Matemática

3ª Série | Ensino Médio

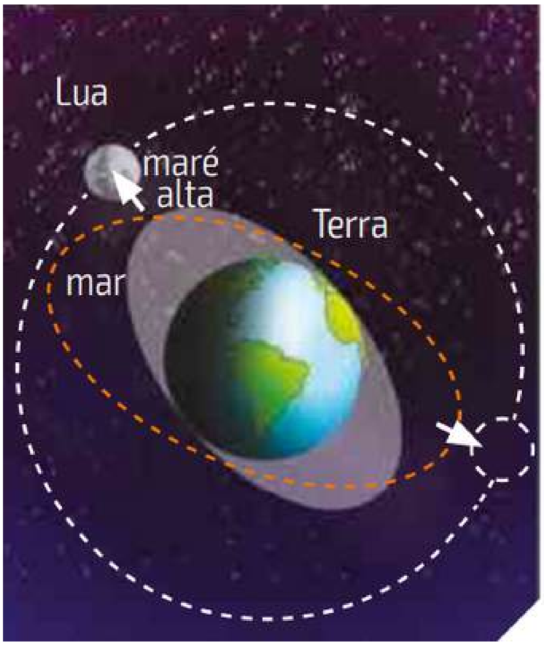
30ª Semana

O SENO

MONITORAMENTO	PEDAGOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID		PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO PAEBES	**D126_M** Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.				
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT306** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.				
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF09MA08** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.				

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO



Os movimentos periódicos de elevação e abaixamento da superfície de oceanos, mares e lagos são provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a Terra.

As marés ocorrem em intervalos regulares de 6 horas e 12 minutos. Portanto, a cada 24 horas e 48 minutos, o mar sobe e desce duas vezes, constituindo o fluxo e refluxo das águas. À medida que a Terra gira, outras regiões passam a sofrer elevações, como se a subida de nível se deslocasse, seguindo a Lua.

No lado oposto da Terra dá-se o mesmo fenômeno: as águas também se erguem, de forma que uma elevação compensa a outra. Assim, nas regiões da costa, essas elevações das águas correspondem às marés altas.

Enquanto o nível das águas sobe em dois lados opostos na Terra, em outras duas regiões do globo (também diametralmente opostas) ele desce: é a maré baixa. A diferença entre a maré baixa e a maré alta é denominada amplitude das marés, medida por meio de uma régua graduada, ou marégrafo. Como o movimento das marés é periódico, as funções trigonométricas são amplamente utilizadas para fazer uma modelagem matemática desse fenômeno.

Texto extraído do livro Contexto & Aplicações, de Luiz Roberto Dante

Neste material nós vamos iniciar o estudo das funções trigonométricas, começando pela função seno.

Bons estudos!

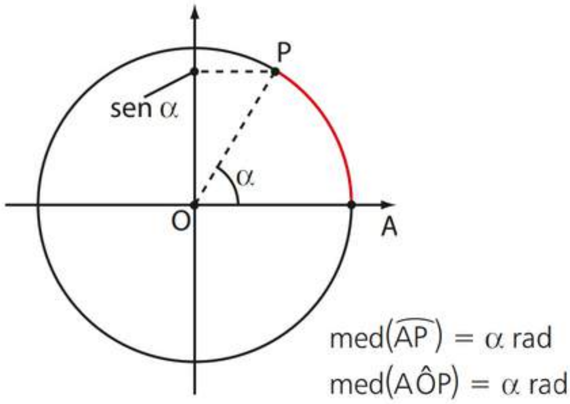
CONCEITOS E CONTEÚDOS

O SENO

No ciclo trigonométrico, considere um arco AP que possui medida angular α (em radianos). Podemos definir a ordenada do ponto P como o seno de α e a abscissa do ponto P como cosseno de α.

Neste material, estudaremos apenas o **seno** de α (ordenada do ponto P):

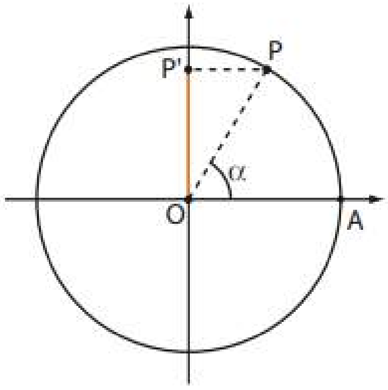
$$\text{sen}\,\alpha = \text{ordenada de } \mathbf{P}$$



Observe que, projetando ortogonalmente o ponto P sobre o eixo vertical, obtemos o ponto P'.

Considerando o sentido positivo ("para cima") do eixo vertical e tomando o segmento $\overline{OP'}$, podemos também definir o seno de α como a medida algébrica desse segmento, isto é,

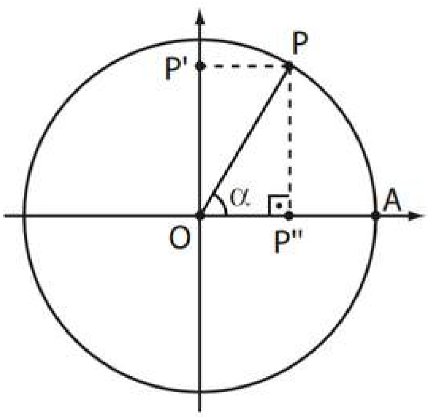
$$\text{sen}\,\alpha = \text{med}(\overline{OP'})$$



Daqui em diante, o eixo vertical da circunferência trigonométrica será chamado eixo dos senos.

Observação:

Veja a figura abaixo. Ela nos permite compreender que a definição anterior é "compatível" com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:



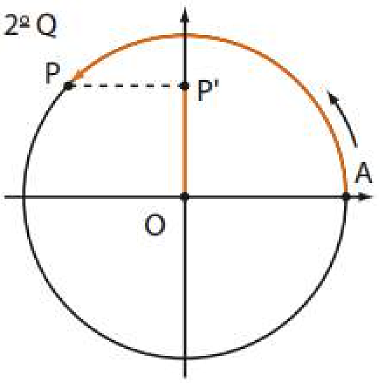
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}};\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Traçando o segmento $\overline{PP''}$ // $\overline{OP'}$, temos no $\triangle OPP''$:

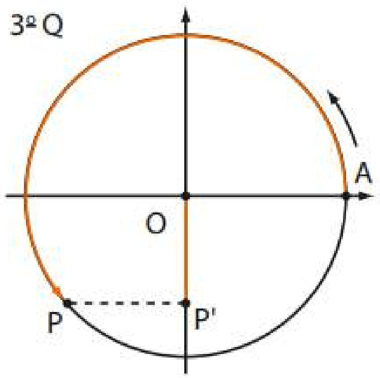
$$\text{sen}\,A\hat{O}P = \text{sen}\,\alpha = \frac{PP''}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP' = \text{med}(\overline{OP'})$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

