129_M** Resolver Problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT504** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides , cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri para obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF09MA19** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.			

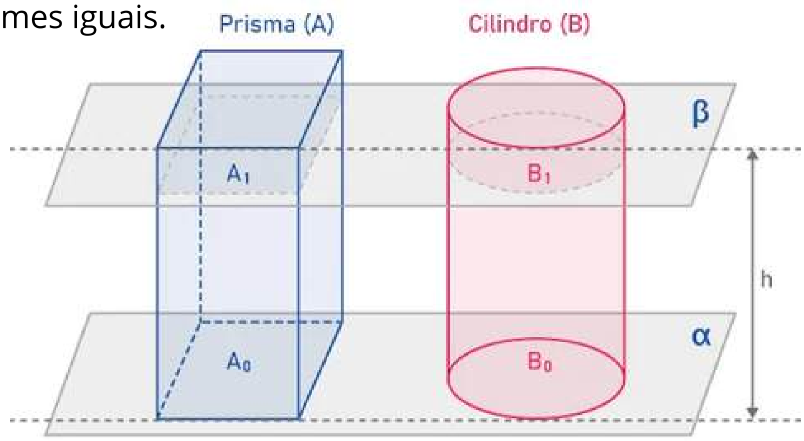
MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

O Princípio de Cavalieri e o cálculo de volume

O princípio de Cavalieri foi desenvolvido para facilitar o cálculo do volume de sólidos geométricos. Existem alguns sólidos que possuem formas que dificultam o cálculo de seus volumes. Para facilitar essa tarefa, Cavalieri recorreu à comparação de volumes entre sólidos conhecidos. O princípio desenvolvido por esse estudioso diz que, se existem dois sólidos geométricos de mesma altura, ao cortá-los com um plano paralelo à base, em qualquer altura dos sólidos, se a área da intersecção com os dois sólidos for sempre a mesma, então esses sólidos terão volumes iguais.

O matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri realizou estudos para o cálculo do volume de sólidos geométricos. Durante seus estudos, ele publicou o método do indivisível, que hoje é conhecido como **princípio de Cavalieri.**



Por meio da comparação entre sólidos geométricos, o princípio de Cavalieri diz que dois sólidos geométricos que possuem a mesma altura terão o mesmo volume se as figuras planas formadas pelas secções planas paralelas à base, em qualquer altura dos sólidos geométricos, tiverem sempre a mesma área.

Como essa figura pode ter uma base no formato de qualquer polígono, para calcular o volume do prisma, utilizamos a seguinte fórmula:

$$V = Ab \times h$$

V volume

Ab área da base

h altura

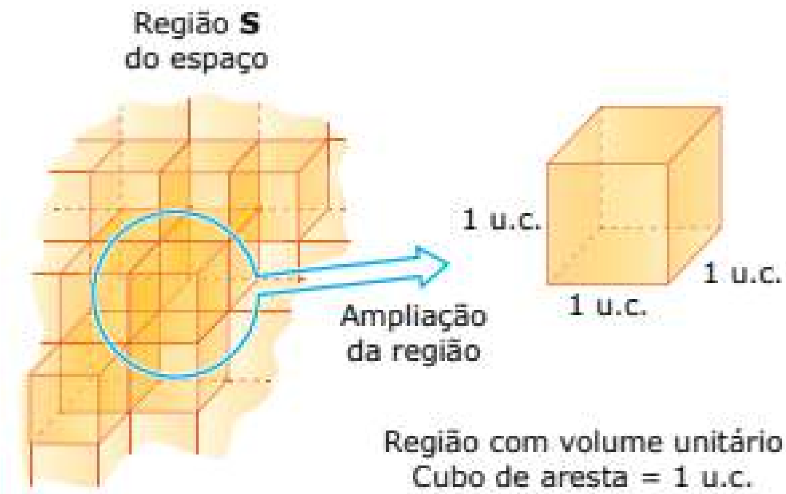
A área é calculada de acordo com o formato da base, ou seja, de acordo com o polígono que a forma.

