Matemática

3ª Série | Ensino Médio

32ª Semana

COSSENO

MONITORAMENTO	PEDAGOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO PAEBES	**D126_M** Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT306** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF09MA08** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.			

CONTEXTUALIZAÇÃO

Muitos fenômenos naturais, físicos e sociais têm comportamento cíclico, ou periódico (isto é, que se repetem a cada determinado período de tempo), podendo ser modelados por funções trigonométricas. Isso significa que essas funções são capazes de representar, de modo aproximado, as oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo.

A maré – movimento de descida e de subida do nível das águas – é um exemplo de fenômeno periódico devido à força gravitacional exercida pela Lua e pelo Sol na Terra. Acompanhe a situação a seguir.

Em uma cidade litorânea do Nordeste brasileiro, em determinada época do ano, a maré baixa acontece por volta das 12 h e das 24 h, e a maré alta ocorre por volta das 6 h e das 18 h. A função trigonométrica a seguir modela, como exemplo, de modo aproximado, a altura h da maré (em metro) nessa época:

$$h(t) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(t \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

em que o tempo (t) é medido em hora a partir da meia-noite.

Além do nível das marés, muitos outros fenômenos apresentam comportamento periódico, como as variações da temperatura terrestre e da pressão sanguínea, a propagação do som, entre outros.

Texto extraído do livro Conexões, Editora Moderna

Neste material vamos dar continuidade ao estudo das funções trigonométricas, desta vez abordando a função cosseno.

Bons estudos!

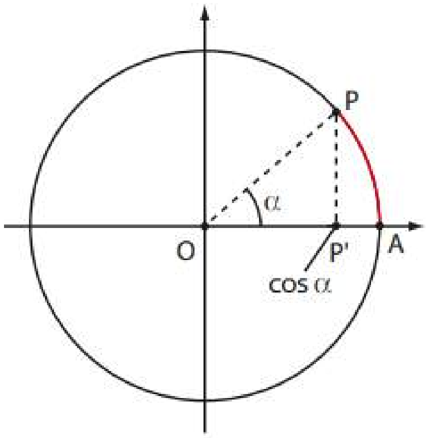
CONCEITOS E CONTEÚDOS

O COSSENO

No ciclo trigonométrico, considere um arco AP que possui medida angular α (em radianos). Podemos definir a abscissa do ponto P como o cosseno de α e a ordenada do ponto P como seno de α.

Neste material, estudaremos o **cosseno** de α (abscissa do ponto P):

$$\cos\alpha = \text{abscissa de } \mathbf{P}$$



$\text{med}(\widehat{AP}) = \alpha \text{ rad}$
$\text{med}(A\hat{O}P) = \alpha \text{ rad}$

Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo horizontal, obtemos o ponto P'.

Considerando o sentido positivo ("para a direita") do eixo horizontal e tomando o segmento $\overline{OP'}$, podemos também definir o cosseno de α como a medida algébrica desse segmento, isto é:

$$\cos\alpha = \text{med}(\overline{OP'})$$

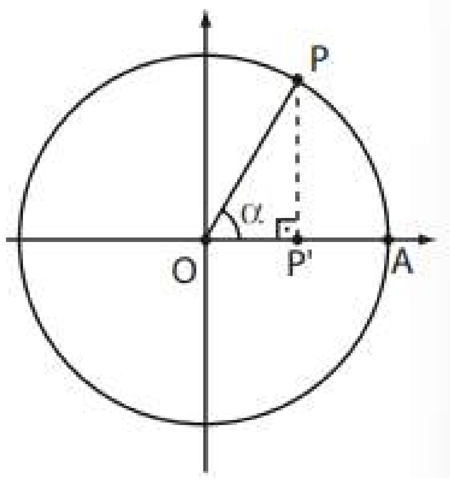
A partir deste momento, o eixo horizontal da circunferência trigonométrica será chamado **eixo dos cossenos**.

Observação:

Na figura ao lado, é possível compreender que a definição anterior é "compatível" com a definição apresentada no estudo da trigonometria no triângulo retângulo:

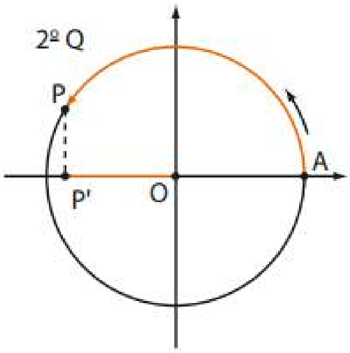
$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}, \text{ com } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

No triângulo retângulo POP', temos: $\cos A\hat{O}P = \cos\alpha = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP' = \text{med}(\overline{OP'})$

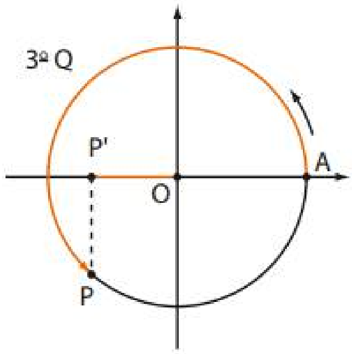


CONCEITOS E CONTEÚDOS

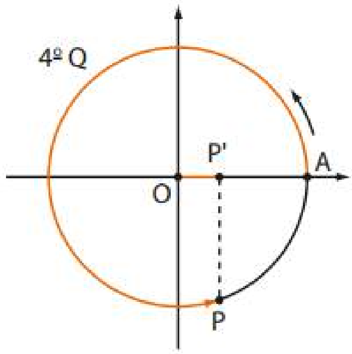
O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes. Lembre-se de que o sentido positivo do eixo dos cossenos é para a direita e o sentido negativo para a esquerda.



abscissa de **P** < 0
$\cos \alpha < 0$



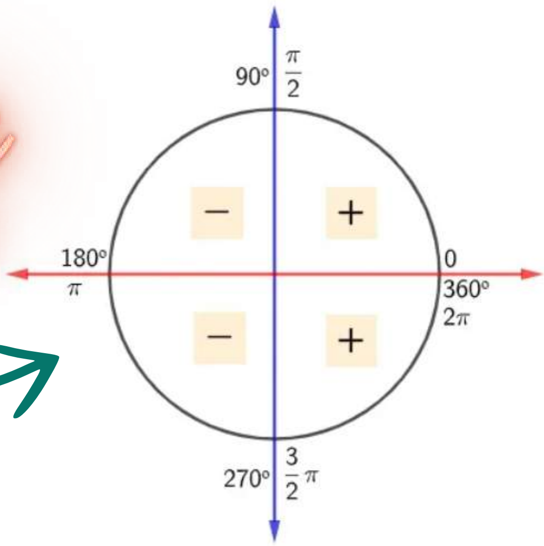
abscissa de **P** < 0
$\cos \alpha < 0$



abscissa de **P** > 0
$\cos \alpha > 0$

Observe que o valor do cosseno de um arco qualquer, na circunferência trigonométrica, varia entre -1 e 1 , isto é, $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$.

