

Material Estruturado



SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA FINITA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRIPTOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT507 Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	- Identificar a regularidade que permite a dedução da fórmula para cálculo da Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética finita. - Resolver problemas envolvendo Progressões Aritméticas.	D096_M Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.

Contextualização

13/03/2024 15h35

Municípios do Espírito Santo firmam compromisso para implementar Busca Ativa Escolar

sedu.es.gov

Os direitos das crianças e adolescentes representam um dos pilares mais importantes para a construção de uma sociedade justa e igualitária. No Brasil, o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), instituído pela Lei 8.069 de 1990, consolidou avanços significativos para a promoção e proteção dos direitos humanos desse público.



sedu.es.gov

Evento realizado em Vitória, os 78 municípios capixabas se comprometeram a encontrar e rematricular crianças e adolescentes que estão fora da escola.

Um dos direitos das crianças e adolescentes é a garantia à educação que é essencial para promover o seu desenvolvimento pleno. No Espírito Santo, a Busca Ativa Escolar tem sido uma ferramenta importante para localizar e rematricular jovens fora da escola, enfrentando a evasão e exclusão escolar. Durante um evento no ano de 2024 em Vitória, os 78 municípios capixabas reforçaram seus compromissos com essa estratégia, mostrando como a união de esforços pode transformar a realidade de muitos meninos e meninas.

A Matemática, além de seu papel teórico, possui aplicações práticas que podem ser úteis no planejamento de ações como essas. Neste material, exploraremos o tema da **soma dos termos de uma progressão aritmética (PA)** e sua conexão com desafios do cotidiano.

Considere, por exemplo, uma iniciativa de organização de visitas escolares para conscientizar famílias sobre a importância de manter as crianças na escola. Se a equipe de agentes de integração aumentar progressivamente a quantidade de famílias visitadas a cada semana, seguindo um padrão constante, podemos calcular o total de visitas realizadas ao longo de um período utilizando a **soma dos termos de uma PA**. Esse cálculo ajuda a mensurar o impacto da ação e a prever os recursos necessários para seu sucesso.

Prepare-se para explorar a resolução de problemas reais, unindo conhecimento matemático e responsabilidade cidadã!

BONS ESTUDOS!

Conceitos e Conteúdos

SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é amplamente reconhecido como um dos maiores matemáticos do século XVIII. Há uma história famosa sobre sua infância que exemplifica sua genialidade.

Certo dia, seu professor pediu à turma que calculasse a soma dos **100 primeiros números naturais**:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$



Carl Friedrich Gauss, era filho único de pais sem instrução. Foi matemático, astrônomo e físico.

Enquanto os colegas demoravam, Gauss encontrou rapidamente a resposta correta: 5050.

O jovem Gauss percebeu um padrão:

1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100

101

101

101

Como há 50 pares de números, ele concluiu que a soma total seria: **$50 \times 101 = 5050$** .

Esse raciocínio levou à fórmula para calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (S_n) quando o primeiro (a_1) e o último (a_n) termos são conhecidos:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Em que:

- (S_n) : é a soma dos n termos;
- (a_1) : é o primeiro termo;
- (a_n) : é o n ésimo termo;
- n é o número de termos.



DICA DE ESTUDO

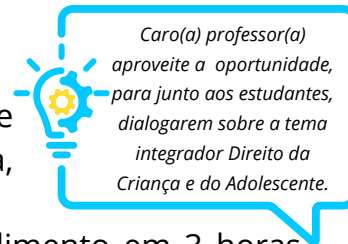
DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DA SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA.



Vamos ver o exemplo:

- Um projeto oferece apoio psicossocial para crianças e adolescentes em situação de risco. Na primeira semana, são realizadas 5 horas de atendimento.

A cada semana, a equipe aumenta o tempo de atendimento em 3 horas para atender mais jovens. Qual será o total de horas de atendimento realizado após 12 semanas?



Vamos analisar os dados do problema, podemos ver que as horas de atendimento por semana formam uma PA com:

- $a_1 = 5$ (horas de atendimento na 1ª semana);
- $r = 3$ (aumento semanal de horas);
- $n = 12$ (duração total do projeto em semanas).

Primeiro precisamos calcular o último termo a_n da PA. Usamos a fórmula do termo geral que estudamos no material anterior: $a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$

Substituímos os valores:

$$a_{12} = 3 \cdot 12 + (5 - 3)$$

$$a_{12} = 36 + 2$$

$$a_{12} = 38$$

O número de horas de atendimento na 12ª semana foi 38.