Fonte: Site Preparaenem

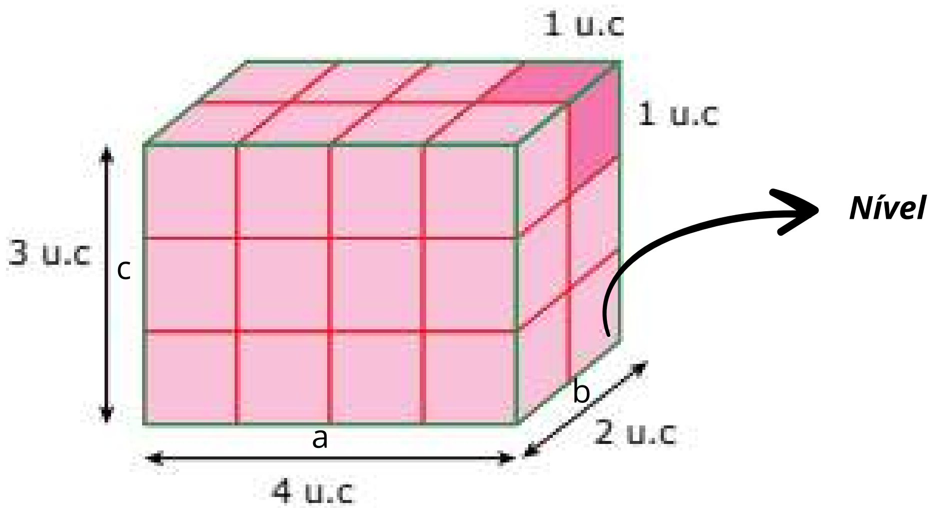
CONCEITOS E CONTEÚDOS

VOLUME DE PRISMAS

Podemos dizer que calcular o volume de um prisma é o mesmo que calcular a quantidade de espaço que ele ocupa. O volume de uma figura espacial é a comparação da região que o sólido ocupa no espaço com uma unidade de medida de volume. No exemplo a seguir, a unidade escolhida é conhecida como unidade unitária, sendo adotada uma região cúbica de aresta igual a 1 unidade de comprimento (1 u.c.). Observe a ilustração a seguir:



O volume da região S do espaço representa o número de vezes que a região contém a unidade de volume (cubo de aresta medindo 1 u.c.). Observe o paralelepípedo retângulo a seguir e vejamos como medir o seu volume a partir da unidade de volume (u.v.)



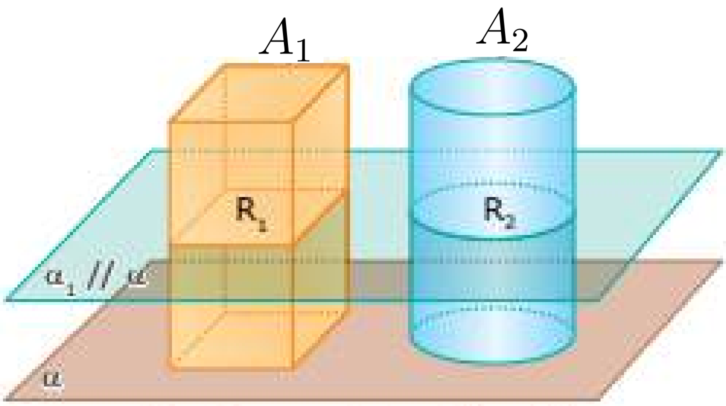
Perceba que, se considerarmos os níveis como a área da base, na verdade estamos multiplicando a área da base e a altura. Outra observação é que o produto das dimensões resulta em 24 u.v.

Generalizando, temos: **V = a . b . c** V = Ab . h, em que a, b e c representam as dimensões do prisma.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Na comparação de volumes de dois sólidos, podemos, em algumas situações, usar o **Princípio de Cavalieri**.

"Considere dois sólidos, A1 e A2, apoiados em um plano α. Se todo plano α1 // α que intercepta A1 em uma área R1 também intercepta A2 em uma área R2, tal que as áreas R1 e R2 sejam iguais, então os volumes dos sólidos A1 e A2 são iguais.

