

Matemática

2ª Série | Ensino Médio

32ª Semana



Sólidos Geométricos
(Cilindros e Cones: Cálculo
de Volumes de Sólidos
Geométricos)



MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRIPTOR DO PAEBES	D129_M Resolver Problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	EM13MAT504 Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri para obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	EF09MA19 Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.			

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

A Geometria Espacial e as formas na Natureza

Semelhante ao cilindro, o cone é um sólido geométrico que pode ser obtido a partir de uma pirâmide cuja base é um polígono regular, no qual o número de lados tende ao infinito e a medida de lado do polígono tende a zero, o que torna a base um círculo. O vulcão Mayon nas Filipinas tem o cume na forma de um cone quase perfeito. Sua estrutura natural é considerada a mais simétrica do mundo. O cone do vulcão possui altura de 2252 metros, e a circunferência da base tem comprimento de 130 quilômetros.



Fonte: Site Advisor Travel

Em Junho de 2023, o vulcão entrou em atividade e forçou mais de 12 mil pessoas a saírem de suas casas nas Filipinas.

Localizado a cerca de 330 quilômetros a sudeste da capital, Manila, o Monte Mayon é considerado um dos mais imprevisíveis dos 24 vulcões ativos nas Filipinas. Há cinco anos, dezenas de milhares de pessoas tiveram que ser retiradas de suas casas, devido à erupção do Monte Mayon.

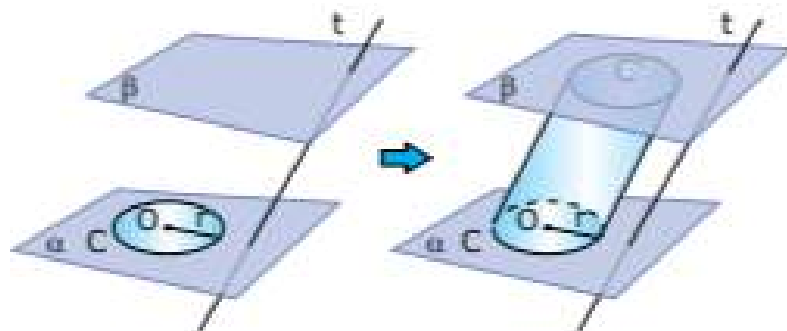
— Há um risco duplo para a saúde, ao se estar próximo da erupção, devido à inalação de gases de dióxido de enxofre, ou das partículas das chuvas de cinzas — disse o secretário de Saúde Teodoro Herbosa, em uma coletiva de imprensa.

O arquipélago das Filipinas está localizado no "Anel de Fogo" do Pacífico, onde as placas tectônicas colidem, causando terremotos e forte atividade vulcânica.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

CILINDRO

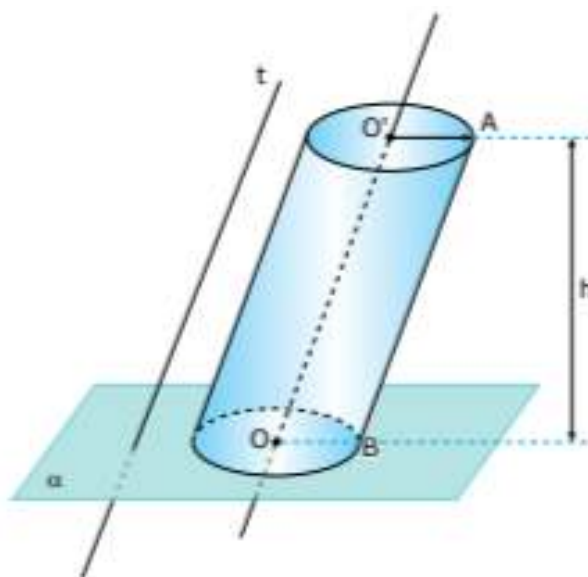
Considere α e β dois planos paralelos, C um círculo contido no plano α , C' um círculo contido no plano β e t uma reta secante a esses planos. Define-se como cilindro o conjunto de todos os segmentos paralelos a t e que possui seus extremos em C e C' .