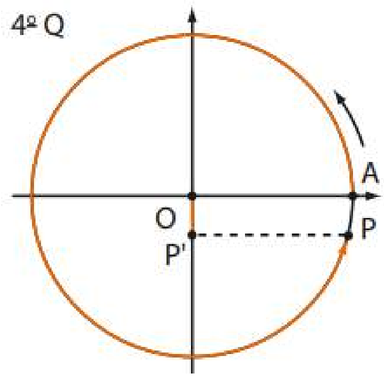
O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando o sentido positivo "para cima" no eixo dos senos e negativo "para baixo", observe o sinal do seno de α em cada quadrante, à medida que varia a ordenada de P.



ordenada de **P** > 0
$\text{sen}\ \alpha > 0$

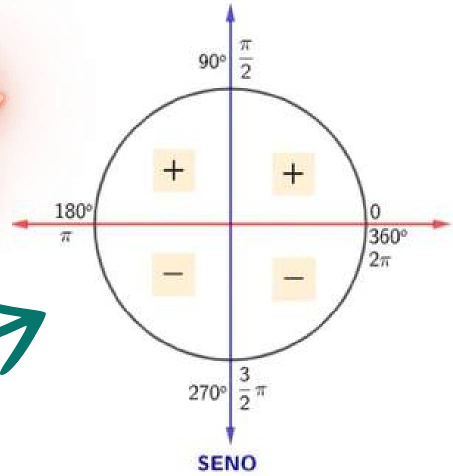


ordenada de **P** < 0
$\text{sen}\ \alpha < 0$



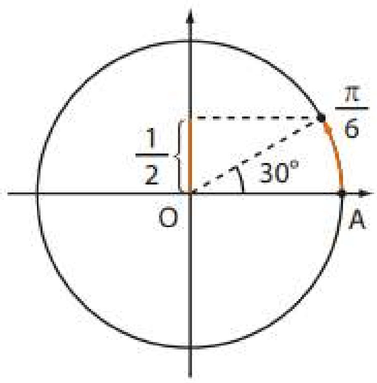
ordenada de **P** < 0
$\text{sen}\ \alpha < 0$

Observação:
Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, temos que, para todo α [0, 2π], -1 ≤ sen α ≤ 1, uma vez que a ordenada de qualquer ponto da circunferência trigonométrica varia de -1 a 1.

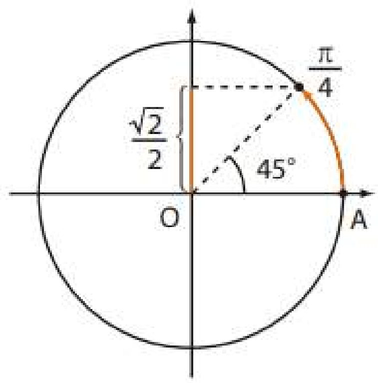


VALORES NOTÁVEIS

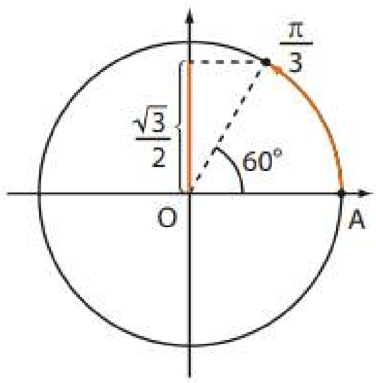
Já estamos familiarizados com o seno de alguns arcos, como $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$:



$$\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$$



$$\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

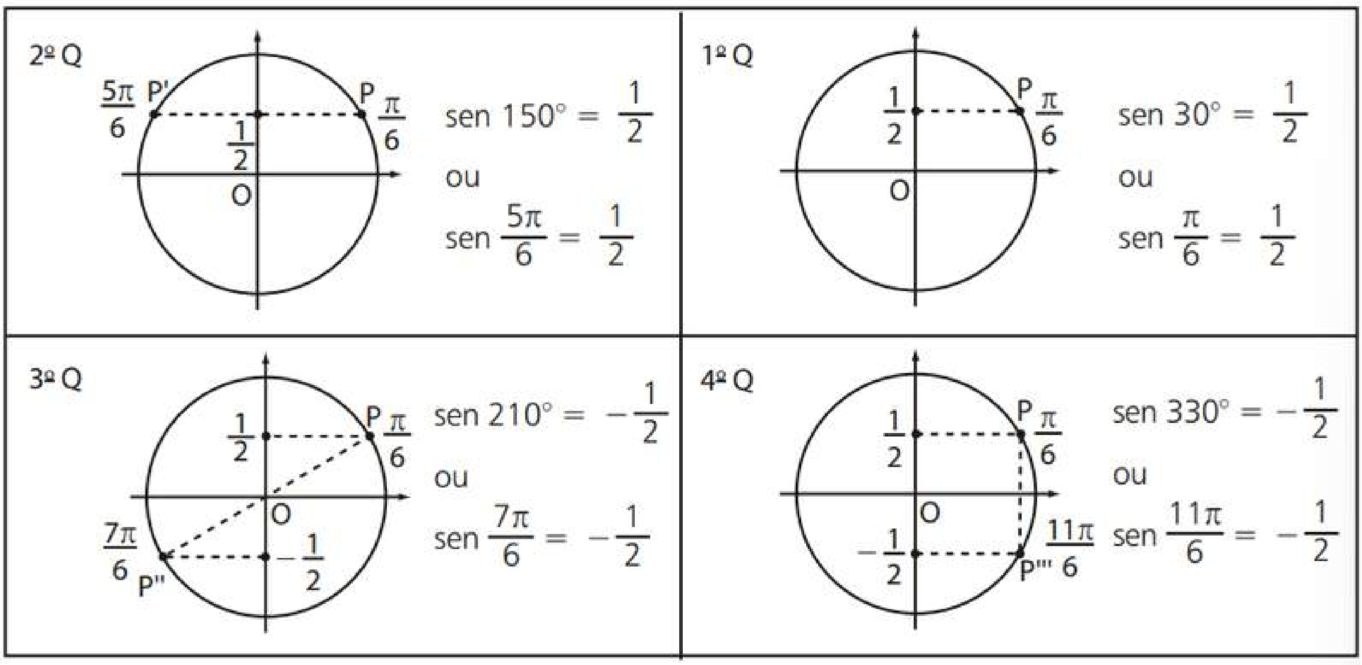


$$\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando os valores acima, é possível obter, por simetria, o seno de outros arcos.