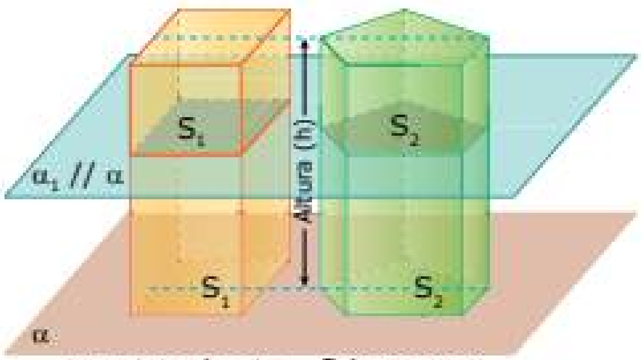


$R_1 = R_2, \forall \alpha_1 // \alpha \Rightarrow V_{S_1} = V_{S_2}$

Conheça mais sobre o **Princípio de Cavalieri**

Clique aqui

Dessa forma, para a determinação do volume de um prisma, podemos usar o Princípio de Cavalieri aplicado a um paralelepípedo que, neste exemplo, possui área da base S1. Veja:



Paralelepípedo com área de base S_1

Prisma com área de base S_2 tal que $S_1 = S_2$

Pelo Princípio de Cavalieri, esses sólidos possuem volumes iguais, ou seja, o volume do paralelepípedo retângulo é igual ao volume de um prisma de mesma área da base e altura.

V prisma = V paralelepípedo = S1 . h = S2 .h

Lembre-se que neste exemplo:

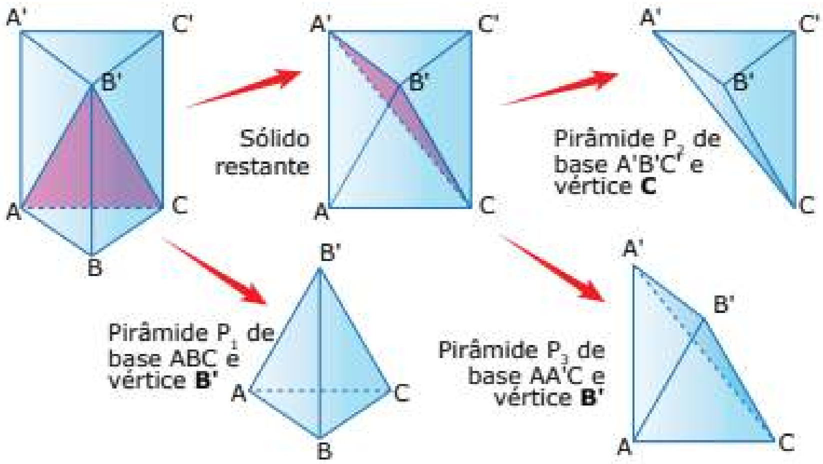
S1 - área da base do sólido 1

S2 - área da base do sólido 2

CONCEITOS E CONTEÚDOS

VOLUME DE PIRÂMIDES

Veja a seguir a decomposição de um prisma a partir de uma pirâmide:



Observe que os volumes de P1 e P2 são iguais, pois essas pirâmides têm bases com a mesma área (ΔABC e ΔA'B'C') e alturas iguais (BB' e CC').
De forma análoga, os volumes de P2 e P3 também são iguais, pois as bases ΔA'C'C e ΔAA'C possuem áreas iguais e as alturas possuem a mesma medida (distância do ponto B' aos planos A'C'C e AA'C).
Sabemos que o volume do prisma (Vprisma) é calculado pela relação **Vprisma = Ab.h**, em que Ab é a base do prisma (ΔABC) e h, a medida da altura.

Observe que tal volume também pode ser determinado pela soma dos volumes das pirâmides P1, P2, e P3 (VP1, VP2, VP3, respectivamente)

$$V_{prisma} = V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} = 3V_{piramide} = A_b.h$$

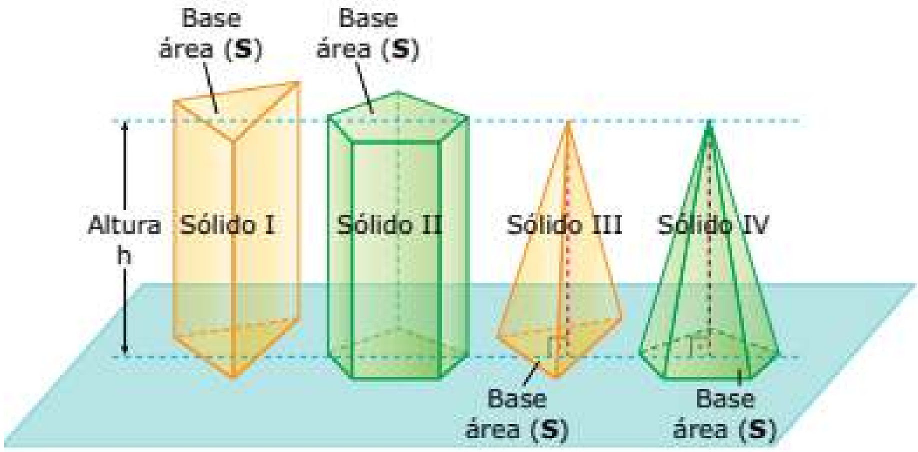
$$V_{pir\hat{a}mide} = \frac{A_b.h}{3}$$

Veja como é determinado, de forma intuitiva, o volume de uma Pirâmide

Clique aqui

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Com base no que foi exposto e no Princípio de Cavalieri, temos que o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume do prisma de mesma base e mesma altura.