vale LEMBRAR

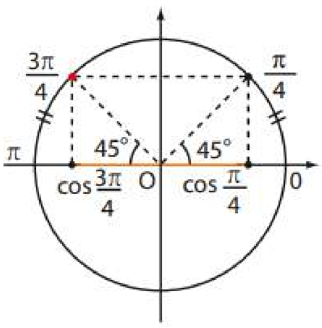


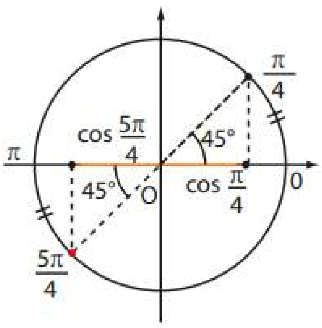
COSSENO

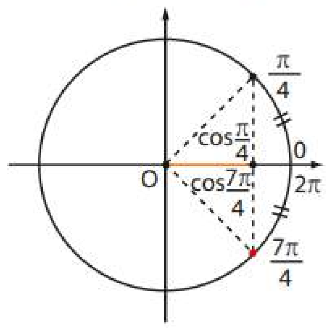
VALORES NOTÁVEIS

Utilizando os valores dos ângulos notáveis, é possível obter, por **simetrias**, o cosseno de outros arcos. Veja os exemplos a seguir:

A partir de $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vamos obter os valores de $\cos \frac{3\pi}{4}$, $\cos \frac{5\pi}{4}$ e $\cos \frac{7\pi}{4}$.







$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

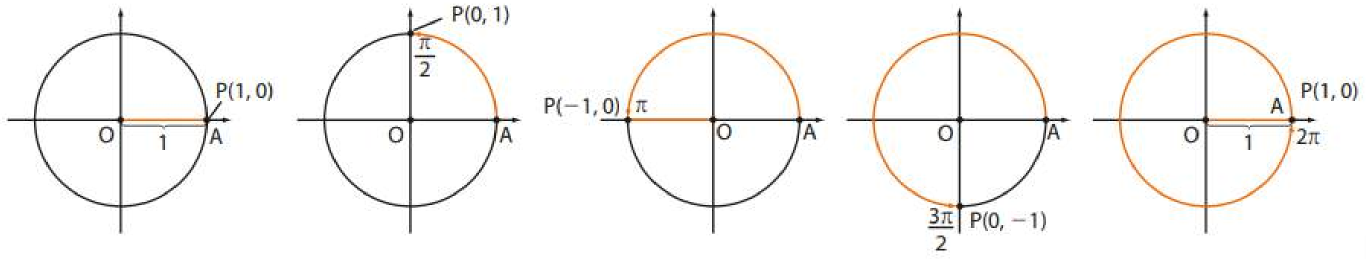
$\cos 225° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Vamos, agora, obter o valor do cosseno de arcos em que P coincide com os pontos de intersecção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados:



A e **P** coincidem $\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos 0° = 1 \end{cases}$ A abscissa de **P** é 1.

$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \cos 90° = 0 \end{cases}$ A abscissa de **P** é 0.

$\begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \cos 180° = -1 \end{cases}$ A abscissa de **P** é −1.

$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \cos 270° = 0 \end{cases}$ A abscissa de **P** é 0.

A e **P** coincidem $\begin{cases} \cos 2\pi = 1 \\ \cos 360° = 1 \end{cases}$ A abscissa de **P** é 1.

Na calculadora científica, a tecla usada para obtenção dos valores do cosseno é

cos

Por exemplo, no cálculo de $\cos \frac{11\pi}{12}$ (lembre que esse arco pertence ao 2º quadrante), ajustamos a calculadora na configuração Rad e pressionamos:

cos (1 1 × π ÷ 1 2) =

obtendo o valor aproximado -0,965925826.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

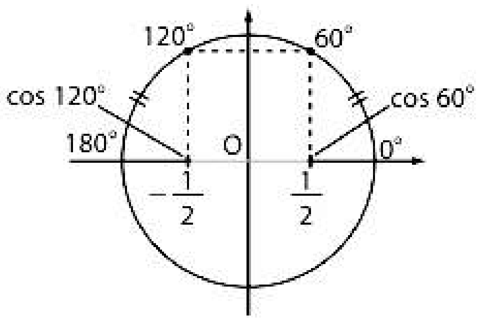
1 Determine os valores dos cossenos indicados abaixo.

a) cos 120º

b) $\cos \frac{4\pi}{3}$

Solução:

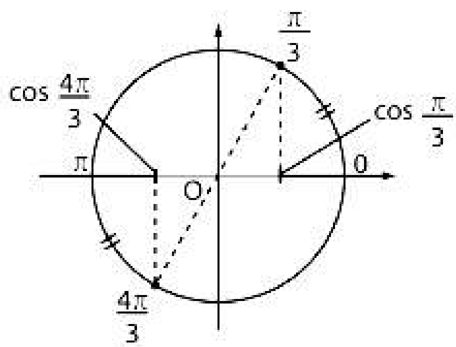
a)



O arco de 120° pertence ao 2º quadrante (cosseno negativo) e é simétrico, em relação ao eixo y, ao arco de 60°. Assim,

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

b)



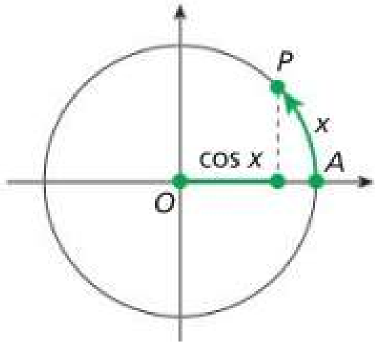
O arco de $\frac{4\pi}{3}$ pertence ao 3º quadrante (cosseno negativo) e é simétrico, em relação ao ponto O (origem), ao arco de $\frac{\pi}{3}$. Assim,

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FUNÇÃO COSSENO

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x. Considerando a projeção ortogonal de P no eixo horizontal, a abscissa do ponto P é o **cosseno** do arco de medida x .