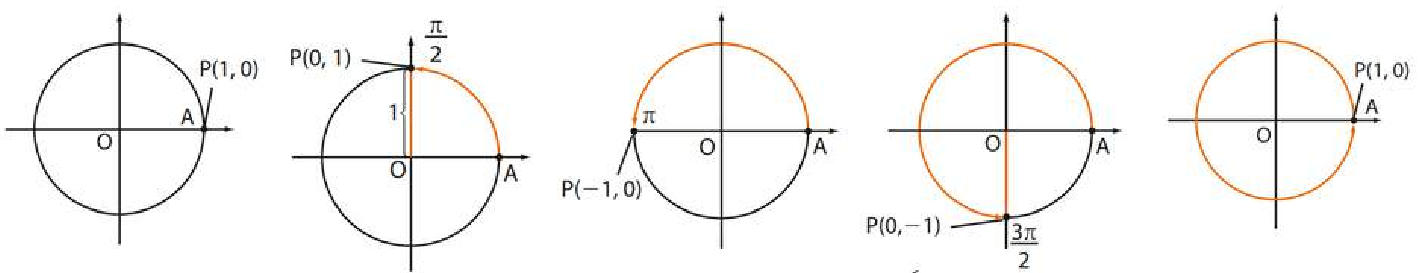
CONCEITOS E CONTEÚDOS

Acompanhe, na sequência dos quadrantes abaixo, os valores dos senos de arcos correspondentes a pontos simétricos de P. Nesses exemplos, P está relacionado a um arco AP de medida igual a radianos: $\frac{\pi}{6}$



Observe que determinamos o valor do seno de um número real comparando-o com o seno de um outro número real que pertence ao 1° quadrante. A redução ao primeiro quadrante trata da abscissa do ponto pertencer a esse quadrante.

Também é possível obter o valor do seno de números reais cujos pontos P coincidem com os pontos de interseção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados:



$\begin{cases} \text{sen } 0 = 0 \\ \text{sen } 0° = 0 \end{cases}$

A ordenada de **P** é 0.

$\begin{cases} \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1 \\ \text{sen } 90° = 1 \end{cases}$

A ordenada de **P** é 1.

$\begin{cases} \text{sen } \pi = 0 \\ \text{sen } 180° = 0 \end{cases}$

A ordenada de **P** é 0.

$\begin{cases} \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1 \\ \text{sen } 270° = -1 \end{cases}$

A ordenada de **P** é −1.

$\begin{cases} \text{sen } 2\pi = 0 \\ \text{sen } 360° = 0 \end{cases}$

A ordenada de **P** é 0.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

NA CALCULDORA

Nas calculadoras científicas, é possível obter o valor do seno (e de outras razões trigonométricas, como veremos adiante) de um arco qualquer expresso em graus ou em radianos.

Em graus, é preciso ajustar a calculadora na configuração [DEG] (degree, em inglês, significa grau) utilizando a tecla [MODE].

Para obtermos o valor de sen 36°, por exemplo, é preciso seguir a sequência abaixo: Primeiro ajustamos a configuração da calculadora para “graus”:

[MODE] , [DEG]

Em seguida, utilizamos a tecla [SIN] que fornece o valor do seno:

Ao clicar nas teclas [SIN] , [3] , [6] , [=], obtemos o valor aproximado 0,587785252

Em radianos, é preciso ajustar a calculadora na configuração [RAD], usando a tecla [MODE].

Para obtermos o valor de sen $\frac{\pi}{5}$, que corresponde a 36º, é preciso seguir a sequência abaixo:
Ajustamos a configuração para “radianos”:

[MODE] , [RAD]

[SIN] , [( ] , [π] , [:] , [5] , [ )] , [=]

Obtemos o valor aproximado 0,587785252.

Observe a importância do uso dos parênteses: se pressionássemos

[sin] , [π] , [:] , [5], a calculadora “entenderia” a operação $\frac{\text{sen}\,\pi}{5}$, que é, obviamente, diferente de sen$\left(\frac{\pi}{5}\right)$ e obteríamos, como resultado, o número zero, pois sen π = 0.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1

Qual é o valor de:

a) sen 240º?

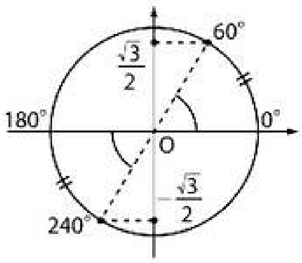
b) sen 135º?

c) sen $\dfrac{5\pi}{3}$?

d) sen $\dfrac{7\pi}{6}$?

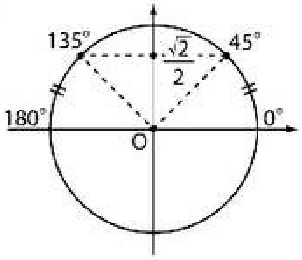
Solução:

a)



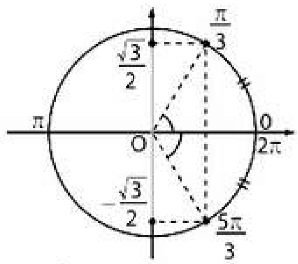
$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)



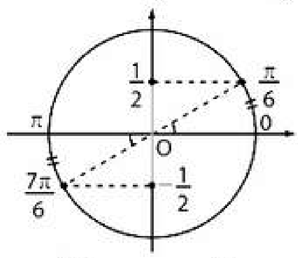
$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Observe, inicialmente, que $\dfrac{5\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$:



$$\text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) Note que $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$:



$$\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\text{sen } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

2

Utilizando uma tabela trigonométrica, obtenha o valor de sen 200°. Confira a resposta usando uma calculadora científica.

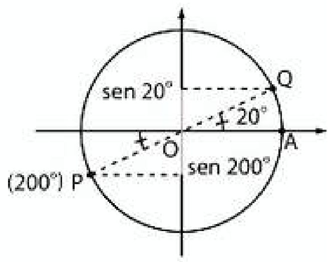
Solução:

No cálculo de sen 200° podemos traçar, a partir do ponto **P**, o diâmetro da circunferência, obtendo o ponto **Q** no 1º quadrante.

Temos: med(AÔQ) = 200° − 180° = 20°.

Daí, sen 200° = −sen 20°.