Dessa forma, tem-se um sólido geométrico denominado cilindro ou cilindro circular que constitui um corpo redondo maciço, formado pela superfície e seu interior.

ELEMENTOS DO CILINDRO

- **Bases:** são as regiões circulares, paralelas e congruentes C e C' .
- **Eixo do cilindro:** reta que passa pelo centro das bases do cilindro (reta OO').
- **Raio da base:** raio do círculo da base (OB).
- **Geratrizes:** são os segmentos de reta paralelos à reta t com medida AB e extremos nas circunferências que delimitam as bases.
- **Altura:** distância entre as duas bases (h).



VOLUME DE CILINDRO

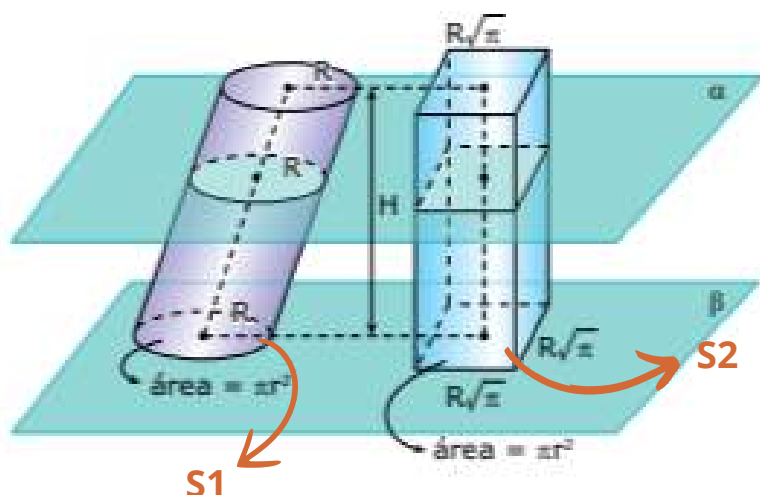
Para determinar o volume de um cilindro, podemos usar a comparação de seções, que traduz o Princípio de Cavalieri. Veja a figura a seguir, que ilustra um prisma quadrangular regular de lado $R\sqrt{\pi}$ e área da base S_2 e um cilindro oblíquo com raio da base R e área da base S_1 , os dois com a mesma altura H .

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Perceba que a área $S1$ é igual a πR^2 e $S2$ igual a $R^2\pi$, assim $S1 = S2$.

Como é sabido que os dois sólidos possuem a mesma altura, pode-se concluir, pelo **Princípio de Cavalieri**, que o volume será o mesmo e pode ser traduzido em $V = A_b \cdot H$, em que A_b e H são a área da base e a altura dos sólidos, respectivamente.

No caso do cilindro, uma vez que sua área da base é igual à de um círculo de raio R , o volume será determinado por $V = \pi R^2 \cdot H$



Veja como é determinado, de forma intuitiva, o volume de um Cilindro

[Clique aqui](#)



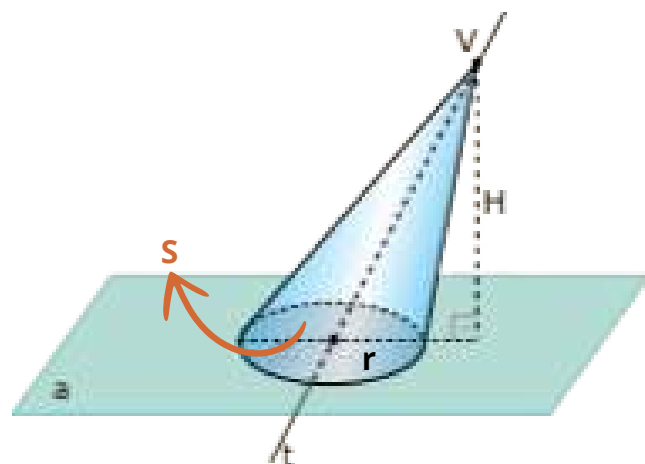
CONES

Considere um plano α , uma região circular S contida em α , e um ponto V , situado externamente a α . O conjunto de segmentos de extremos no ponto V e na região S é denominado cone.