A função **cosseno** é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\cos x$, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por f(x) = cos x, partindo de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta, para os quais o cosseno já é conhecido:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

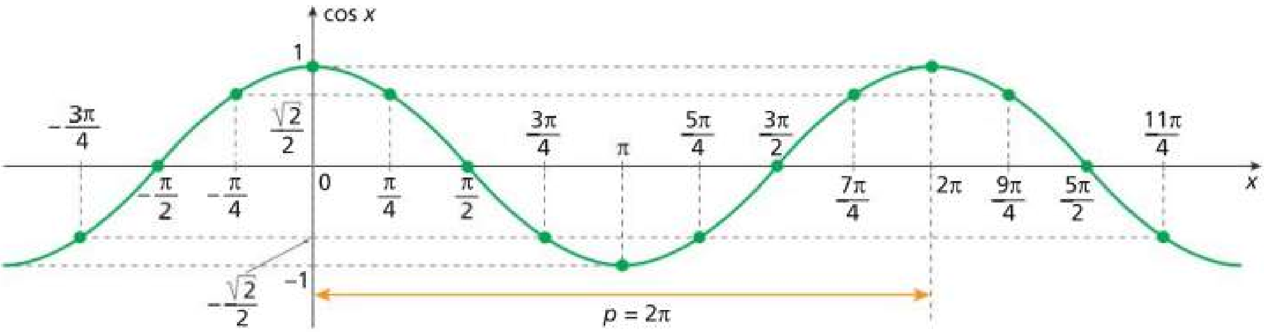
Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o cosseno de x assume os valores do cosseno de arcos da 1ª volta. Assim, a função cosseno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \ldots = \cos(x + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo [0, 2π] repete-se para x > 2π e x < 0.

Assim, o gráfico da função cosseno se estende por todo o eixo x e tem o seguinte formato:

CONCEITOS E CONTEÚDOS



Repare que o gráfico da função cosseno de x é uma translação (deslocamento) da senoide (curva determinada pela função sen x) de $\frac{\pi}{2}$ rad para a esquerda.

Características da função cosseno:

Por definição, o domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, observamos, entre outras características, que a função cosseno de x:

- é periódica, de período 2π (a curva se repete a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de cos x estão no intervalo [-1,1]; logo, o que significa que seu conjunto imagem é Im = [-1,1].
- tem amplitude igual a 1.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

2

Calcular o valor da expressão cos x + cos 2x + cos 3x + ... + cos 10x para x = π/3.

Solução:

Substituindo x por $\frac{\pi}{3}$, obtemos a expressão:

$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{10\pi}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para $x = \frac{\pi}{3}$, a expressão vale $-\frac{3}{2}$.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

TRANSLADANDO O GRÁFICO

Transladar significa deslocar. A seguir, veremos alguns gráficos de funções que podem ser obtidos por meio de deslocamentos verticais ou horizontais dos gráficos das funções fundamentais. Acompanhe.

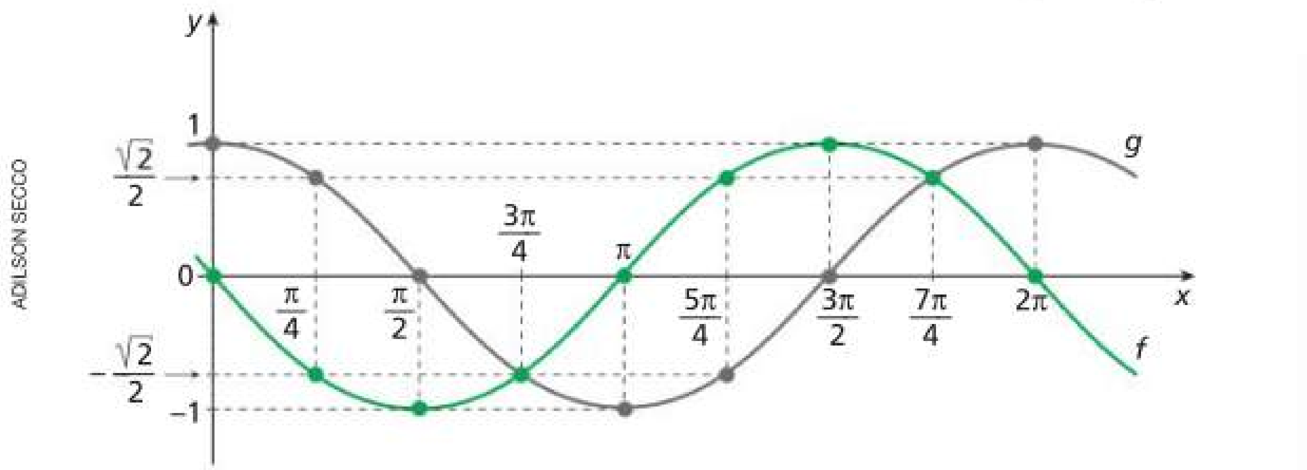
$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Novamente, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Os gráficos das funções dadas por $g(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ são:

Os gráficos das funções dadas por $g(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ são:



A função f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem, mesmo período e mesma amplitude que g, mas o gráfico de g sofreu uma translação (deslocamento) de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções do tipo $y = \cos(x + b)$ são obtidos a partir de uma translação de $|b|$ unidades em relação ao gráfico $y = \cos x$ de tal modo que:

- se $b > 0$, a translação é para a esquerda;
- se $b < 0$, a translação é para a direita.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

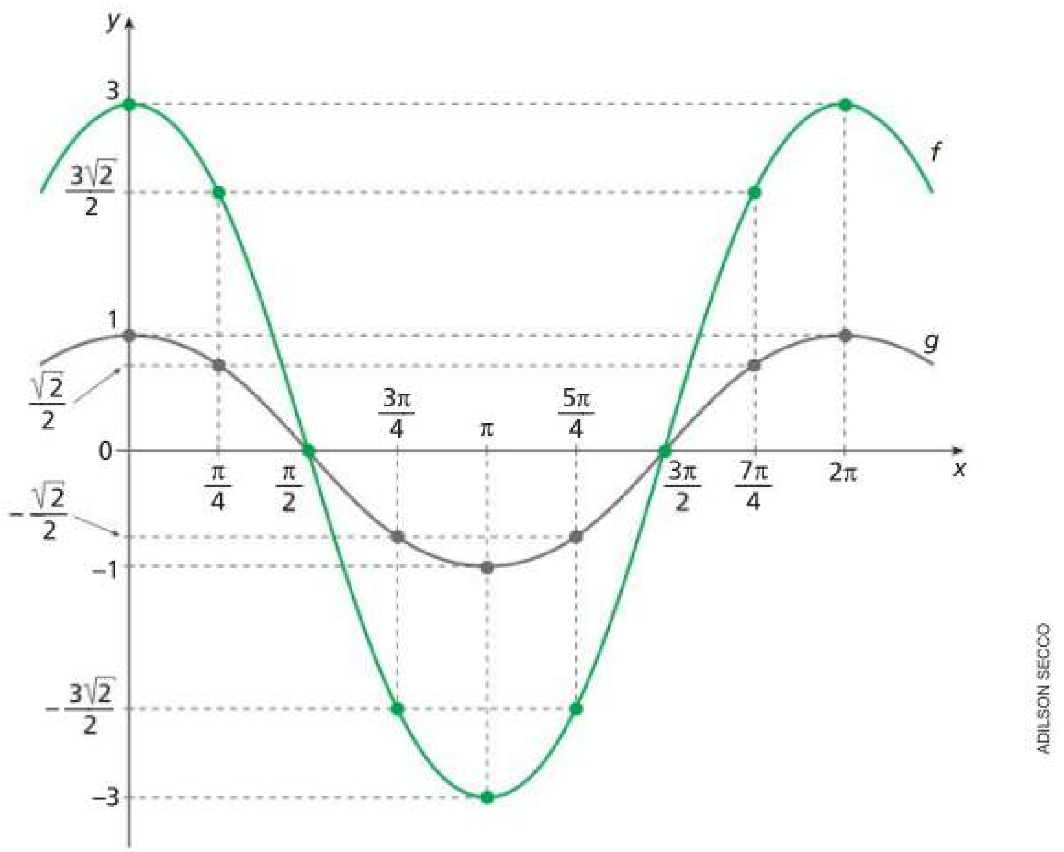
ALTERANDO A AMPLITUDE

Agora, veremos que podemos obter alguns gráficos "esticando" ou "achatando" verticalmente os gráficos das funções fundamentais.