Consultando uma tabela trigonométrica, obtemos o valor aproximado para o sen 20° = 0,342. Portanto, $sen\,(200^o) \cong -0,342$



Na calculadora, basta pressionar

sin → 2 0 0 → = ⟶ −0.342020143

desde que ela esteja configurada na opção DEG. Obtemos o valor aproximado −0,342020143.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

São diversas as aplicações da Trigonometria em diferentes campos do conhecimentos, como na realização de cálculos de distâncias inacessíveis (Trigonometria nos triângulos) e o estudo de **fenômenos periódicos**. Esses fenômenos possuem oscilações que se repetem sistematicamente e podem ser observados na Música, por exemplo.

O diapasão é um instrumento metálico em forma de “U”, utilizado, por exemplo, para afinar instrumentos musicais, porque emite um som puro (sem mistura de ondas), produzido por vibrações após ser golpeado.

O osciloscópio é um aparelho que permite visualizar ondas sonoras.

O microfone é responsável por captar o som.

visor

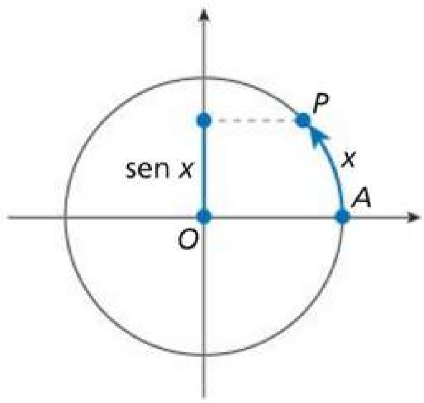
Representação das ondas sonoras produzidas pelo diapasão

Estudaremos agora as funções trigonométricas, começando neste material pela função seno e algumas de suas aplicações.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FUNÇÃO SENO

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x. Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada do ponto P é o **seno do arco** de medida x



A função **seno** é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real sen x, ou seja, $f(x) = \text{sen } x$.

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por f(x) = sen x, com base nos dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta, para os quais o seno já é conhecido:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
sen x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

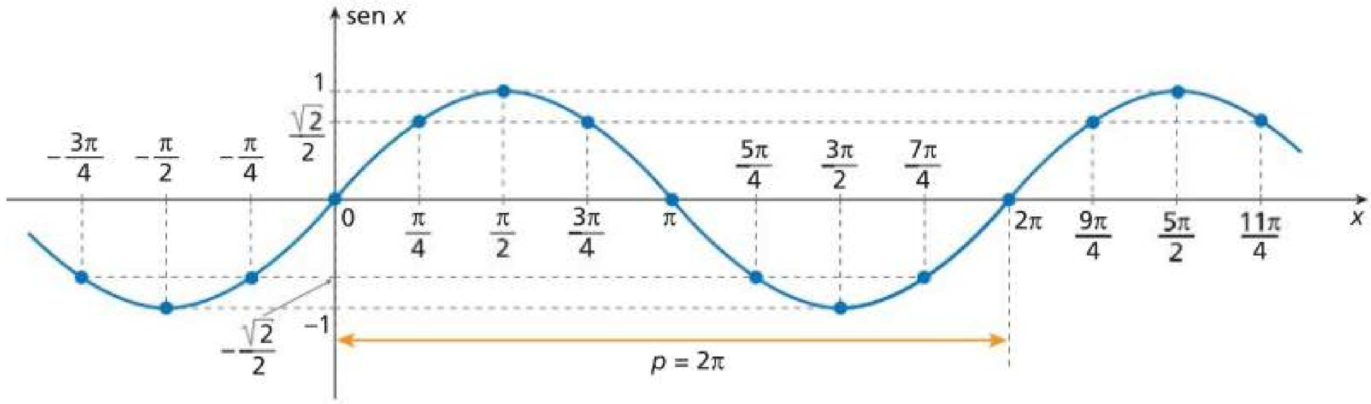
Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o seno de x assume os valores do seno de arcos da 1ª volta. Assim, a função seno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \ldots = \text{sen } (x + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo [0, 2π] repete-se para x > 2π e x < 0.

Assim, o gráfico da função seno se estende por todo o eixo x e tem o seguinte formato:

CONCEITOS E CONTEÚDOS



Características da função seno:

Por definição, o domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, chamado de senoide, observamos ainda que a função seno:

- é periódica, de período 2π (a curva se repete a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de sen x estão no intervalo [-1,1]; logo, seu conjunto imagem é IM = [-1,1].
- tem amplitude (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico) igual a 1.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

6

Determinar os valores reais de m para os quais existe a igualdade:

$$sen\,(x) = 3m - 2$$

Resolução:

Sabemos que os valores da função f(x) = sen x variam no intervalo [-1, 1].

Assim:

$$-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$$

substituindo sen x por $3m - 2$

$$-1 \leq 3m - 2 \leq 1$$

adicionando 2 em todos os membros

$$1 \leq 3m \leq 3$$

dividindo todos os membros por 3

$$\frac{1}{3} \leq m \leq 1$$

Então, m assume valores em $\mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{3} \leq m \leq 1.$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

7

Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

$$Z(t) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi t}{4},$$

em que o tempo t é medido, em ano, a partir de janeiro de 2000 (t = 0).

a) Quantas zebras havia em janeiro de 2016?

b) Qual foi a população mínima de zebras atingidas nessa região?

c) De acordo com a função dada, quando foi a primeira vez que a população de zebras foi mínima?

d) De quanto em quanto tempo a população de zebras se repete?

Resolução:

a) Em janeiro de 2016, temos $t = 16$. Substituindo t por 16 na equação dada, obtemos:

$$Z(16) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot 16}{4}\right)$$

$$Z(16) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\ (4\pi)$$

$$Z(16) = 850 + 400 \cdot 0 = 850$$

Logo, em janeiro de 2016 havia 850 zebras.

b) A população mínima ocorre quando sen $\frac{\pi t}{4}$ atinge seu valor mínimo, ou seja, quando sen $\frac{\pi t}{4} = -1$. Então, para esse valor, temos:

$$Z(t) = 850 + 400 \cdot (-1) = 450$$

Logo, a população mínima foi de 450 zebras.

c) Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sen x atinge seu valor mínimo (-1) para $x = \frac{3\pi}{2}$.