ELEMENTOS DO CONE

- **Base:** é o círculo S contido no plano α .
- **Raio da base:** é a distância entre o centro da base e a circunferência que delimita a base.
- **Eixo do cone:** é a reta (t) determinada pelo centro da base e pelo ponto V .
- **Vértice:** é o ponto V externo ao plano α .
- **Geratriz:** é qualquer segmento com extremo no vértice do cone e na circunferência que delimita a base.
- **Altura:** é a distância (H) do vértice ao plano α .



CONCEITOS E CONTEÚDOS

VOLUME DE CONES

A determinação do volume do cone pode ser obtida com uso do **Princípio de Cavalieri**. Observe a seguir.

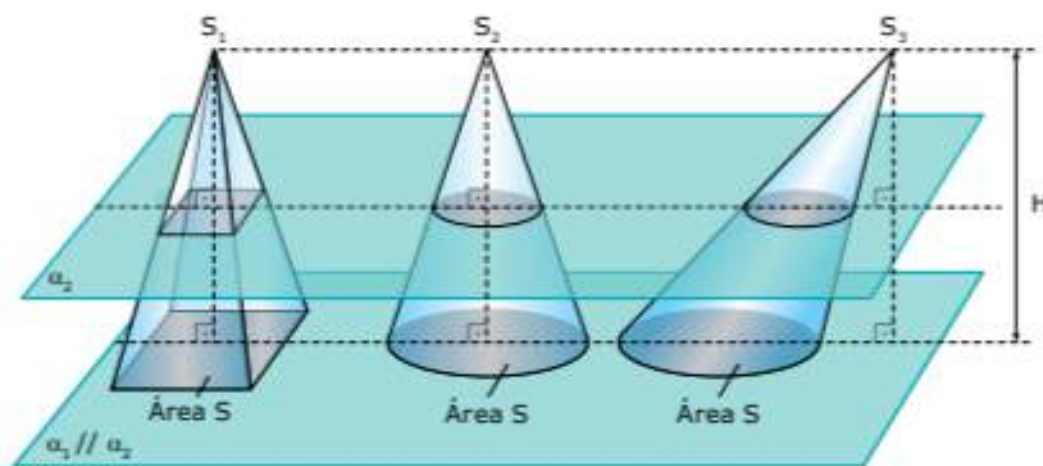
Considere uma pirâmide quadrangular regular (S1), um cone reto (S2) e um cone oblíquo (S3) com a mesma altura **H** e mesma área da base **S**.

O plano α_2 (paralelo a α_1) secciona os sólidos S1, S2 e S3 em toda a sua extensão, em regiões da mesma área.

Logo, os sólidos possuem volumes iguais pelo Princípio de Cavalieri ($V_{S_1} = V_{S_2} = V_{S_3}$, em que V_{S_1} , V_{S_2} e V_{S_3} são, respectivamente, os volumes dos sólidos S1, S2 e S3).

$$V_{S_1} = V_{S_2} = V_{S_3} = \frac{S \cdot H}{3} \Rightarrow V = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

Em que A_b é a área da base dos sólidos e H, a altura correspondente.



Veja como é determinado, de forma intuitiva, o volume de um Cone



[Clique aqui](#)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Um objeto cilíndrico possui o diâmetro de 16 cm e altura igual a 25 cm. Considerando $\pi = 3,14$, determine o volume desse objeto, em cm^3 .

A área da base do cilindro é igual a $A = \pi R^2$, dessa forma $A = 3,14 \cdot 8^2 = 3,14 \cdot 64 = 200,96 \text{ cm}^2$.

