Matemática

2ª Série | Ensino Médio

34ª Semana

Resolvendo problemas de contagem: Arranjo e Combinação

MONITORAMENTO	PEDADOGA/O: PED. PROFESSOR/A: PRO LÍDER: LID	PED.	PRO.	LID.
DESCRITOR DO PAEBES	**D042_M** Utilizar o princípio multiplicativo de contagem na resolução de problema.			
HABILIDADES DO CURRÍCULO RELACIONADAS AOS DESCRITORES	**EM13MAT310** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.			
HABILIDADES OU CONHECIMENTOS PRÉVIOS	**EF08MA03** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo.			

MATEMÁTICA

CONTEXTUALIZAÇÃO

A Análise Combinatória pode ser usada, por exemplo, nos cálculos relacionados aos jogos de loteria, jogos de cartas, possibilidades de sorteios, organização de grupos, de filas, etc. O pôquer, por exemplo, é um jogo de cartas, dos mais populares no mundo, que envolve habilidade e raciocínio matemático. Normalmente, a mão de maior valor determina o vencedor, porém, há de se considerar que o blefe também existe nesse tipo de jogo. A melhor combinação possível é o royal flush, a sequência 10, J, Q, K e A do mesmo naipe.

Disponível em : https://clubepaineiras.org.br/poker/

Uma estratégia utilizada no pôquer é calcular de quantos modos pode-se obter um *full-hand* ou *full-house* (uma trinca de valores iguais e um par de outro valor iguais entre si), uma sequência (cinco cartas cujos valores representam números consecutivos) ou um flush (cinco cartas de mesmo naipe), além de várias outras possíveis configurações de cartas e jogadas e, com base nas análises e estratégias, o jogador decide se deve continuar ou não no jogo.

Outra aplicação de cálculos da Análise Combinatória se dá nos sorteios da Mega-Sena realizados pela Caixa Econômica Federal. Esses sorteios são realizados na quarta e no sábado e pagam milhões de reais para quem acertar os 6 números sorteados. Há, ainda, premiação para aqueles que acertarem 4 ou 5 dos números sorteados. O volante de apostas possui 60 números disponíveis e cada apostador pode marcar de 6 a 15 números na cartela, sendo que a aposta mínima, de 6 números, custa R$ 4,50 e, quanto mais números marcar, maior o preço da aposta e maiores são as chances de ganhar. De quantas maneiras diferentes é possível escolher 6 números em um volante da Mega-Sena?

Neste material, você encontrará ferramentas matemáticas para resolver esse e outros problemas. Bons estudos!

CONCEITOS E CONTEÚDOS

ARRANJOS SIMPLES

No material anterior, estudamos o princípio fundamental da contagem e a permutação. Vimos que a permutação simples de n elementos é qualquer agrupamento **ordenado** desses **n** elementos. Neste material, a partir de **n** elementos, estudaremos agrupamentos ordenados de **p** elementos, tal que $p \leqslant n$

Veja um exemplo:

Usando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, quantos números naturais de três algarismos distintos é possível formar?

Uma das possibilidades é o número 357. Outra é o número 573. Mas para calcular o número total de números que podemos formar, podemos usar o seguinte raciocínio.

$$\overline{centena} \quad \overline{dezena} \quad \overline{unidade}$$

Há 5 possibilidades de escolha para o 1º algarismo, 4 para o 2º algarismo e 3 para o 3º algarismo. Dessa forma, é possível formar: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números.

Nesse caso, temos arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3, e a quantidade desses arranjos é 60. Podemos indicar isso da seguinte forma:

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Nesse exemplo, n = 5 e p = 3. Note que são agrupamentos ordenados tal que $p \leqslant n$.

Chama-se arranjo simples de n elementos distintos tomados p a p (p ≤ n), todo agrupamento ordenado formado por p elementos escolhidos entre os n elementos dados.

MAS COMO CALCULAR A QUANTIDADE DE ARRANJOS SIMPLES?

Para encontrarmos a quantidade de arranjos formados a partir de determinado conjunto de elementos, podemos também utilizar a seguinte fórmula:

$$An,p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Onde **A** = quantidade de arranjos possíveis, **n** = quantidade de elementos do conjunto e **p** = quantidade de elementos de cada agrupamento.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

Nos exemplos a seguir, apresentamos o cálculo de arranjos sem ou com a fórmula apresentada anteriormente.

Exemplos:

a) $A_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$

ou

$$A_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 42$$

b) $A_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

ou

$$A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4!}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 3024$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1

Em uma turma de 20 alunos, será realizada uma votação para escolher um representante e um vice-representante, sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice-representante. Se todos os estudantes dessa turma podem ser eleitos, de quantas maneiras distintas essa escolha poderá ser feita?