Então, a função dada será mínima para:

$$\frac{\pi t}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow t = 6$$

Portanto, a população de zebras atingiu seu valor mínimo, pela primeira vez, 6 anos após janeiro de 2000, ou seja, em janeiro de 2006.

d) A função seno tem período 2π. Assim:

$$\frac{\pi t}{4} = 2\pi \Rightarrow \frac{t}{4} = 2 \Rightarrow t = 8$$

Logo, a população de zebras se repete de 8 em 8 anos.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

TRANSLADANDO O GRÁFICO

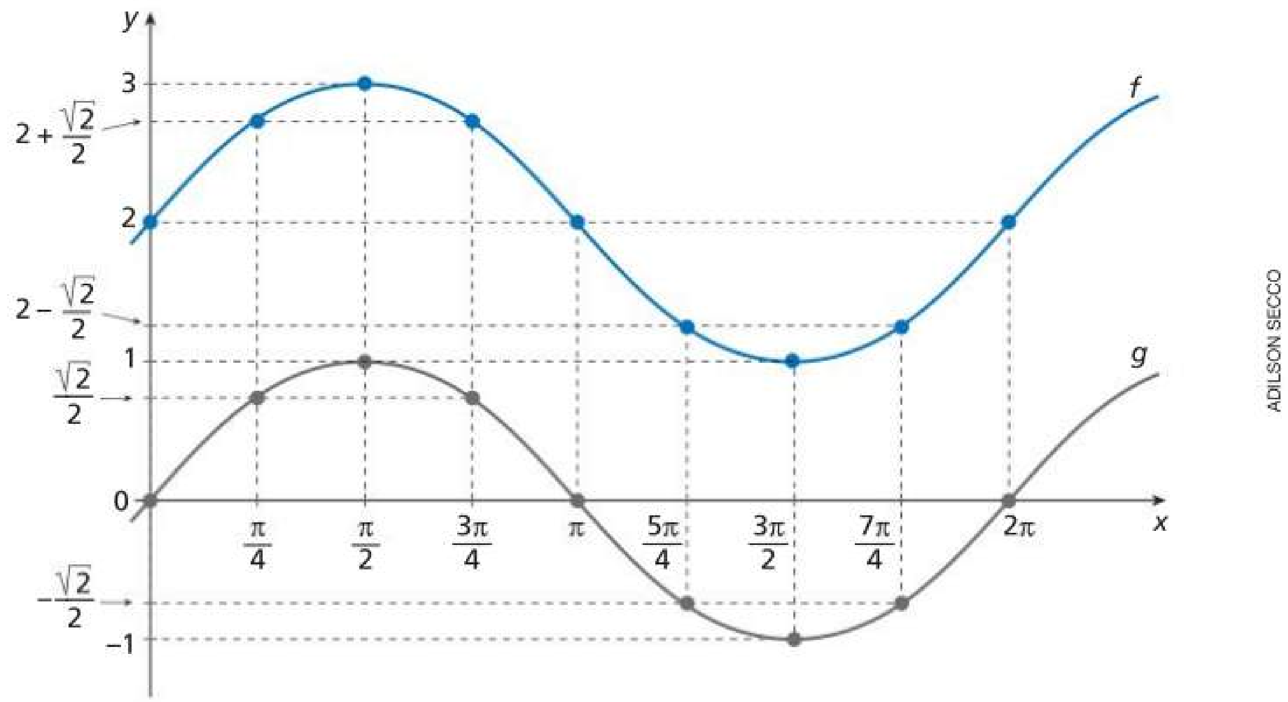
Transladar significa deslocar. A seguir, veremos alguns gráficos de funções que podem ser obtidos por meio de deslocamentos verticais ou horizontais dos gráficos das funções fundamentais. Acompanhe.

$f(x) = 2 + \text{sen } x$

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2 +$ sen x	2	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Construímos, então, os gráficos das funções dadas por g(x) = sen x e f(x) = 2 + sen x, em um mesmo sistema de eixos, para efeito comparativo:



Observe que, transladando (deslocando) o gráfico de g, ponto a ponto, duas unidades para cima, obtemos o gráfico de f. Agora, o gráfico oscila entre os valores mínimo 1 e máximo 3. Ou seja, o conjunto imagem de f é [1,3]. Note que o domínio, o período e a amplitude, em relação à função g, não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = c + \text{sen } x$ são obtidos a partir de uma translação de $|c|$ unidades em relação ao gráfico $y = \text{sen } x$ da seguinte forma:

- se $c > 0$, a translação é para cima;
- se $c < 0$, a translação é para baixo.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ALTERANDO O PERÍODO

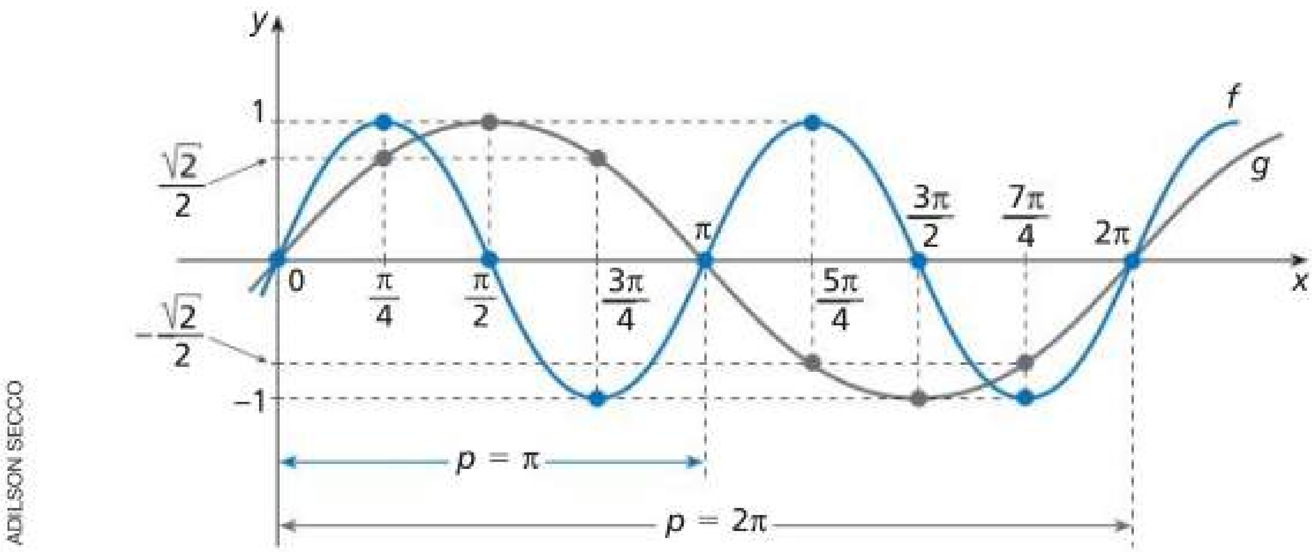
Nos tópicos anteriores, estudamos alguns gráficos que são obtidos a partir de translações horizontais ou verticais ou modificação na amplitude dos gráficos das funções trigonométricas fundamentais, embora conservem o período. Neste tópico, veremos exemplos de gráficos que sofrem alteração de período em relação às funções fundamentais. Acompanhe.