Observe que o raio é igual a 8, pois o raio é a metade do diâmetro. ($16 : 2 = 8$)

Aplicando na fórmula de volume de cilindro, temos que: $V = A_b \cdot H$, ou seja,

$$V = 200,96 \cdot 25 = 5024 \text{ cm}^3$$

2

No lava jato Limpeza Total, houve um grande movimento hoje, tendo recebido 23 clientes para lavagem completa. No entanto, ao começar a lavar o próximo carro, a água acabou. Só então os funcionários se deram conta que a empresa fornecedora de água emitiu um alerta dizendo que devido a reparos e obras de manutenção, neste dia, não haveria abastecimento. O dono do estabelecimento pediu um abastecimento de urgência com um caminhão pipa e a empresa fornecedora de água perguntou a capacidade do reservatório. Como era bem antigo, as indicações de capacidade estavam apagadas, sendo necessário fazer o cálculo a partir de suas medidas. O reservatório é um cilindro de 4 m de altura e diâmetro de 1,80 m. A empresa fornecedora de água possui cinco opções de entrega em caminhões pipa.

Marque a opção que poderá ser solicitada pelo proprietário do lava jato, enchendo o máximo possível seu reservatório.

Considere: $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$ e $\pi = 3,14$

a) 12 000 L.

b) 11 000 L.

c) 10 000 L.

d) 9 000 L.

e) 8 000 L.

Devemos calcular o volume em metros cúbicos e depois transformar em litros.

O volume de um cilindro pode ser calculado pela multiplicação da área da base, pela altura.

Sendo o diâmetro igual a 1,80 m, o raio é 0,90 m, temos que

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V = 3,14 \cdot 0,90^2 \cdot 4 = 3,14 \cdot 0,81 \cdot 4 = 10,1736 \text{ m}^3$$

Como $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$, basta multiplicar o resultado do cálculo do volume do cilindro por 1000.

$$V = 10,1736 \text{ m}^3 \times 1000 = 10173,6 \text{ L}$$

Dessa forma, o proprietário do lava jato poderá pedir o caminhão pipa com 10000 L.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3

Um reservatório foi construído no formato de um cone. Sabendo que ele possui diâmetro da base medindo 8 metros e altura igual a 5 metros, sendo $\pi = 3$, o volume desse reservatório é de:

- A) 20 m³
- B) 48 m³
- C) 64 m³
- D) 80 m³
- E) 96 m³

Considerando que o diâmetro da base é de 8 metros e que o raio é metade do diâmetro:

$$r = 8 : 2 = 4 \text{ m}$$

As outras informações são que $h = 5$ e $\pi = 3$.

Calculando o volume do cone:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow V = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot 5}{3} \Rightarrow V = \frac{3 \cdot 16 \cdot 5}{3} \Rightarrow V = 16 \cdot 5 \Rightarrow V = 80 m^3$$

4

Uma embalagem no formato de cone deve ter volume de 310 cm³. Sendo a altura dessa embalagem de 12 cm, seu raio deve ser de: (Utilize 3,1 como aproximação de π)

- A) 3 cm
- B) 4 cm
- C) 5 cm
- D) 6 cm
- E) 7 cm

Os dados são que $V = 310 \text{ cm}^3$, $h = 12 \text{ cm}$ e $\pi = 3,1$. Substituindo os valores conhecidos na fórmula do volume:

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

$$310 = \frac{3,1 \cdot r^2 \cdot 12}{3}$$

$$310 \cdot 3 = 3,1 \cdot r^2 \cdot 12$$

$$930 = 37,2 r^2$$

$$\frac{930}{37,2} = r^2$$

$$25 = r^2$$

$$r = \sqrt{25}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

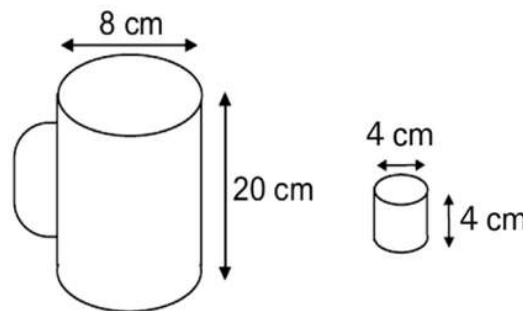
Um silo que armazena grãos de soja em uma fazenda, apresentou um problema em sua estrutura e precisa ser reparado com uma solda na parede. O silo é uma torre na forma de um cilindro de 10 m de altura e diâmetro de 6 m. Para realizar o serviço, o gerente decidiu esvaziar o silo, armazenando a produção temporariamente em caçambas de carretas na forma de paralelepípedos, com as medidas iguais a 12 m de comprimento, 2 m largura e 1,5 m de altura. Quantas caçambas são necessárias para armazenar todo o conteúdo?