Resolução:

Observe que nesse caso, a ordem é importante, visto que ela altera o resultado da votação. Assim, buscamos o número de arranjos de 20 elementos tomados 2 a 2.

Sem a fórmula

$$A_{20,2} = 20 \cdot 19 = 380$$

Com a fórmula

$$A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20.19.\cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$$

Logo, a escolha de um representante e um vice-representante pode ser feita de 380 maneiras diferentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 Oito atletas participam de uma competição de natação, na qual serão premiados o 1º, o 2º e o 3º lugar com medalha de ouro, prata e bronze, respectivamente. De quantas maneiras diferentes é possível compor o pódio de medalhistas nessa competição?

Resolução:

Para resolver esse problema, devemos calcular o número de arranjos de 8 elementos tomados 3 a 3.

Sem a fórmula

$$A_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Com a fórmula

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Portanto, o número de maneiras diferentes de compor o pódio de medalhistas é 336.

CONCEITOS E CONTEÚDOS

COMBINAÇÕES SIMPLES

Para iniciarmos nosso estudo sobre combinações simples, vamos trabalhar no problema a seguir.

Cinco líderes de turma se reuniram para conversar sobre uma gincana que está sendo organizada na escola. Ao final dessa reunião, cada líder cumprimentou o outro com um aperto de mão. Qual foi a quantidade total de apertos de mão dados ao final dessa reunião?

Para facilitar o nosso raciocínio, vamos representar os líderes pelas letras A, B, C, D e E. Devemos considerar que se A apertou a mão de B, não ocorrerá outro aperto de mão vindo de B para A. Ou seja, nesse caso o cumprimento AB é o mesmo que BA.

Nesse sentido, estamos buscando o número de agrupamentos de 2 pessoas, a partir de 5 pessoas possíveis. Mas a ordem das pessoas em cada agrupamento **não importa.** Em outras palavras, para resolver o problema, precisamos determinar quantos subconjuntos de 2 elementos podemos formar a partir de um conjunto de 5 elementos. Veja os cumprimentos que foram dados:

$$\{A,B\},\ \{A,C\},\ \{A,E\},\ \{A,D\},$$
$$\{B,C\},\ \{B,D\},\ \{C,D\},\ \{C,E\},$$
$$\{B,E\},\ \{D,E\}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

COMBINAÇÕES SIMPLES (CONTINUAÇÃO)

Chamamos esses subconjuntos de combinações simples de 5 elementos, tomados 2 a 2. Podemos representar essas combinações por:

$$C_{5,2} = 10$$

Concluímos que o número de subconjuntos ou de apertos de mão dados é 10. Mas para isso foi necessário escrever todos os subconjuntos possíveis.

Em problemas com um número maior de elementos, isso é trabalhoso e pouco prático. Imagine se nessa reunião houvesse 15 líderes de turma e cada um tivesse cumprimentado o outro com um aperto de mão! Nesse caso, o número total apertos de mão é 105!

Podemos usar outra estratégia: já sabemos como calcular o número de agrupamentos ordenados para 5 elementos tomados 2 a 2 (trata-se do arranjo $A_{5,2}$). Mas nas Combinações Simples a ordem de composição de cada agrupamento não importa. Conforme exposto, contaremos, por exemplo, os agrupamentos A,B e B,A como uma única possibilidade. Dessa forma, precisamos retirar da contagem obtida a partir da ideia de arranjo as "possibilidades repetidas". Abaixo, comparamos a quantidade de agrupamentos de $A_{5,2}$ com a quantidade de agrupamentos de $C_{5,2}$:

$$A_{5,2}$$

(A,B)	(B,A)	(C,A)	(D,A)	(E,A)
(A,C)	(B,C)	(C,B)	(D,B)	(E,B)
(A,D)	(B,D)	(C,D)	(D,C)	(E,C)
(A,E)	(B,E)	(C,E)	(D,E)	(E,D)

$$C_{5,2}$$

$\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, E\}$, $\{A, D\}$,
$\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$, $\{C, E\}$,
$\{B, E\}$, $\{D, E\}$

Observe que, nesse caso, o número de arranjos é duas vezes o número de combinações:

$$A_{5,2} = 2 \cdot C_{5,2}$$

Esse fator 2 foi obtido a partir das trocas de posições (permutações) em cada combinação. Podemos afirmar que cada combinação dá origem a 2 arranjos nesse problema. Assim, podemos escrever:

$$A_{5,2} = P_2 \cdot C_{5,2}$$

CONCEITOS E CONTEÚDOS

COMBINAÇÕES SIMPLES (CONTINUAÇÃO)

Por fim, concluímos que:

$$C_{5,2} = \frac{A_{5,2}}{P_2}$$

Desenvolvendo os cálculos, obtemos:

$$C_{5,2} = \frac{A_{5,2}}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

De maneira geral, é possível obter combinações simples, de **n** elementos tomados **p** a **p,** a partir da quantidade de arranjos simples, de **n** elementos tomados **p** a **p**, dividida por **p!**

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Ao desenvolvermos essa escrita, obtemos a seguinte fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Denominam-se combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p** (p ≤ n), os diferentes subconjuntos que contêm p elementos, sem referência à ordem.