Por exemplo, vamos construir o gráfico de $f(x) = 3 \cdot cos\,(x)$
Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores de 0 a 2π.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$3 \cdot \cos x$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3

Os gráficos de f e g, com $g(x) = \cos x$ e $f(x) = 3 \cdot \cos x$, são:



Observe que, multiplicando g(x) = cos x por 3, "esticamos" o gráfico verticalmente: agora, ele oscila entre -3 e 3. Ou seja, a amplitude de f é 3, o triplo da amplitude de g, e o conjunto imagem de f é [-3, 3].

Veja que o domínio e o período não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = d \cdot \cos x$ têm amplitude $|d|$.
O mesmo ocorre para funções do tipo $y = d \cdot \text{sen}\, x$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3

Determinar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude da função dada por $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução:

Vamos considerar a função h dada por $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

O gráfico de h é obtido por meio de uma translação do gráfico da função g, dada por $g(x) = \cos x$, de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.

Como a amplitude da função h é 1, igual à amplitude de g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, então a amplitude de f é 2.

Como o conjunto imagem da função h é $[-1, 1]$, igual ao da função g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, podemos obter o conjunto imagem da função f multiplicando por 2 os extremos do intervalo $[-1, 1]$.

Logo, $\mathrm{Im}(f) = [-2, 2]$.

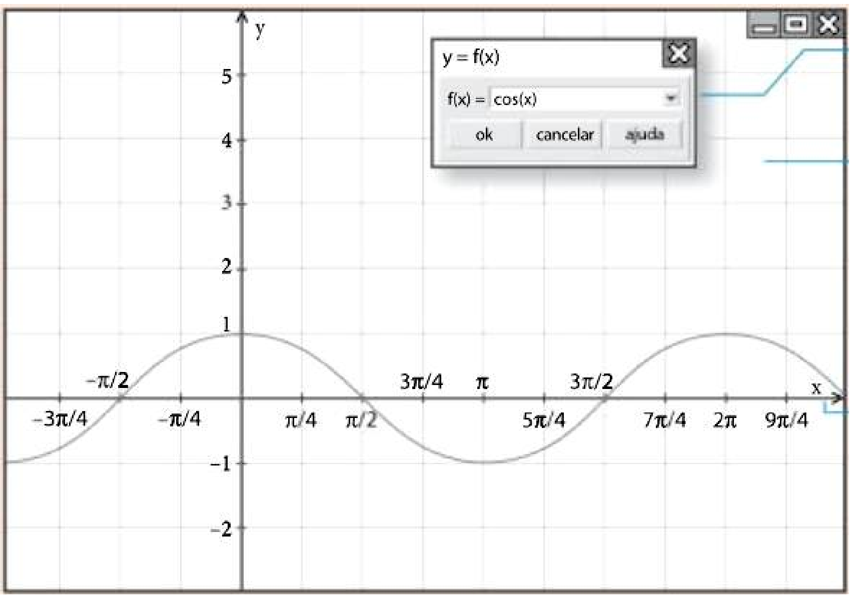
O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

4

Com o auxílio de um software de construção de gráficos, a partir do gráfico de uma das funções trigonométricas fundamentais, construir passo a passo o gráfico de f, tal que f(x) = 2 + 2 . cos $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ e analisar o que ocorre com o gráfico de cada passo. Indicar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f.

Resolução:

Primeiro, vamos traçar o gráfico da função trigonométrica dada por g(x)=cos x



Campo para digitar a lei da função cujo gráfico queremos construir.

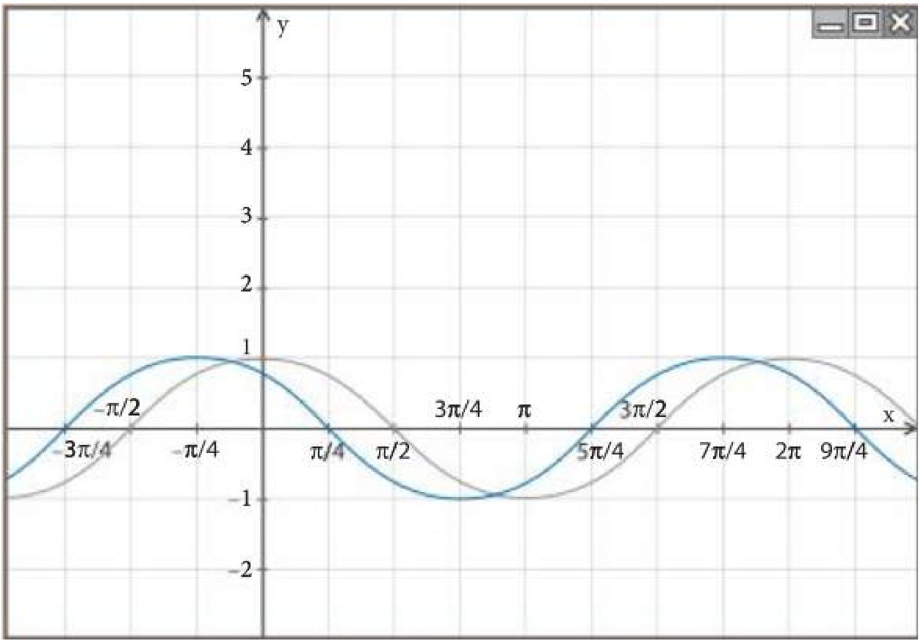
Podemos selecionar a opção de exibir linhas de grade para ficar mais fácil visualizar as mudanças no gráfico a cada passo.