Utilize $\pi = 3,14$.

- a) 15 caçambas
- b) 7 caçambas
- c) 16 caçambas
- d) 9 caçambas
- e) 8 caçambas

Atividade 2 (Enem)

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:

- a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 3

A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado, está acoplado um cano cilíndrico com 4 cm de diâmetro e 50 m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio.

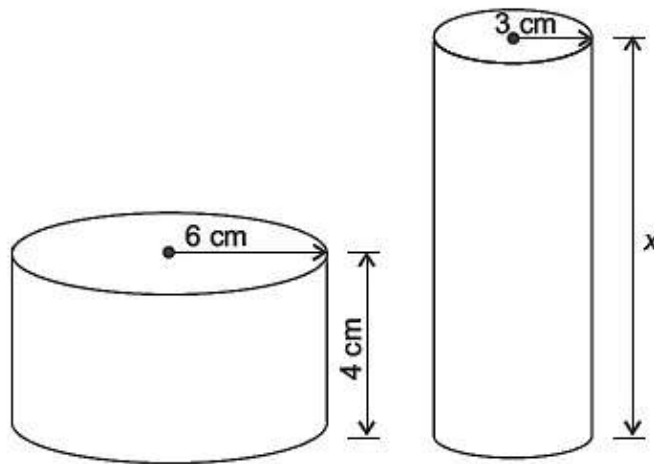
Solta-se a água da caixa para o cano até que ele fique completamente cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

(considere $\pi = 3$)

- a) 90 cm.
- b) 92 cm.
- c) 94 cm.
- d) 96 cm.
- e) 98 cm.

Atividade 4

Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura.



Disponível em: www.cbma.org.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, V_1 , é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, V_2 .

A medida da altura desconhecida vale

- a) 8 cm.
- b) 10 cm.
- c) 16 cm.
- d) 20 cm.
- e) 40 cm.

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

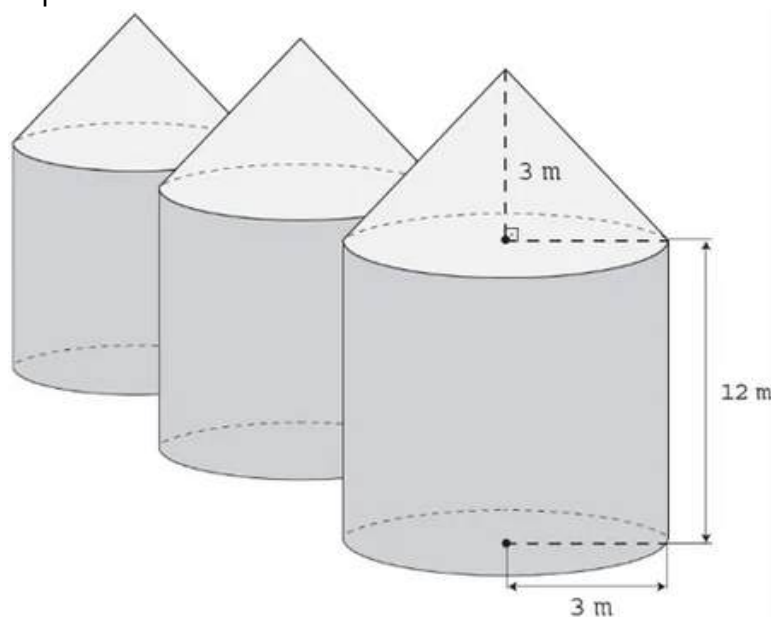
Atividade 5

Um reservatório cônico será construído para armazenagem de gás de uma determinada indústria. Sabendo que esse reservatório vai ter 3,5 metros de altura e 3,0 metros de diâmetro, então o volume máximo desse reservatório é de:

- a) $2,625\pi \text{ m}^3$
- b) $5,250\pi \text{ m}^3$
- c) $7,875\pi \text{ m}^3$
- d) $11,812\pi \text{ m}^3$
- e) $15,750\pi \text{ m}^3$

Atividade 6

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- a) 6
- b) 16
- c) 17
- d) 18
- e) 21

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 7

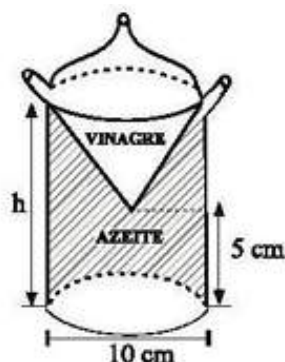
Um monte de areia tem a forma de um cone circular reto, com volume $V = 4\pi m^3$. Se o raio da base é igual a dois terços da altura desse cone, pode-se afirmar que a medida da altura do monte de areia, em metros, é:

- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

DESAFIO!

Atividade 8

A figura representa um galheteiro para a colocação de azeite e vinagre em compartimentos diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro.



Considerando h como a altura máxima de líquido que o galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total de azeite e vinagre igual a 5, o valor de h é

- a) 7 cm
- b) 8 cm
- c) 10 cm
- d) 12 cm
- e) 15 cm

RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

Atividade 1

O número de caçambas é o volume do silo, dividido pelo volume de uma carreta. Como o silo é um cilindro, vamos calcular o volume do silo. Sendo r o raio, igual a metade do diâmetro.

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$A = 3,14 \cdot 3^2$$

$$A = 28,26 \text{ m}^2$$

Volume do silo

$$V = A \cdot h$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = 28,26 \cdot 10$$

$$V = 282,60 \text{ m}^3$$

O volume da caçamba é o volume do paralelepípedo.

$$V = \text{comprimento} \times \text{largura} \times \text{altura}$$

$$V = 12 \times 2 \times 1,5 = 36 \text{ m}^3$$

$$\text{Quantidade de caçambas} = \text{volume do silo} / \text{volume da caçamba}$$

$$\text{Quantidade de caçambas} = 282,60 / 36$$

$$\text{Quantidade de caçambas} = 7,85$$

Conclusão

Serão necessárias 8 caçambas para armazenar os grãos.

Letra E

Atividade 2

Como é um cilindro, o volume do copinho é dado por:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^3$$

Volume da leiteira cilíndrica:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 20$$

$$V = \pi \cdot 16 \cdot 20 \text{ cm}^3 \text{ ou } V = (16\pi) \cdot 20 \text{ cm}^3$$

Volume do copinho

Aqui percebemos que a leiteira tem 20 vezes o volume de 1 copo.

Volume da leiteira = volume de 20 copos

Como cada um dos 20 copos será enchido até a metade, a leiteira deverá ser enchida até a metade.

Letra A

RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

Atividade 3

O cano é um cilindro e seu volume é dado pelo produto entre a área de sua base e sua altura.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Nesse caso, sua altura será o comprimento de 50 m e a área da base igual a uma seção do cano.

O raio é a metade do diâmetro, e em metros, $r = 0,02$ m.

$$\text{Volume do cano} = \pi \cdot 0,02^2 \cdot 50 = 0,004 \cdot 50 = 0,02\pi \text{ m}^3$$

$$\text{O volume da caixa} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \text{ m}^3$$

Calculando a nova altura:

Como a quantidade de água que preencheu o cano saiu da caixa, vamos fazer a subtração:

Novo volume de água na caixa = Volume da caixa - Volume do cano

Conforme a água sai da caixa, a única dimensão que pode mudar é a altura do nível de água. A largura e comprimento continuam iguais a 1 m. Ou seja:

$$\text{Altura} \times 1 \times 1 = 1 - 0,02\pi$$

Considerando $\pi = 3$

$$\text{Altura} = 1 - 0,06$$

$$\text{Altura} = 0,94$$

A nova altura (nível de água na caixa) é de 0,94 m.