Esses prismas possuem volumes iguais, pois têm áreas de bases iguais e mesma altura. Da mesma forma, as pirâmides possuem volumes iguais. Assim,

$$V_{sólidoIV} = V_{sólidoIII} = \frac{1}{3} V_{sólidoI} = \frac{1}{3} V_{sólidoII}$$

ou seja, o volume de toda pirâmide $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} V_{prisma}$ desde que o prisma e a pirâmide tenham a mesma altura e a mesma área da base.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Uma caixa de papelão tem formato de prisma de base retangular e será fabricada por uma indústria com as seguintes medidas: 40 cm de comprimento, 20 cm de largura e 15 cm de altura. Essa caixa irá armazenar barras de doces na forma de um prisma de base retangular com as dimensões medindo 8 cm de comprimento, 4 cm de largura e 3 cm de altura. Qual o número de doces necessários para o preenchimento total da caixa fabricada?

Vamos calcular inicialmente o volume da caixa e o volume do doce. Conforme o enunciado, a caixa e o doce possuem formatos de prismas de base retangular. Calculando o volume pela fórmula $V = A_b \cdot h$, temos:

Volume da caixa
$V = 40 \cdot 20 \cdot 15$
V = 12000 cm³

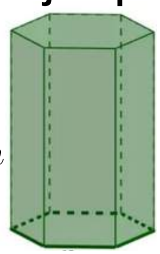
Volume do doce
$V = 8 \cdot 4 \cdot 3$
V = 96 cm³

Em seguida, determinamos o número de doces que podem ser armazenados na caixa.
Número total de doces armazenados na caixa:
12000 / 96 = 125
Serão armazenadas 125 barras de doces na caixa com as dimensões fornecidas.

2

Um objeto possui formato de um prisma de base hexagonal, como o da imagem a seguir. Analisando esse objeto, qual o espaço que ele ocupa, ou seja, qual o volume?

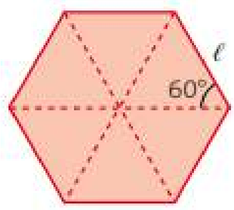
$25\sqrt{3}cm$



$15cm$

O cálculo do volume do prisma é determinado pelo produto da área da base pela altura. A base deste prisma é um **hexágono regular**.

O hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros.



Temos que a área do triângulo equilátero é dada por:

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Logo, a área de um hexágono regular é dada por: $A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Assim, a área do hexágono (base do prisma) é:

$$A = \frac{6 \cdot 15^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 225 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{1350\sqrt{3}}{4}cm^2$$

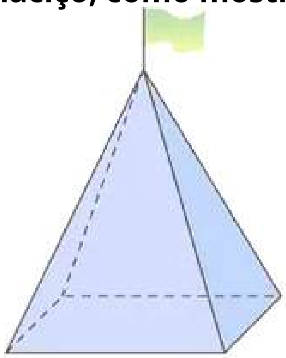
Desta forma, o volume é definido por $V = A_b \cdot h$, ou seja,

$$A = \frac{1350\sqrt{3}}{4} \cdot 25\sqrt{3} = \frac{33750 \cdot \sqrt{9}}{4} = \frac{33750 \cdot 3}{4} = \frac{101250}{4} = 25312,5cm^3$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

3

O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, qual o volume de concreto (em m³) necessário para a construção da pirâmide?

O volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma, ou seja $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

Desta forma, a área da base da pirâmide é igual a: $3^2 = 9$, pois ela é uma pirâmide de base quadrada. A altura é de 4 m, logo

$$V = \frac{9 \cdot 4}{3} = \frac{36}{3} = 12m^3$$

4

Uma indústria que produz perfumes à base de essências genuínas da Amazônia resolveu inovar nas embalagens de seus produtos para chamar atenção do consumidor. O Cheiro do Pará, por exemplo, foi engarrafado em frascos no formato de uma pirâmide quadrangular regular que, internamente, tem 15 cm de altura e 20 cm de perímetro da base. Qual o volume interno de um desses frascos?