É possível escolher a unidade com que graduaremos os eixos. Nesse caso, graduamos o eixo y em intervalos de 1 unidade e o eixo x em intervalos de $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

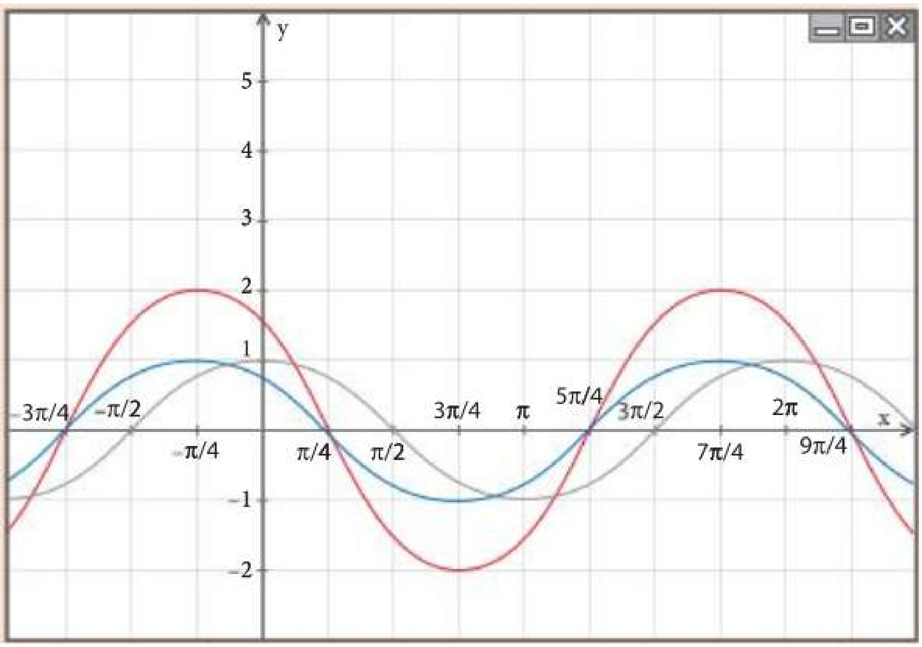
Acompanhe os passos descritos a seguir.

- 1º passo: cos x $\longrightarrow$ cos$\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$



O gráfico de g sofreu uma translação de $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda.

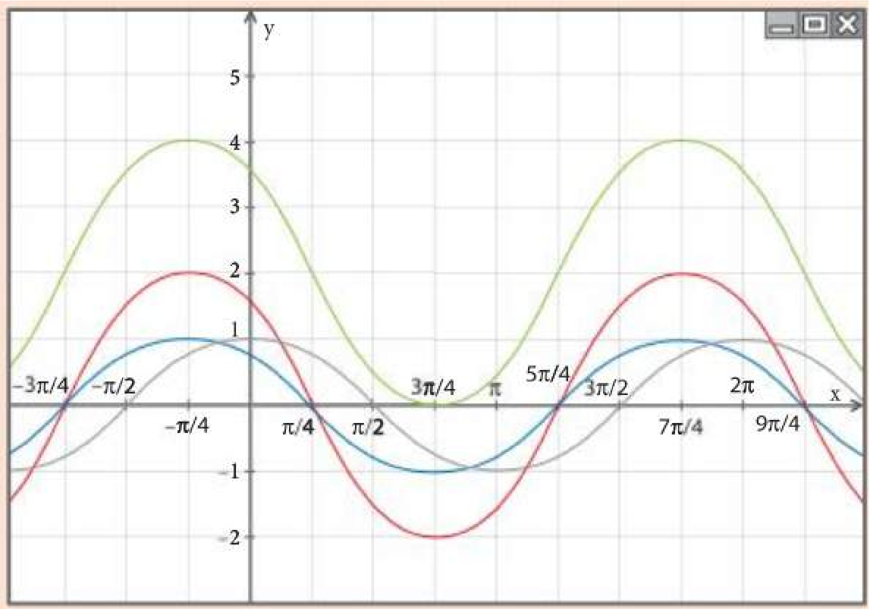
- 2º passo: cos$\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\longrightarrow$ 2 . cos$\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$



O gráfico da função tem nova amplitude, igual a 2.

EXERCICIOS RESOLVIDOS

- 3º passo: $2 \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow 2 + 2 \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$



O gráfico sofreu uma translação de duas unidades para cima.

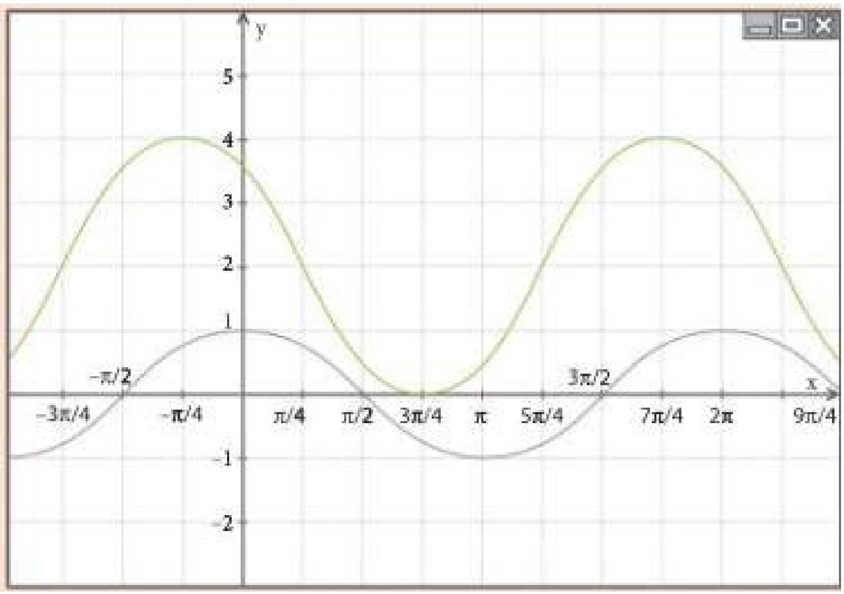
O conjunto imagem da função dada por $g(x) = cos(x)$ é [-1,1]. Após o 1º passo, adicionando $\frac{\pi}{4}$ a x, o conjunto imagem da nova função continua sendo [-1,1].

Após o 2º e o 3º passo, o conjunto imagem se modificou. Quando a função é multiplicada por 2, o conjunto imagem passa a ser [-2,2]. Adicionando-se 2, o conjunto imagem da nova função passa a ser [0,4].