O número total de combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p** pode ser indicado por:

$$C_{n,p} \quad \text{ou} \quad C_n^p \quad \text{ou} \quad \binom{n}{p}$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

1 Um técnico de um time de voleibol possui à sua disposição 15 jogadores que podem jogar em qualquer posição. De quantas maneiras ele poderá escalar seu time de 6 jogadores?

a) 4 450 maneiras
b) 5 210 maneiras
c) 4 500 maneiras
d) 5 005 maneiras

Resolução

Como uma equipe de voleibol compete com 6 jogadores, iremos combinar 6 elementos tirados de um conjunto de 15 elementos. Perceba que, nesta situação, a ordem dos jogadores não faz diferença. Assim, usaremos a fórmula de combinação.

$$C_{15,6} = \frac{15!}{6!\,(15-6)!} = \frac{15!}{6!\,9!} = \frac{15.14.13.12.11.10.9!}{6.5.4.3.2.1.9!} = 5\,005 \textit{ maneiras}$$

2 Uma escola fará um sorteio de três ingressos, um para cada aluno, entre os 10 primeiros colocados na olimpíada de matemática. Após a realização da prova e conhecendo os 10 primeiros colocados, calcule as combinações possíveis para o resultado do sorteio.

Resolução

No resultado do sorteio, a ordem não é importante, logo, estamos trabalhando com um problema de combinação. Calcularemos, então, a combinação de 10 elementos tomados de 3 em 3. Substituindo na fórmula, temos que:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!.(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.1.(7!)} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = \frac{720}{6} = 120 \text{ combinações}$$

3 Em um plano foram marcados 6 pontos distintos de forma que três deles nunca estão em linha reta.

a) Quantos segmentos de reta podem ser traçados ligando os pontos 2 a 2?

Resolução

Marcarmos no plano os pontos A, B, C, D, E e F, de forma que três deles nunca estão alinhados. Perceba que o segmento $\overline{AB}$ é o mesmo que $\overline{BA}$. Ou seja, buscamos a quantidade de subconjuntos de 2 elementos, a partir de 6 elementos. Precisamos calcular a combinação de 6 elementos, tomados 2 a 2:

$$C_{6,2} = \frac{A_{6,2}}{2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15 \text{ segmentos de reta}$$

EXERCICIOS RESOLVIDOS

3 (CONTINUAÇÃO)

b) Quantos triângulos é possível formar tendo sempre 3 pontos, dentre A, B, C, D, E e F, como vértices?

Resolução

Como nesse problema não há três pontos alinhados, podemos garantir que três pontos formam um triângulo. Dessa forma, queremos saber a quantidade de subconjuntos de 3 elementos, a partir de um conjunto de 6 elementos. Ou seja, precisamos calcular as combinações simples de 6 elementos, tomados 3 a 3.

$$C_{6,3} = \frac{A_{6,3}}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ triângulos}$$

4

Em uma escola, 10 estudantes e 4 professores participam de um clube de robótica. Essa escola foi classificada para participar de uma competição, mas as equipes participantes desse evento são compostas apenas de 6 estudantes e 2 professores. De quantas maneiras diferentes a escola pode compor uma equipe para participar dessa competição?

Resolução

Nesse problema, temos duas combinações simples para calcular: a primeira para determinar a quantidade de maneiras de escolher estudantes e segunda para obter a quantidade de maneiras para escolher professores.

Escolha dos estudantes:

$$C_{10,6} = \frac{A_{10,6}}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Escolha dos professores:

$$C_{4,2} = \frac{A_{4,2}}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{12}{2} = 6$$

Para cada uma das 210 maneiras de escolher os estudantes, há 6 maneiras de escolher professores. Assim, temos um total de:

$$210 \cdot 6 = 1260 \text{ maneiras diferentes de compor a equipe}$$

Atividade 1

Júlia deseja viajar e levar 5 pares de sapatos, sabendo que ela possui em seu guarda-roupa 12 pares, de quantas maneiras diferentes Júlia poderá escolher 5 pares de sapatos para a sua viagem?
a) 60
b) 120
c) 792
d) 3960
e)19.800

Atividade 2

Em época de eleição para o grêmio estudantil do colégio, tiveram 12 candidatos aos cargos de presidente, vice-presidente e secretário. De quantos modos diferentes estes candidatos poderão ocupar as vagas deste grêmio?
a) 1320
b) 1230
c) 1420
d) 1720
e) 1920