O frasco possui formato de pirâmide quadrangular regular. Ou seja, a base da pirâmide é um quadrado. O perímetro da base é 20 cm. Portanto, a medida do lado da base é $20 \div 4 = 5cm$

Assim, a área da base da pirâmide é:
$A_b = 5^2 = 25cm^2$

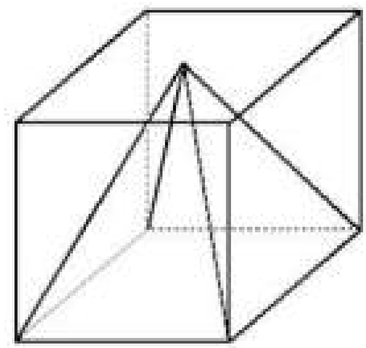
Logo o volume é:

$$V = \frac{5^2.15}{3} = 125cm^3$$

Atividade 1

Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura . Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3 , então, o volume do cubo, em m^3 , é igual a:

a) 9
b) 12
c) 15
d) 18
e) 21



Atividade 2

Um prisma de altura H e uma pirâmide têm bases com a mesma área. Se o volume do prisma é a metade do volume da pirâmide, a altura da pirâmide é:

a) H/6
b) H/3
c) 2H
d) 3H
e) 6H

Atividade 3

Para calcular a capacidade de um jarro de forma irregular, Paulo retirou água de um aquário que tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo e encheu completamente o jarro. observando que o fundo do aquário tem 50 cm de comprimento por 30 cm de largura e que após a retirada, o nível da superfície da água desceu 2 cm, o rapaz concluiu, corretamente que a capacidade do jarro é? (1000 cm^3 = 1L)

a) 3 L
b) 0,3 L
c) 2 L
d) 2,8 L
e) 2,7 L

Atividade 4

Uma piscina em forma de bloco retangular possui base com as medidas de 10,0m x 15,0m e está com água até a altura de 1,5m. Um produto químico em pó deve ser misturado à água na razão de um pacote para cada 4500 litros. O número de pacotes a serem usados é (considere 1m³ = 1000 litros):

a) 45
b) 50
c) 55
d)60
e)75

Atividade 5

Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20cm x 20cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40cm x 40cm x 60cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio será é:

a) 09
b) 11
c) 13
d) 15
e) 17

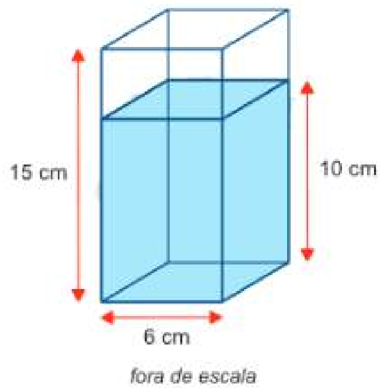
Atividade 6

Um dos mistérios da humanidade consiste em saber como as pirâmides foram construídas por civilizações que não tinham o aporte tecnológico que há na atualidade. Um artesão deseja construir uma escultura em argila no formato de pirâmide maciça de 1,5m de altura, com base quadrada medindo 1 m de lado. O volume do material que será usado é:

a) 0,65 m³.
b) 0,55 m³.
c) 0,5 m³.
d) 0,4 m³.
e) 0,35 m³

Atividade 7 (Desafio)

Um recipiente transparente possui o formato de um prisma reto de altura 15 cm e base quadrada, cujo lado mede 6 cm. Esse recipiente está sobre uma mesa com tampo horizontal e contém água até a altura de 10 cm, conforme a figura.

