Matemática

2ª Série | Ensino Médio

33ª Semana

Resolvendo problemas de contagem

MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO PAEBES	**D042_M** Utilizar o princípio multiplicativo de contagem na resolução de problema.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT310** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF08MA03** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo.			

CONTEXTUALIZAÇÃO

O uso da Senhas

O uso de senhas está presente no dia a dia da população mundial, seja para cadastro e acesso de contas bancárias, seja para e-mails, redes sociais, sites de compras, entre outros. O indivíduo moderno, com a chegada da era digital, estabeleceu uma ligação direta com os sistemas de segurança que foram sendo introduzidos, e nosso contato digital se torna praticamente impossível sem um sistema de senhas seguras. Mas as configurações e criações de senhas possuem vários formatos e finalidades que podem dificultar o acesso de pessoas não autorizadas ao conteúdo bloqueado pela senha. Algumas delas se restringem apenas ao uso de números, outras são associadas a letras e números, outras fazem distinção de letras maiúsculas e minúsculas e há aquelas que até solicitam caracteres especiais. Quanto mais diversificada a senha, maior é o nível de segurança que ela tem, uma vez que o número de possibilidades de combinações entre os símbolos escolhidos aumenta. Considere uma senha de acesso com quatro dígitos. O número de possibilidades para senhas criadas apenas com algarismos (10^4) é menor que o de senhas que envolvem apenas letras (26^4), por exemplo, e quanto mais dígitos, diversificação entre os símbolos, mais forte é a senha e mais difícil de ser descoberta por outras pessoas.

Fonte: https://depositphotos.com/br/vectors/login-icon.html

Além da contagem do número de possibilidades para criar uma senha, há configurações de placas de veículos, de números do sistema decimal, de jogos de loteria; disposição entre pessoas; conjuntos formados entre roupas, pratos de comidas, entre outros problemas de contagem presentes no cotidiano, que são abordados na Análise Combinatória, que desenvolve métodos para fazer a contagem com bastante eficiência. O princípio multiplicativo é a ferramenta básica para se trabalhar com muitos problemas de contagem. Alguns deles, contudo, são problemas recorrentes e, para resolvê-los, algumas “fórmulas” serão deduzidas e seu uso é uma questão pessoal. Neste capítulo, além dos princípios aditivo, multiplicativo e da ideia de fatorial, um dos assuntos contemplados é o arranjo simples, com problemas que envolvem agrupamentos cujas ordens importam.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Frequentemente, estamos interessados em descobrir de quantas maneiras determinadas ações podem ser realizadas, como combinar roupas, planejar viagens ou montar cardápios.

Listar todas as possibilidades seria ineficiente, especialmente com muitas opções. Por exemplo: Como contar as formas de escolher letras e números para uma placa de carro ou as diferentes maneiras de preencher um cartão da Mega-sena?

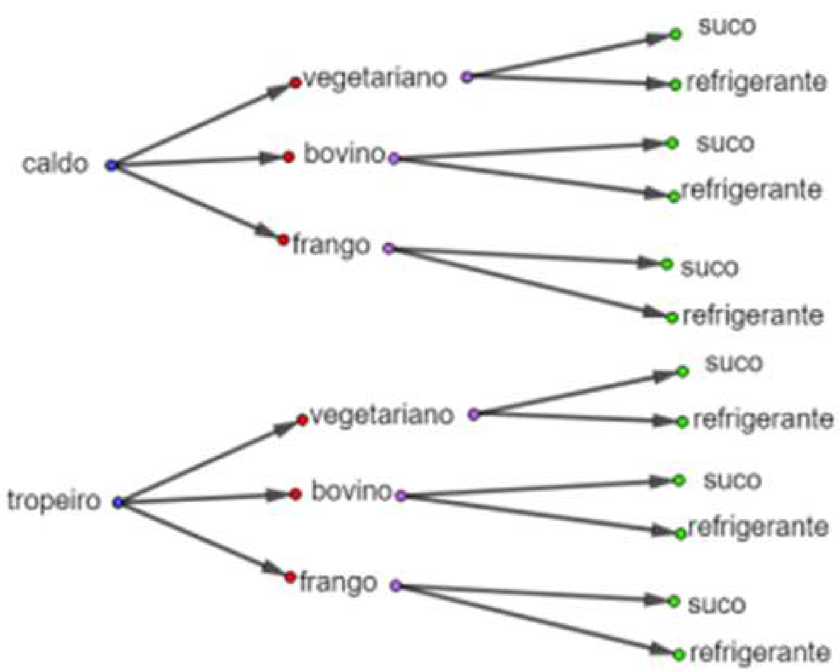
Existem métodos mais eficientes para realizar essas contagens, e abordaremos alguns deles neste material.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)