Vamos construir o gráfico da função f dada por f(x) = sen 2x e compará-lo com o da função g dada por g(x) = sen x.

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sen $2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Construímos, então, os gráficos das funções g e f dadas por g(x) = sen x e f(x) = sen 2x no mesmo sistema de eixos:



Observe que f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem e mesma amplitude que g, porém tem período igual a π, ou seja, metade do período de g.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

É correto afirmar que sen 150º é

A) $-\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) 1

Atividade 2

É correto afirmar que sen $\frac{\pi}{2}$ é:

A) $-\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{2}$
C) 0
D) 1
E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Atividade 3

É correto afirmar que sen 360º e sen 60º são, respectivamente,

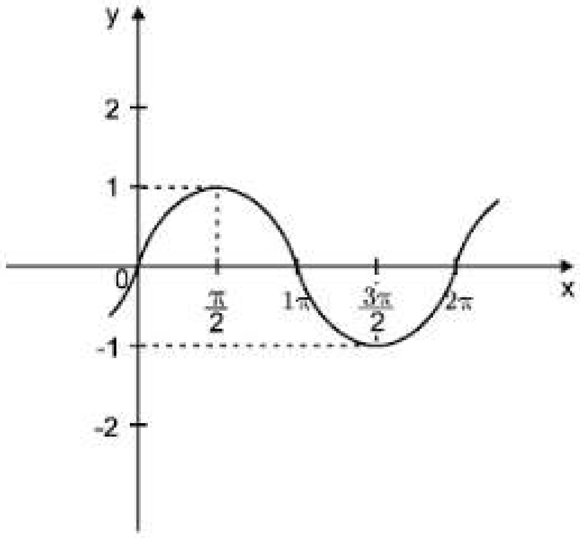
A) 0 e $\frac{1}{2}$
B) 1 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C) 0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e 0
E) 1 e $\frac{1}{2}$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

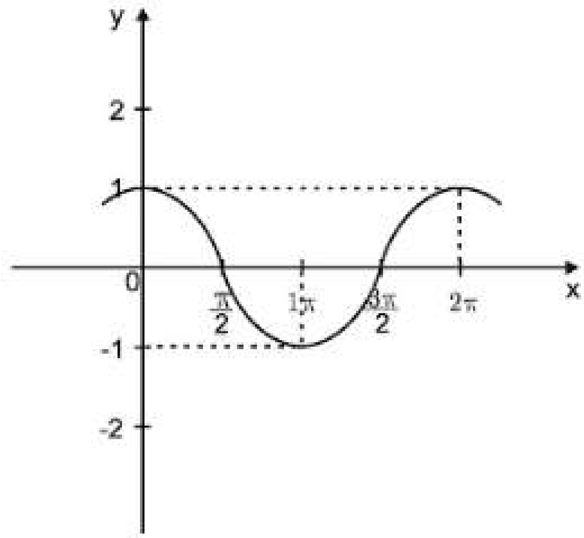
Atividade 4

(M110083CE) A função $f(x) = \text{sen } x$, é representada graficamente por

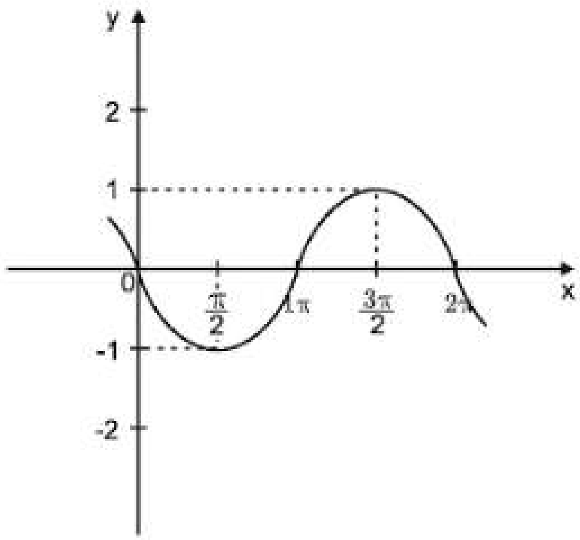
A)



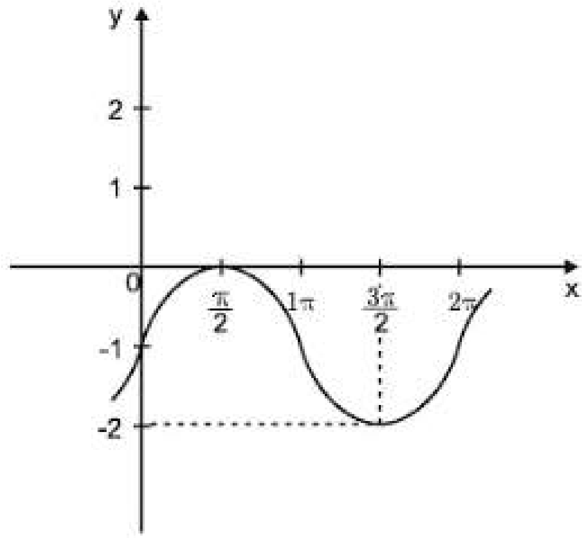
B)



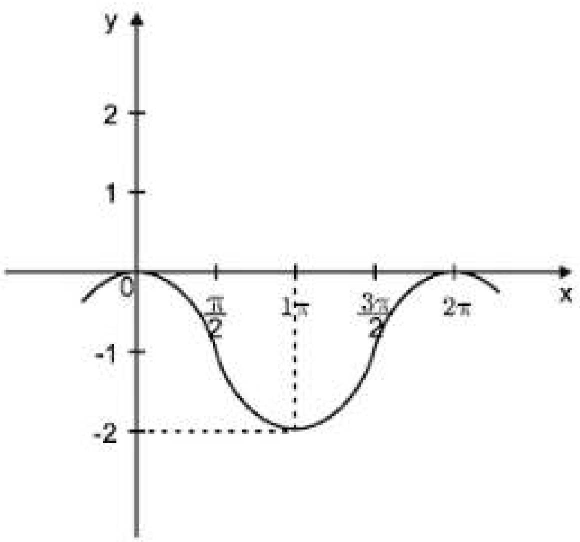
C)



D)



E)



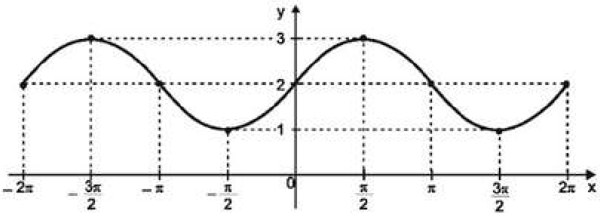
ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 5

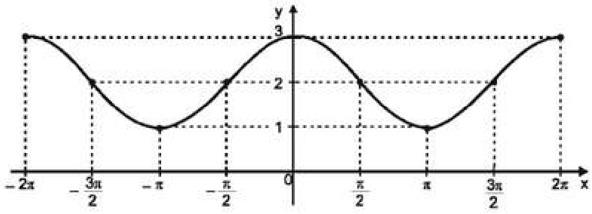
(M120243A9) O gráfico da função trigonométrica y = 2 + senx definida no intervalo [– 2π, 2π] foi traçado em um plano cartesiano.