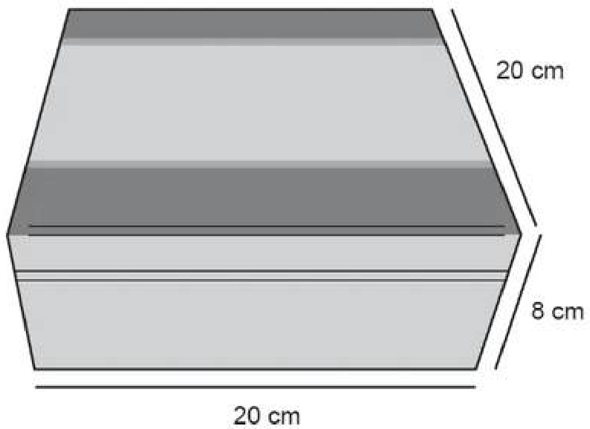


Se o recipiente for virado e apoiado na mesa sobre uma de suas faces não quadradas, a altura da água dentro dele passará a ser de

a) 4 cm.
b) 3,5 cm.
c) 3 cm.
d) 2,5 cm.
e) 2 cm.

Atividade 8 (Enem)

Uma fábrica comercializa chocolates em uma caixa de madeira, como na figura.



A caixa de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões externas, em centímetro, estão indicadas na figura. Sabe-se também que a espessura da madeira, em todas as suas faces, é de 0,5 cm.

Qual é o volume de madeira utilizado, em centímetro cúbico, na construção de uma caixa de madeira como a descrita para embalar os chocolates?

a) 654.
b) 666.
c) 673.
d) 681.
e) 693.

RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

Atividade 1

Pela fórmula, o volume da pirâmide é 1/3 do volume do prisma, ou seja, o prisma tem o triplo do volume da pirâmide. Assim, o cubo tem o volume 3 . 6 = 18 m³

Letra D

Atividade 2

Vamos considerar Volume do Prisma = Vp e Volume da Pirâmide = Vpi. Pelo enunciado temos:

$$V_p = \frac{1}{2}V_{pi}$$

Substituindo pela fórmula,

$$Ab.h_p = \frac{1}{2}.\frac{Ab.h_{pi}}{3}$$

O prisma e a pirâmide possuem a mesma área, logo

$$h_p = \frac{1}{2}.\frac{h_{pi}}{3} = h_p = \frac{h_{pi}}{6} = h_{pi} = 6h_p$$

Letra E

Atividade 3

O volume de água retirada é igual ao volume V de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 50 cm por 30 cm por 2cm: V = (50 . 30 . 2) = 3000 cm³

Logo, como 3.000 cm³ equivalem a 3 L, temos V = 3 L.

Letra A

Atividade 4

O volume da piscina é V = 10 x 15 x 1,5 = 225 m³ .

Sabendo que 1m³ = 1000 litros,

Temos que o volume da piscina é de 225 x 1000 = 225.000 litros.

Se a razão do produto químico é de 1 pacote para 4.500 litros, o número de pacotes necessários para para misturar no volume da piscina é de 225.000 litros é igual a 50. (225000 : 4500)

Letra B

Atividade 5

Volume de pacotes de dimensão 20 x 20 x 30 = 12.000 cm³.
Como são 100 pacotes, temos o volume total de 1.200.000 cm³.
O volume de cada caixa que acondicionará os pacotes é: 40 x 40 x 60 = 96.000 cm³
A quantidade de caixas é 1.200.000 : 96.000 = 12,5 caixas.
Logo, a quantidade mínima de caixas é igual a 13.
Letra C

Atividade 6

O volume da pirâmide é

$$V = \frac{1^2 \cdot 1,5}{3} = \frac{1,5}{3} = 0,5m^3$$

Letra C

Atividade 7

O volume do prisma é:
V = 10 x 6 x 6 = 360 cm³.

O volume do prisma ao ser virado é:
V = 15 x 6 x h = 90h

Para que os volumes sejam iguais, temos que
360 = 90h
h = 4 cm
Letra A

Atividade 8

Calcularemos a diferença entre os volumes interno e externo da caixa, sabendo que no volume interno será retirado 1 cm de cada dimensão. Então, temos que:
V = 20 · 8 · 20 – 19 · 7 · 19 = 3200 – 2527 = 673 cm³

Letra C

GABARITO

ATIVIDADE 1: D
ATIVIDADE 2: E
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: C
ATIVIDADE 6: C
ATIVIDADE 7: A
ATIVIDADE 8: C

REFERÊNCIAS

Dante, Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

Fonseca, Fred [et al.]. Coleção Ensino Médio 1ª Série. Belo Horizonte: Bernoulli Sistema de Ensino, 2024

Lezzi, Gelson, [et al.]. Matemática: Volume único. 4 ed. - São Paulo: Atual, 2007

Paiva, Manoel. Matemática: Paiva/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática: ensino médio: volume 1. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.