O princípio fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo, é utilizado para determinar o número total de possibilidades de um evento constituído de n etapas. Para isso, as etapas devem ser sucessivas e independentes. Se a primeira etapa tem x possibilidades e a segunda etapa tem y possibilidades, o número total de combinações será dado pelo produto $x \cdot y$

Assim, o princípio fundamental da contagem é a multiplicação das opções dadas para determinar o total de possibilidades.
Uma ferramenta visual útil para aplicar esse conceito é o diagrama de árvore, ou árvore de possibilidades, que facilita a análise da estrutura do problema e visualização do número de combinações.

Exemplo 1: Em um restaurante, é oferecido o famoso prato feito. Todos os pratos possuem arroz, e o cliente pode escolher uma combinação entre 3 possibilidades de carne (bovina, de frango e vegetariana), 2 tipos de feijão (caldo ou tropeiro) e 2 tipos de bebida (suco ou refrigerante). De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido?



CONCEITOS E CONTEÚDOS

Observe que há 12 combinações possíveis, mas podemos chegar a esse resultado aplicando a multiplicação das opções utilizando o princípio fundamental da contagem. Assim, o número de combinações de pratos pode ser calculado da seguinte forma:

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

Note que, quando o objetivo é simplesmente descobrir o total de possibilidades, realizar a multiplicação é muito mais rápido do que criar um esquema para analisá-las manualmente, o que se tornaria trabalhoso à medida que o número de opções aumentasse.

Exemplo 2: Você foi convidado(a) para uma festa de aniversário, e tem que escolher com que roupa ir. Dentre as opções, há 5 camisetas, 3 calças e 3 calçados. Quantos "looks" (conjuntos) é possível formar com essas opções?

Da mesma forma que no exemplo anterior, basta utilizarmos o PFC para descobrir quantos "looks" podemos formar com esses itens. Desse modo, temos que: 5 x 3 x 3 = 45 conjuntos diferentes.

Exemplo 3: (Enem) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

grupos taxonômicos	número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

T&C Amazônia, ano 1, n.° 3, dez./2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três espécies de mamíferos – uma do grupo dos Cetáceos, outra do grupo dos Primatas e a terceira dos grupos dos Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:
a) 1320
b) 2090
c) 5840
d) 6600
e) 7245

Resolução:
Sabemos que há 2 cetáceos, 20 primatas e 33 roedores. Então, pelo princípio fundamental da contagem, o número de conjuntos distintos possíveis será: 2 x 20 x 33 = 1320

CONCEITOS E CONTEÚDOS

FATORIAL

O fatorial é fundamental na análise combinatória, e saber como utilizá-lo é essencial para resolver os problemas. Mas, o que é o fatorial?

É importante dizer que só existe fatorial de números naturais e que ele (o fatorial) representa o produto de um número n por todos os seus antecessores positivos maiores que zero.

Para indicá-lo, utilizamos o símbolo **"!"** ao lado do número, ou seja, o fatorial de "n" é **n!**.

Veja alguns exemplos:

0! = 1

1! = 1

2! = 2 x 1 = 2

3! = 3 x 2 x 1 = 6

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

Como assim 0! = 1?

Parece estranho que 1! e 0! tenham o mesmo valor. Mas, tudo é uma questão de lógica. Vejamos por que isso acontece.