O plano cartesiano em que essa função foi representada é

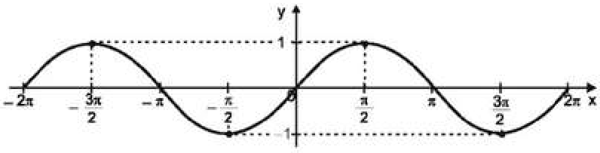
A)



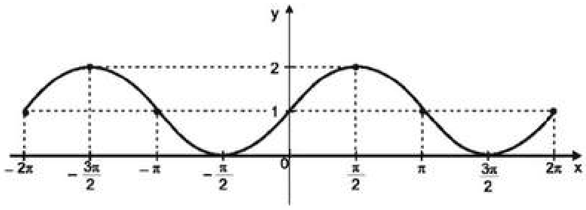
B)



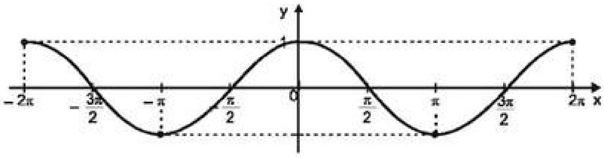
C)



D)

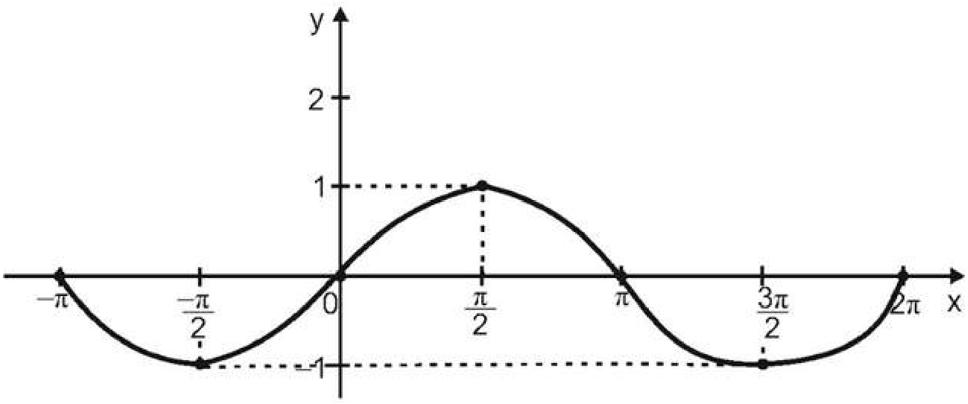


E)



Atividade 6

(M120527A9) No plano cartesiano abaixo foi representada uma função trigonométrica f : IR → [– 1, 1].



Qual é a função trigonométrica f representada nesse gráfico?

A) f(x) = sen(x)

B) f(x) = 2 sen (x)

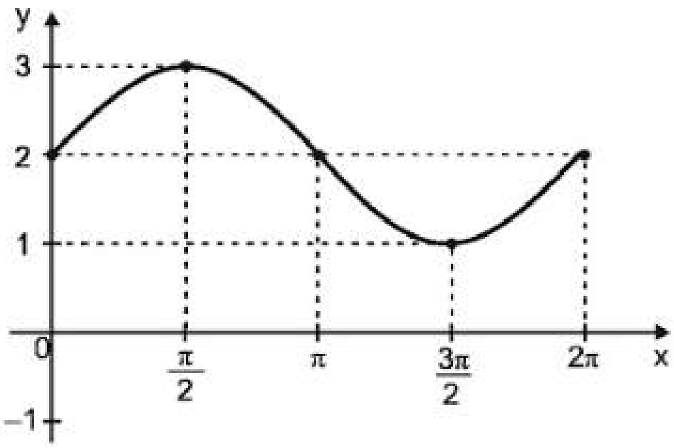
C) f(x) = sen (2x)

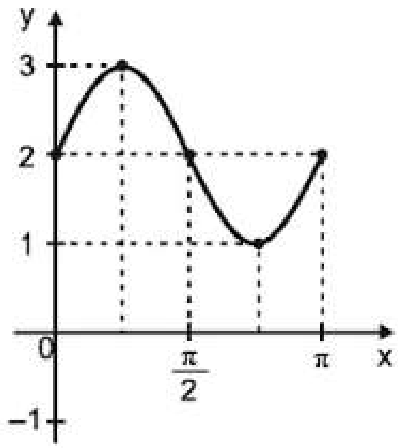
D) f(x) = sen (4x)

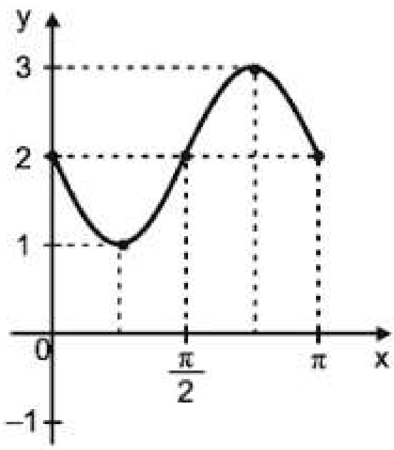
E) f(x) = sen (8x)