Obs.: Mesmo considerando $\pi = 3,1415$ o resultado mais próximo ainda é a letra c. Veja:

$$\text{Altura} = 1 - 0,02 \times 3,1415$$

$$\text{Altura} = 1 - 0,06283$$

$$\text{Altura} = 0,93717 \text{ (aproximadamente } 0,94)$$

Letra C

Atividade 4

$$V_1 = 1,6 V_2$$

Substituindo as fórmulas de volume do cilindro em V_1 e V_2 :

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = 1,6 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot x$$

Como o π aparece dos dois lados multiplicando, pode ser cancelado. Isolando x , temos:

$$x = \frac{r^2 \cdot h}{1,6 \cdot r^2} = \frac{6^2 \cdot 4}{1,6 \cdot 3^2} = \frac{144}{14,4} = 10 \text{ cm}$$

Portanto, a altura x da lata mais alta é 10 cm.

Letra B

RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

Atividade 5

Calculando o volume, sabendo que o raio é a metade do diâmetro, ou seja, $r = 1,5$, temos que:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi 1,5^2 \cdot 3,5}{3}$$

$$V = \frac{2,25\pi \cdot 3,5}{3}$$

$$V = \frac{7,875\pi}{3}$$

$$V = 2,625\pi$$

Letra A

Atividade 6

Sabemos que o volume do silo é a soma do volume do cilindro com o volume do cone:

$$V_{cil} = \pi r^2 h$$

$$V_{cil} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12$$

$$V_{cil} = \pi \cdot 9 \cdot 12$$

$$V_{cil} = 108\pi$$

Calculando o volume do cone:

$$V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V_{cone} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3}$$

$$V_{cone} = 9\pi$$

Seja $\pi=3$:

$$V_{silo} = 108 \cdot 3 + 9 \cdot 3 = 351 \text{ m}^3$$

Como o caminhão tem 20 m^3 :

$$351 : 20 = 17,5$$

Serão necessárias 18 viagens.

Letra D

RESOLUÇÃO PARA O PROFESSOR

Atividade 7

$$V = \frac{Ab \cdot h}{3}$$

$$4\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

$$4\pi = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot h$$

$$4\pi = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4h^2}{9} \cdot h$$

$$4\pi = \frac{4\pi h^3}{27}$$

$$27 \cdot 4\pi = 4\pi h^3$$

$$h = \sqrt[3]{27}$$

$$h = 3.$$

Letra B

Atividade 8

DESAFIO!

Temos que:

$$V_{\text{VINAGRE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)$$

e

$$V_{\text{AZEITE}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{VINAGRE}}$$

$$V_{\text{AZEITE}} = \pi \cdot 5^2 \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)$$

O exercício nos diz que

$$\frac{V_{\text{AZEITE}}}{V_{\text{VINAGRE}}} = 5 \rightarrow V_{\text{AZEITE}} = 5 \cdot V_{\text{VINAGRE}}$$

$$5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5) = \pi \cdot 5^2 \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)$$

$$5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5) = \pi \cdot 5^2 \cdot h$$

$$2h - 10 = h$$

$$h = 10 \text{ cm}$$

Letra C

GABARITO

ATIVIDADE 1: E

ATIVIDADE 2: A

ATIVIDADE 3: C

ATIVIDADE 4: B

ATIVIDADE 5: A

ATIVIDADE 6: D

ATIVIDADE 7: B

ATIVIDADE 8: C

REFERÊNCIAS

Dante, Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

Fonseca, Fred [et al.]. Coleção Ensino Médio 1ª Série. Belo Horizonte: Bernoulli Sistema de Ensino, 2024

Lezzi, Gelson, [et al.]. Matemática: Volume único. 4 ed. - São Paulo: Atual, 2007

Paiva, Manoel. Matemática: Paiva/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática: ensino médio: volume 1. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.