Temos nos exemplos o caso de 5! e podemos escrevê-lo como 5! = 5 x 4!.

Assim, podemos dividir ambos os lados da igualdade por 5 e escrever 4! como sendo: $4! = \frac{5!}{5}$

Perceba que podemos seguir com esse mesmo raciocínio para os outros fatoriais:

$$3! = \frac{4!}{4}$$

$$2! = \frac{3!}{3}$$

$$1! = \frac{2!}{2}$$

Executando exatamente o mesmo procedimento acima, temos que: $0! = \frac{1!}{1}$

Lembre que 1! = 1. Sendo assim, temos que: $0! = \frac{1}{1} = 1$

Assim, concluímos que 0! é igual a 1.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

OPERAÇÕES COM FATORIAL

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Exemplo 1: 4! + 3!
Parece bem intuitivo escrever que 4! + 3! é igual a 7!, mas isso está incorreto. A regra básica para qualquer cálculo envolvendo fatoriais é “expandir os termos”. O que isso significa? Em vez de simplesmente usar 4! na expressão, devemos expandi-lo como 4 x 3 x 2 x 1. Assim, ao calcular 4! + 3!, o que realmente temos é (4 x 3 x 2 x 1) + (3 x 2 x 1)
Feito isso, basta realizar as multiplicações e, por fim, a soma: 24 + 6 = 30

Da mesma forma, podemos realizar a subtração de fatoriais.

Exemplo 2: 5! – 2!
(5 x 4 x 3 x 2 x 1) – (2 x 1) = 120 – 2 = 118

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Essas duas operações seguem a mesma lógica das anteriores: primeiro, devemos expandir o fatorial, realizar as multiplicações e, só então, proceder com as operações subsequentes.

Exemplo 3: 6! x 4!
(6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1) x (4 x 3 x 2 x 1)
720 x 24 = 17280

Exemplo 4: 5! / 3!

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$$

Podemos resolver de duas maneiras:

1) Realizando as multiplicações para obter a expressão 120/6. Em seguida, basta realizar a divisão, que resulta em 20.

2) Simplificando a fração a partir dos fatores comuns no numerador e no denominador. Assim, a simplificação se torna:

$$\frac{5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 20$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Permutação simples é qualquer agrupamento que se pode formar com todos os elementos disponíveis no problema, que devem ser distintos, usando cada um deles uma única vez. Cada agrupamento se diferencia dos outros pelas posições em que esses elementos aparecem.

Isso significa que qualquer ordenação de **n** elementos de um conjunto, que possui **n** elementos distintos, é uma permutação desses **n** elementos. Para representar o número de todas as permutações possíveis dos **n** elementos, usa-se

$$P_n = n!$$

Existem alguns tipos de permutação, sendo eles: **a simples, a com repetição e a circular**.

OBSERVAÇÕES

- Como 0 ! = 1, temos que $P_0 = 1$
- Como 1 ! = 1, temos que $P_1 = 1$

EXEMPLO

Quatro pessoas (A, B, C e D) formarão uma fila. De quantas maneiras possíveis podemos organizar essas pessoas?

Ao pensarmos na organização temos que, as qualquer uma das 4 pessoas podem ser escolhidas para ocupar a primeira posição. Ao selecioná-la, teremos 3 possibilidades de escolha para a 2º posição. Em seguida, 2, para a 3ª posição e 1 para a última posição. Sendo assim, podemos determinar a quantidade de maneiras possíveis, calculando a **permutação simples**, ou seja,

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Sendo assim, temos 24 maneiras possíveis de organizar as pessoas.

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Para calcularmos os anagramas, bastaria permutar a quantidade de letras da palavra, ou seja, $P_{10} = 10!$. No entanto, as letras M, A, T se repetem. Note que, a troca de posições entre as duas letras M, por exemplo, não gera anagramas diferentes.