Portanto, $Im(f) = [0, 4]$. A amplitude de f continua sendo 2. O domínio e o período são os mesmos de g:

$D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$

Veja abaixo os gráficos das funções f e g:



Atividade 1

É correto afirmar que cos 150º é

a) $-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) 0

Atividade 2

É correto afirmar que cos 210º é

a) $-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) 0

Atividade 3

É correto afirmar que cos 180º é

a) $-\frac{1}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

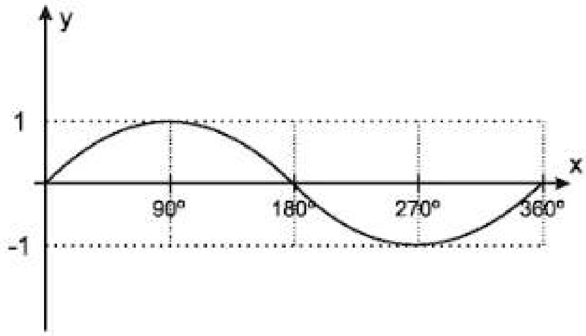
e) - 1

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

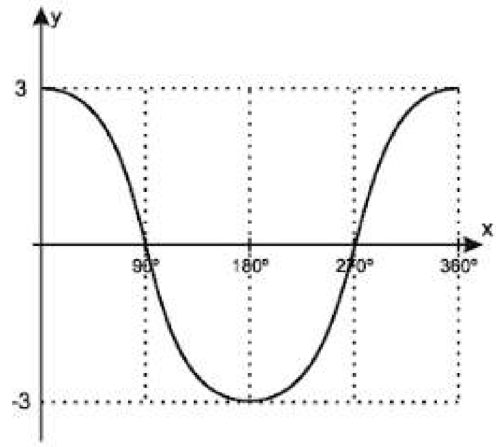
Atividade 4

(M120488A9) Qual dos gráficos abaixo, representa a função y = 3cosx?

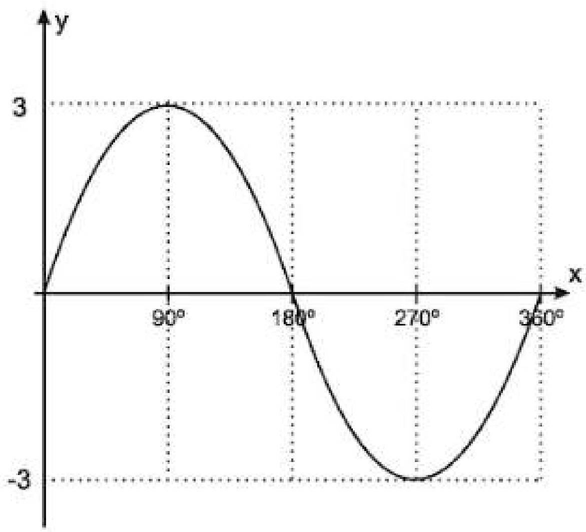
A)



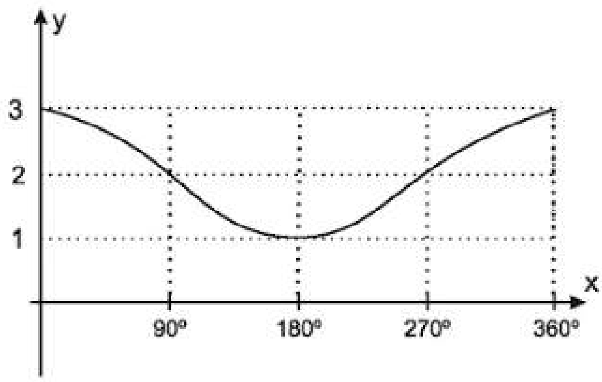
B)



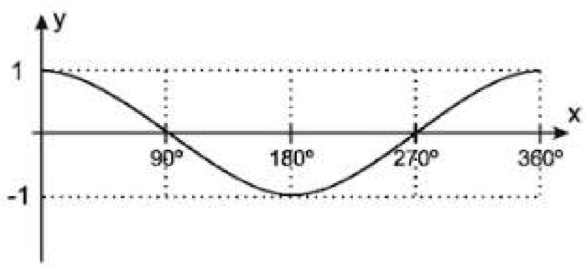
C)



D)



E)

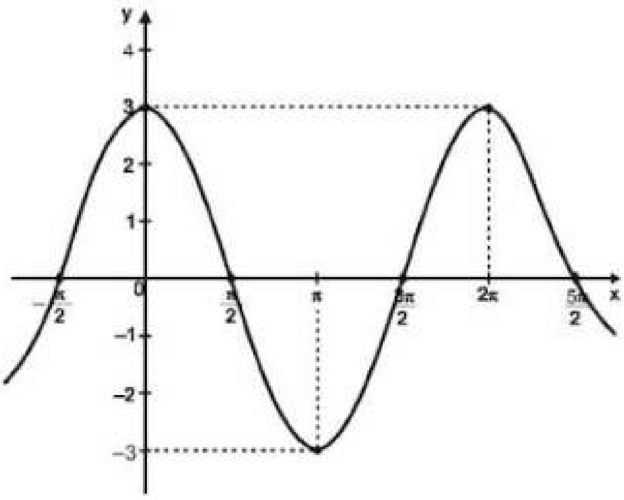


ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

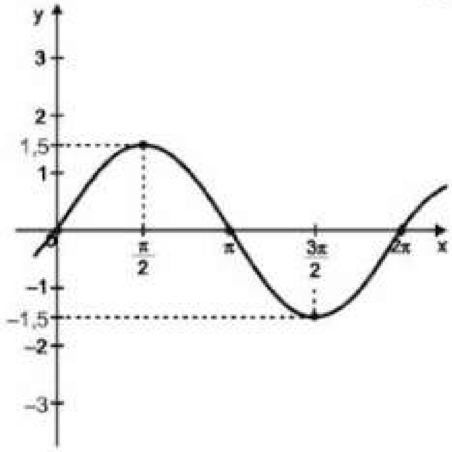
Atividade 5

(M120254G5) Qual é o gráfico que melhor representa a função trigonométrica $f(x) = \dfrac{3}{2}\cos x$?

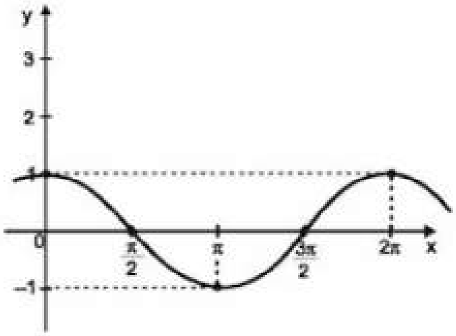
A)



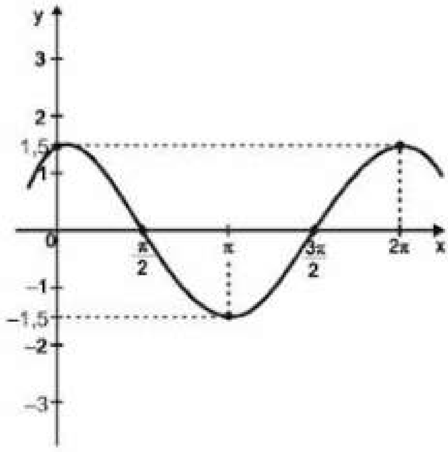
B)