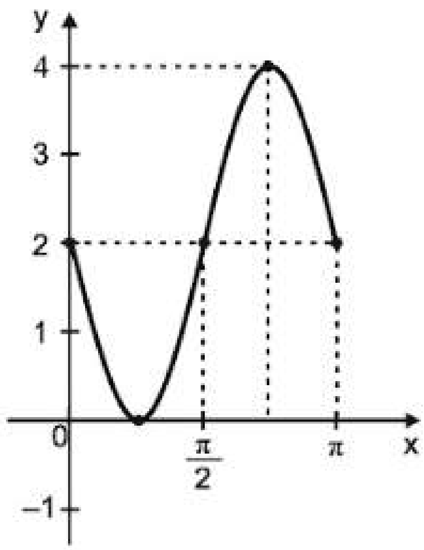
Atividade 7

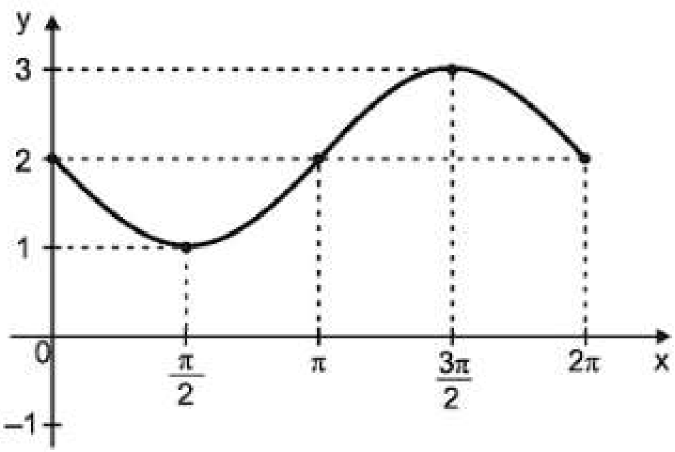
A função $f(x) = 2 + sen(2x)$ definida no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ foi representada em um plano cartesiano. O gráfico que representa essa função é:

A)


B)


C)


D)


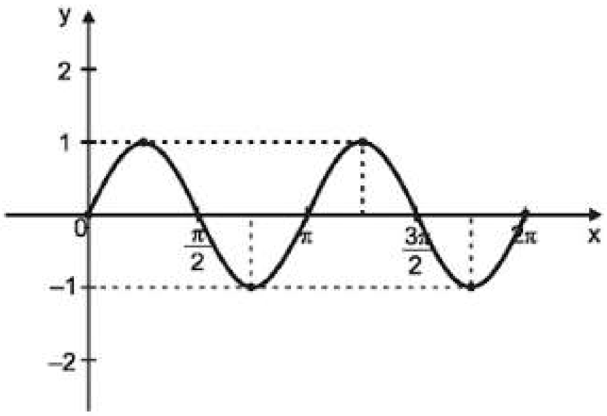
E)


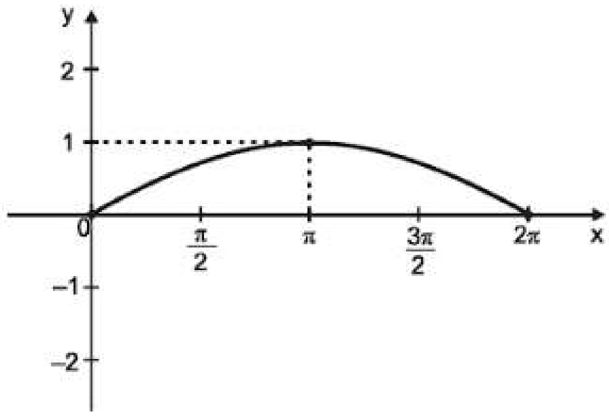
Desafio!

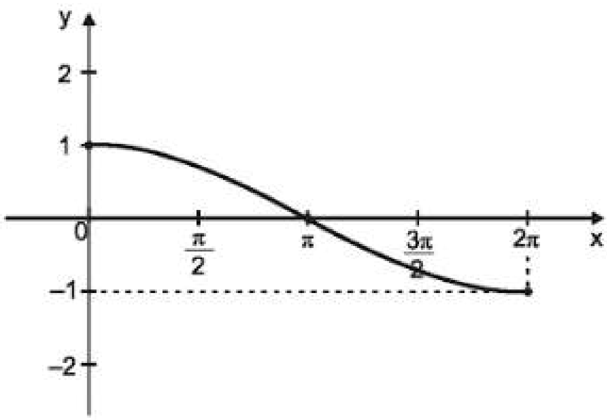
Atividade 8

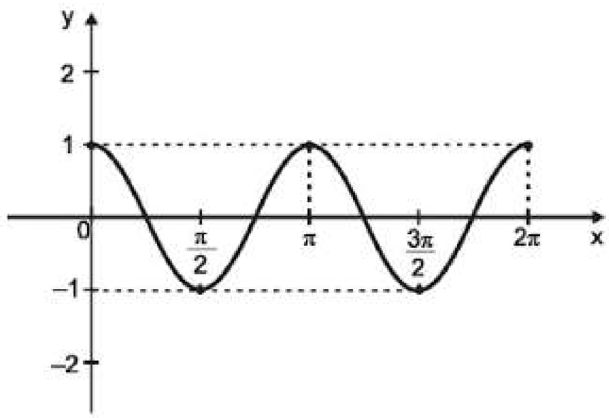
(M120601A9) A função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, na qual $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, foi representada graficamente em um plano cartesiano.

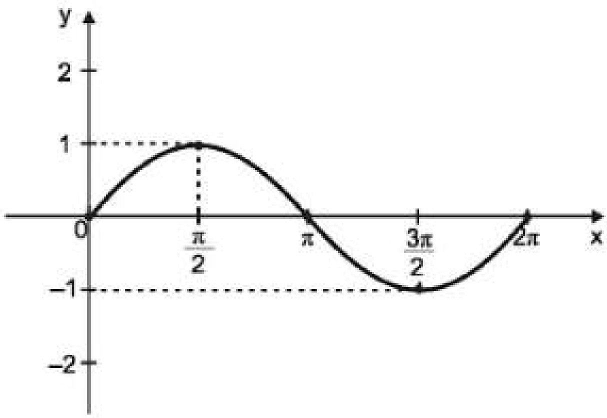
O plano que contem a representação gráfica dessa função é

A)


B)


C)


D)


E)


GABARITO

ATIVIDADE 1: B
ATIVIDADE 2: D
ATIVIDADE 3: C
ATIVIDADE 4: A
ATIVIDADE 5: A
ATIVIDADE 6: A
ATIVIDADE 7: B
ATIVIDADE 8: B

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Chavante, Eduardo Quadrante matemática e suas tecnologias : trigonometria e sequências / Eduardo Chavante, Diego Prestes. -- 1. ed. -- São Paulo : Edições SM, 2020.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. - 3. ed. - São Paulo : Moderna, 2016.

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Matemática : ciência e aplicações : ensino médio, volume 2 / Gelson Iezzi. . . [et. al.] . – 9. ed. – São Paulo : Saraiva, 2016.

Souza, Joamir Roberto de #Contato matemática, 2º ano / Joamir Roberto de Souza, Jacquelie da Silva Ribeiro Garcia. - 1. ed. - São Paulo : FTD, 2016 - (Coleção #contato matemática)