Neste caso, utilizamos o cálculo de **permutação com repetição,** dado por:

$$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!}$$

Em que **a, b, c,** são os termos que se repetem.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

A letra M e a letra T repetem 2 vezes, e a letra A repete 3 vezes.
Dessa forma, a quantidade de anagramas que podem ser determinados com a palavra Matemática:

$$P_{10}^{2,2,3} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} =$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} =$$

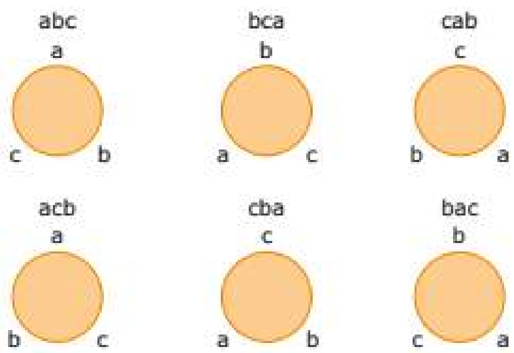
Simplificando 3! e 4 do numerador com 3! e $2 \cdot 2$ do denominador:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.200$$

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

De quantos modos podemos distribuir três objetos a, b e c em torno de um círculo?

Podemos considerar as seguintes configurações:



A princípio consideramos 3! = 6 modos de distribuir a, b e c. No entanto, em cada uma das linhas do esquema anterior, há três configurações idênticas. Sendo assim:

$$\frac{P_3}{3} = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Ou seja, 2 **permutações circulares.** Dividimos o total de permutações por 3, pois cada uma das permutações consideradas gera 3 configurações idênticas, que devem contar como uma. De maneira geral, podemos considerar que , ao permutar circularmente **n** objetos distintos, cada uma das n! permutações gera **n** configurações idênticas, que devem ser descontadas do total. Fazemos isso dividindo n! por **n**.

$$PC_n = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)!}{\cancel{n}}$$

$$PC_n = (n-1)!$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Simplifique a expressão a seguir.

$$\frac{n!}{(n+1)!}$$

Resolução:

Como $(n+1)!$ é o fatorial do sucessor de n, podemos escrevê-lo no seguinte formato:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Dessa forma, podemos substituir essa igualdade na expressão, obtendo:

$$\frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{\cancel{n}!}{(n+1) \cdot \cancel{n}!} = \frac{1}{n+1}$$

2 Simplifique a expressão a seguir.

$$\frac{17! + 18!}{19!}$$

Nesse caso, calcular os valores de 17!, 18! e 19! é muito trabalhoso. Vamos escrever essa expressão de uma forma conveniente, permitindo simplificações. Note que:

$$19! = 19 \cdot 18 \cdot 17!$$

$$18! = 18 \cdot 17!$$

Substituindo essas igualdades na expressão, obtemos:

$$\frac{17! + 18 \cdot 17!}{19 \cdot 18 \cdot 17!}$$

Podemos colocar 17! em evidência:

$$\frac{17! \cdot (1 + 18)}{19 \cdot 18 \cdot 17!}$$

Assim, simplificando:

$$\frac{17! \cdot 19}{19 \cdot 18 \cdot 17!} = \frac{\cancel{1}7! \cdot \cancel{1}9}{\cancel{1}9 \cdot 18 \cdot \cancel{1}7!} = \frac{1}{18}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Ana, Beatriz, Cecília, Daniela e Edna estão participando de uma gincana escolar. Em uma das etapas, elas devem se apresentar pontualmente na quadra, formando uma fila.

a) De quantas maneiras diferentes elas podem se organizar em uma fila?

b) De quantas maneiras diferentes elas podem se organizar em uma fila em que Ana ocupa a 1ª posição e Edna ocupa a 5ª posição?

c) De quantas maneiras diferentes elas podem se organizar em uma fila de forma que Cecília e Daniela fiquem próximas (em qualquer ordem)?

Resolução:

a) Trata-se de uma permutação de 5 elementos. Portanto,

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ maneiras diferentes}$$

b) Nesse caso, as posições de Ana (A) e Edna (E) estão definidas. Assim, podemos organizar o seguinte raciocínio:

$$\text{posição fixa} \rightarrow A\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{elementos que trocam de posição}}\ E \leftarrow \text{posição fixa}$$

Na fila, apenas as outras três meninas trocam de posição. Ou seja, uma permutação de três elementos.