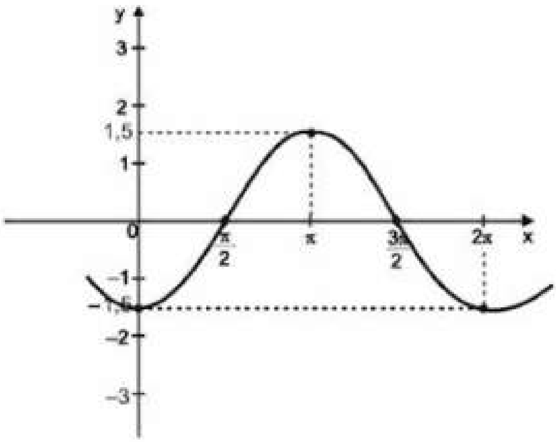
C)



D)

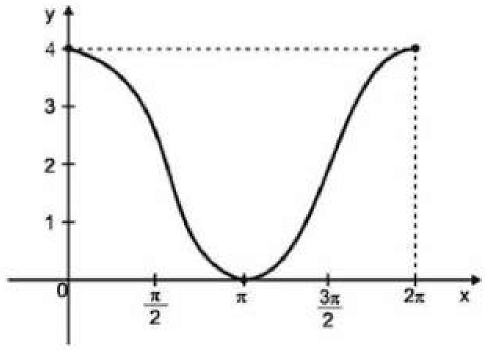


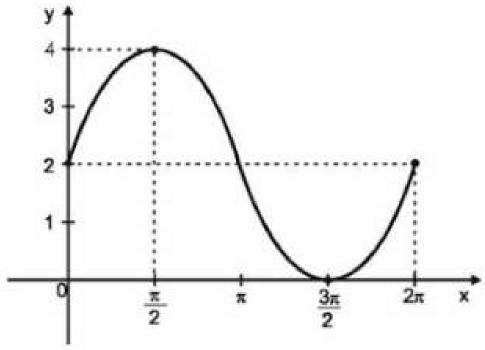
E)

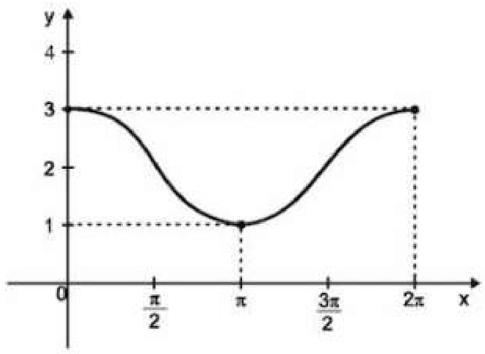


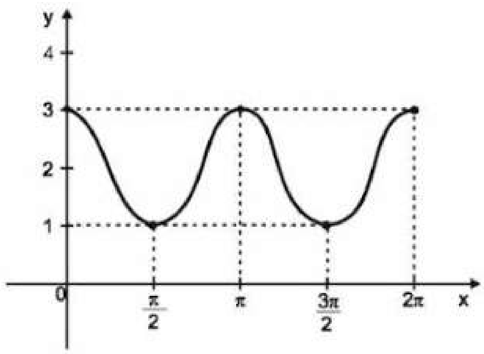
Atividade 6

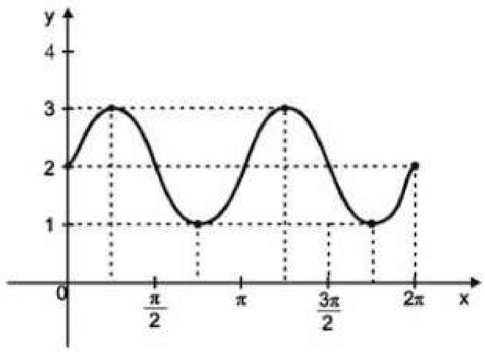
(M120176G5) João utilizou um programa de computador para construir o gráfico da função $y = 2 + 2\cos x$, com domínio no intervalo de $0 \leq x \leq 2\pi$.
Qual foi o gráfico construído por João utilizando esse programa?

A)


B)


C)


D)


E)


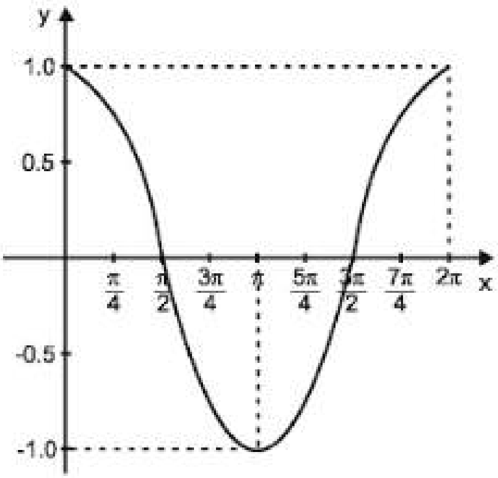
ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

DESAFIO

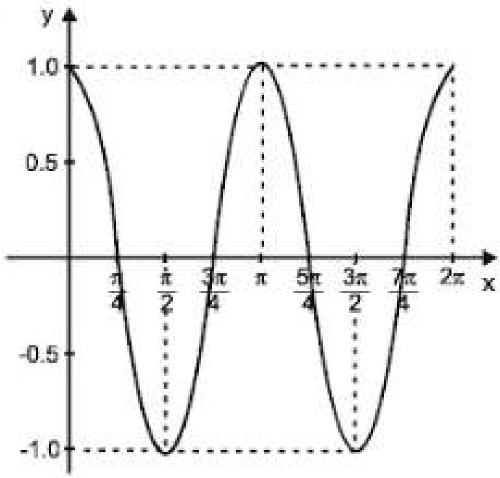
Atividade 7

(M120030B1) Qual gráfico representa a função real $f(x) = \cos(2x)$, com $x \in [0, 2\pi]$?