Atividade 3

Preparando-se para a sua festa de aniversário de sessenta anos, uma senhora quer usar três anéis de cores diferentes nos dedos das mãos, um anel em cada dedo. De quantos modos diferentes pode colocá-los, se não vai pôr nenhum anel nos polegares?
a) 56
b) 36
c) 60
d) 336
e) 120

Atividade 4

O grêmio estudantil de uma escola é composto por 6 alunos e 8 alunas. Na última reunião do grêmio, decidiu-se formar uma comissão de 3 rapazes e 5 moças para a organização das olimpíadas do colégio. De quantos modos diferentes pode-se formar essa comissão?
a) 1 120
b) 2 240
c) 6 720
d) 100 800
e) 806 400

Atividade 5

Para incentivar a participação de seus estudantes na OBMEP, uma professora decidiu sortear brindes para os que comparecessem na 2ª fase dessa competição. Havia três prêmios: o primeiro sorteado ganharia um cubo mágico, o segundo ganharia um livro de matemática, e o terceiro ganharia uma camiseta do clube de matemática. Sabendo que 16 estudantes compareceram na prova, e que um aluno não poderia ganhar mais de um prêmio, então, o número de resultados possíveis para esse sorteio é igual a:

a) 430
b) 520
c) 975
d) 1850
e) 3360

Atividade 6

O setor de Recursos Humanos de uma determinada empresa vai realizar a contratação de 4 funcionários para os cargos de vendedor interno, atendente, auxiliar administrativo e vendedor externo. A seleção será realizada em duas etapas, a primeira será a análise de currículo de todos os candidatos, independentemente do cargo. Durante a análise de currículo, serão selecionados 10 candidatos para participar da entrevista. Durante a entrevista, o setor de Recursos Humanos terá que descartar 6 candidatos e escolher 4 já com cargos definidos de acordo com o perfil dos candidatos. Sendo assim, o número de agrupamentos possíveis para a contratação desses 4 funcionários será:

a) 1725
b) 2540
c) 3780
d) 5040
e) 10.080

Atividade 7

(M120229E4) Marisa ganhou de presente 3 porta-retratos. A fim de escolher as fotos que irão ser colocadas nesses porta-retratos, ela selecionou 9 de suas fotografias preferidas.
Quantas possibilidades ela tem para escolher 3 dentre essas fotos?

A) 27
B) 84
C) 168
D) 504
E) 729

Atividade 8

(M120246E4) Um haras possui 10 cavalos treinados para provas de salto, todos apresentando desempenho muito parecido nas últimas competições regionais.
De quantas maneiras distintas o gerente desse haras pode escolher 3 desses cavalos para participarem de um torneio?

A) 7
B) 30
C) 120
D) 720
E) 1 000

Atividade 9

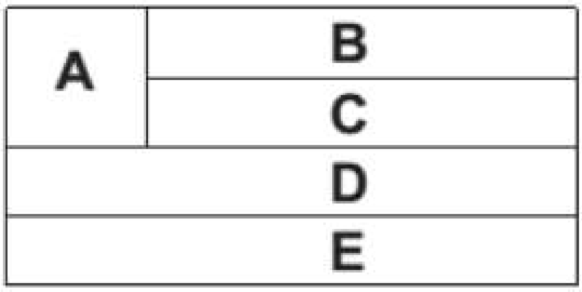
Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados utilizando os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9?

a) 5
b) 10
c) 60
d) 120
e) 240

Atividade 10

ENEM 2015

A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.



Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor. O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é:

a) 1 x 2 x 1 x 1 x 2.
b) 3 x 2 x 1 x 1 x 2.
c) 3 x 2 x 1 x 1 x 3.
d) 3 x 2 x 1 x 2 x 2.
e) 3 x 2 x 2 x 2 x 2.

GABARITO

ATIVIDADE 1: C
ATIVIDADE 2: A
ATIVIDADE 3: D
ATIVIDADE 4: A
ATIVIDADE 5: E
ATIVIDADE 6: D
ATIVIDADE 7: B
ATIVIDADE 8: C
ATIVIDADE 9: D
ATIVIDADE 10: B

REFERÊNCIAS

Brasil Escola. Arranjo ou Combinação? Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/arranjo-ou-combinacao.htm Acesso em 11 out 2024

Dante, Luiz Roberto. Matemática - Projeto VOAZ. Volume único. São Paulo: Ática, 2011

Fonseca, Fred [et al.]. Coleção Ensino Médio 1ª Série. Belo Horizonte: Bernoulli Sistema de Ensino, 2024

Iezzi, Gelson, [et al.]. Matemática: Volume único. 4 ed. - São Paulo: Atual, 2007

Paiva, Manoel. Matemática: Paiva/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

Smole, Kátia Cristina Stocco; Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática: ensino médio: volume 1. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.