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras diferentes

c) Como Cecília e Daniela devem ficar próximas, primeiramente vamos considerá-las como um único elemento na permutação. Veja um exemplo:

A B CD E

Nesse raciocínio, temos uma permutação de 4 elementos. Ou seja:

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Considerando que Cecília e Daniela devem ficar juntas em qualquer ordem, temos 2! maneiras de organizá-las juntas. Assim, o número total de maneiras de organizar a fila nessas condições é:

$$P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48 \text{ maneiras diferentes}$$

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 1

Ao lançar sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas são as possibilidades de resultado?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

Atividade 2

De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode se vestir se ela tiver 6 camisas, 4 calças, 3 pares de meia e 2 pares de sapato?

a) 15
b) 24
c) 72
d) 144
e) 288

Atividade 3

Quantos anagramas possui a palavra FUTEBOL?

a) 5.040
b) 4.870
c) 5.210
d) 4.780
e) 5.100

Atividade 4

O número de anagramas que se pode formar com a palavra ARRANJO é igual a:

a) 21
b) 42
c) 5040
d) 2520
e) 1260

Atividade 5

Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente, o número de modos diferentes de montar a composição é:

a) 6
b) 24
c) 120
d) 720
e) 5040

ATIVIDADES PARA OS ESTUDANTES

Atividade 6

Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

a) 24
b) 48
c) 96
d) 120
e) 720

Atividade 7

Um grupo de 6 amigos decide sentar-se ao redor de uma mesa circular para jantar. De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar?

a) 720
b) 600
c) 360
d) 120
e) 24

Atividade 8

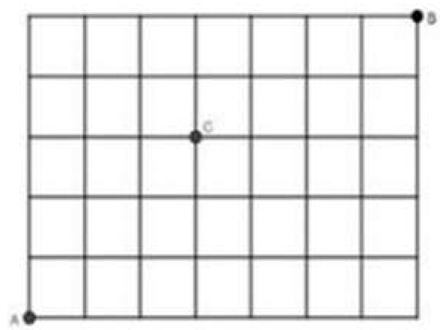
Um grupo de seis amigos foi assistir um filme no cinema e compraram seus ingressos para uma mesma fileira de cadeiras. Considerando haver um casal e que eles devem se sentar em cadeiras vizinhas, de quantas formas os amigos podem se ajustar na fileira de cadeiras?

a) 100
b) 240
c) 340
d) 420
e) 720

Atividade 9

(UFRGS) Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo. O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é

a) 28
b) 35
c) 100
d) 300
e) 792



Atividade 10

Qual é o valor da expressão abaixo?

$$\frac{30!}{28!}$$

a) 2
b) 29
c) 30
d) 840
e) 870

Atividade 11

Qual alternativa mostra uma simplificação da expressão abaixo?

$$\frac{n!}{(n-2)!}$$

a) $n!$
b) n^2
c) $n^2 - n$
d) $(n-2)!$
e) $(n-1)!$

Atividade 12

(PUC-RS) Se,

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)! - n!} = \frac{1}{81}$$

então n é igual a:
a) 13
b) 11
c) 9
d) 8
e) 6

GABARITO

ATIVIDADE 1: D
ATIVIDADE 2: D
ATIVIDADE 3: A
ATIVIDADE 4: E
ATIVIDADE 5: D
ATIVIDADE 6: B
ATIVIDADE 7: D
ATIVIDADE 8: B
ATIVIDADE 9: D
ATIVIDADE 10: E
ATIVIDADE 11: C
ATIVIDADE 12: C

REFERÊNCIAS

Dante, Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

Fonseca, Fred [et al.]. Coleção Ensino Médio 1ª Série. Belo Horizonte: Bernoulli Sistema de Ensino, 2024

Iezzi, Gelson, [et al.]. Matemática: Volume único. 4 ed. - São Paulo: Atual, 2007

Paiva, Manoel. Matemática: Paiva/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática: ensino médio: volume 1. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.