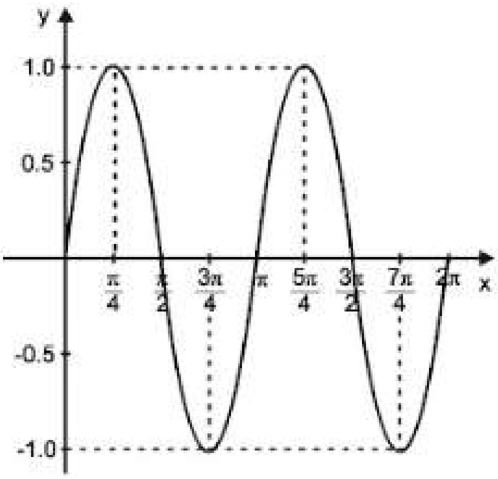
A)



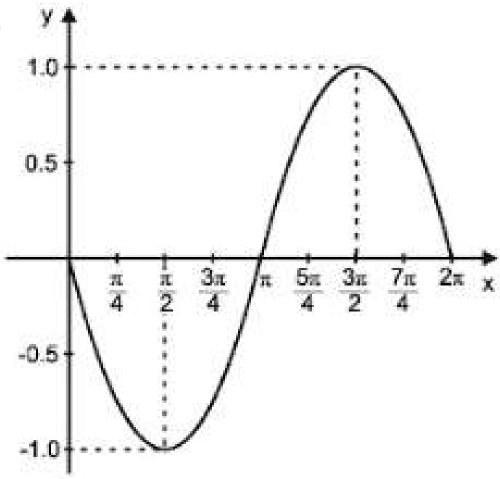
B)



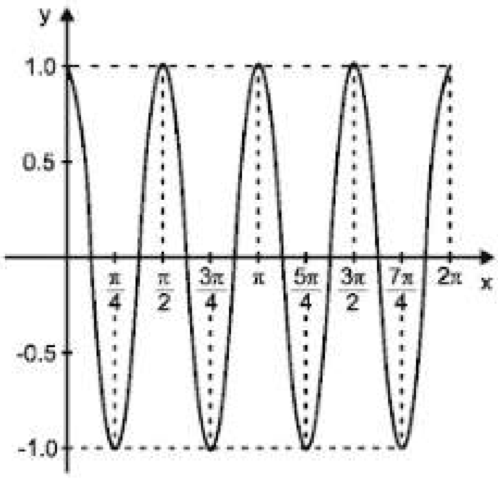
C)



D)



E)



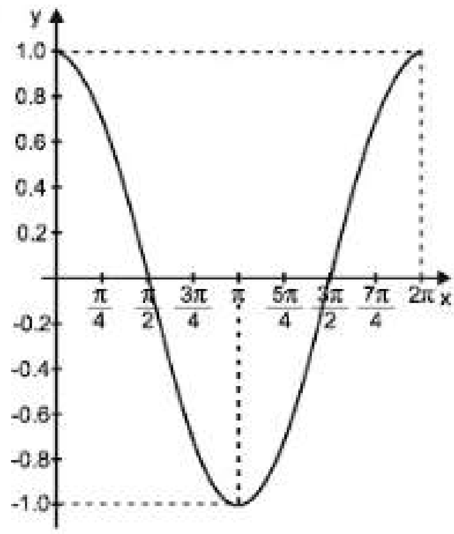
ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

DESAFIO

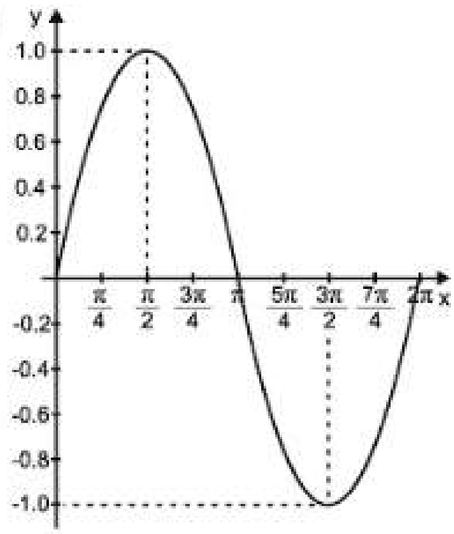
Atividade 8

(M120065B1) Qual é o gráfico que representa a função $f(x) = -\cos x$, de domínio $[0, 2\pi]$?

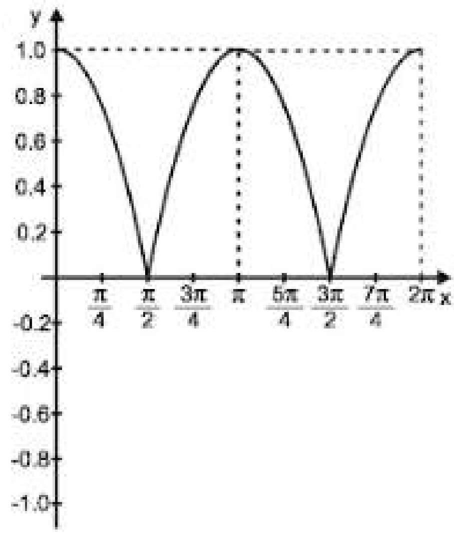
A)



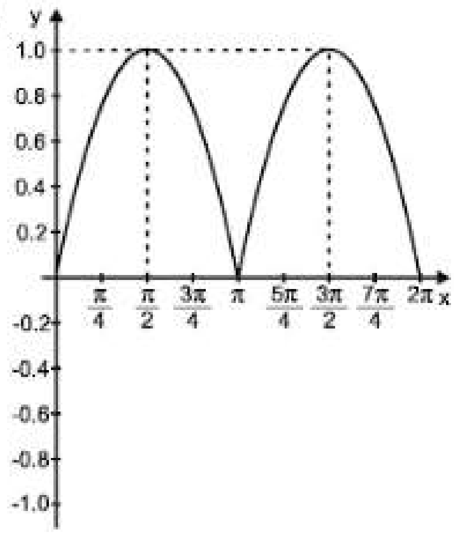
B)



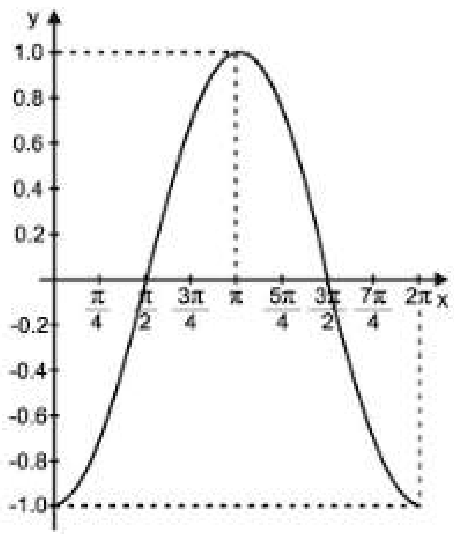
C)



D)



E)



GABARITO

ATIVIDADE 1: B
ATIVIDADE 2: B
ATIVIDADE 3: E
ATIVIDADE 4: B
ATIVIDADE 5: D
ATIVIDADE 6: A
ATIVIDADE 7: B
ATIVIDADE 8: E

REFERÊNCIAS

Bonjorno, José Roberto. Prisma Matemática : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto de Câmara de Sousa. - 1.ed. - São Paulo : Editora FTD, 2020.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. - 3. ed. - São Paulo : Moderna, 2016.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações : ensino médio / Luiz Roberto Dante. -- 3. ed. -- São Paulo : Ática, 2016.

Matemática, primeira série, ensino médio: autores. Ana Lúcia Bordeaux... [et al.], coordenação João Bosco Pitombeira; - Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2005. 376p. :il. - (Multicurso; Coleção completa; v.1)