Para calcular a soma total das horas de atendimento (S_n)

Usamos a fórmula da soma dos n primeiros termos:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Substituímos os valores:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (5 + 38)}{2}$$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot 43}{2}$$

$$S_{12} = \frac{516}{2}$$

$$S_{12} = 258$$

O total de horas de atendimento realizado após 12 semanas será 258 horas.



Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Uma equipe de agentes de integração escolar iniciou um projeto de conscientização, visitando famílias para reforçar a importância da permanência das crianças na escola. Na primeira semana, foram visitadas 10 famílias, e a cada semana seguinte, a equipe conseguiu visitar 5 famílias a mais do que na semana anterior. Se o projeto durou 8 semanas, quantas famílias foram visitadas no total durante esse período?

SOLUÇÃO

Sabemos que:

- $a_1 = 10$ (número de famílias visitadas na 1ª semana),
- A quantidade de famílias visitadas aumenta 5 por semana ($r = 5$),
- O projeto durou ($n = 8$) 8 semanas.

Para calcular o total de famílias visitadas (S_n), precisamos da soma dos termos da PA. Antes disso, determinamos o último termo (a_n):

$$a_n = r \cdot n + (a_1 - r)$$

Substituímos os valores:

$$a_8 = 5 \cdot 8 + (10 - 5)$$

$$a_8 = 40 + 5$$

$$a_8 = 45$$

Agora, aplicamos a fórmula da soma dos termos do PA: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Substituímos os valores:

$$S_8 = \frac{8 \cdot (10 + 45)}{2}$$

$$S_8 = \frac{8 \cdot 55}{2}$$

$$S_8 = \frac{440}{2}$$

$$S_8 = 220$$

Resposta:

No total, a equipe visitou 220 famílias ao longo das 8 semanas.

EXERCÍCIO 2

(Enem) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é :

- A) 21.
- B) 24.
- C) 26.
- D) 28.
- E) 31.



SOLUÇÃO

Para resolver essa questão, vamos identificar a progressão aritmética que nos é dada no problema.

Podemos considerar que cada coluna corresponde a um termo da sequência numérica, portanto, o primeiro termo é 1 ($a_1 = 1$), o segundo é 2 ($a_2 = 2$), o terceiro termo é 3 ($a_3 = 3$) e assim sucessivamente até o sétimo e último termo da sequência numérica ($a_7 = 7$).

Sabemos que a progressão possui sete elementos ($n = 7$) e temos conhecidos o primeiro e o último termo, logo, podemos usar a fórmula da soma dos elementos de uma PA:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \\ S_7 &= \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} \\ S_7 &= \frac{(1 + 7) \cdot 7}{2} \\ S_7 &= \frac{8 \cdot 7}{2} \\ S_7 &= \frac{56}{2} = 28 \end{aligned}$$

Então há 28 cartas distribuídas nas fileiras. Como no baralho há 52 cartas, fazendo $52 - 28 = 24$, descobrimos que há **24 cartas no monte**.

A alternativa correta é a letra B.

Material Extra



LIVRO MATEMÁTICA EM CONTEXTOS - FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTIMICA E SEQUÊNCIAS

- Na página 129 a atividade sugerida “Explore para descobrir” é uma boa oportunidade para que os alunos em duplas possam iniciar o entendimento do conceito da soma dos termos de um PA.
- Nas páginas 131 a 132 as atividades ali apresentadas podem ser usadas como aprofundamento dos estudos da soma dos termos de uma PA finita



LIVRO PRISMAS - FUNÇÕES E PROGRESSÕES

- Nas página 128 a 131 as atividades apresentadas podem ser usadas como aprofundamento dos estudos das progressões aritméticas, incluindo a soma dos termos de uma PA finita.

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.



Explicação da fórmula para a soma de uma PA finita



Atividades

ATIVIDADE 1

João está treinando para uma maratona e decide correr todos os dias. No primeiro dia, ele corre 2 km, no segundo, ele corre 3 km, no terceiro, 4 km, e assim por diante, a cada dia seguinte, ele aumenta a distância percorrida em 1 km. João pretende treinar durante 10 dias consecutivos.

Qual será a **distância total percorrida** por João ao final dos **10 dias** de treino?

- A) 25 km
- B) 30 km
- C) 35 km
- D) 55 km
- E) 65 km



ATIVIDADE 2

Maria decidiu economizar dinheiro para comprar um novo laptop. No primeiro mês, ela economiza R\$ 50,00, no segundo mês, R\$ 70,00, no terceiro, R\$ 90,00 e assim por diante. A cada mês seguinte, ela decide aumentar o valor economizado em R\$ 20,00. Maria pretende economizar durante **12 meses**.

Qual será o **valor total** economizado por Maria ao final desse período?

- A) R\$ 250,00
- B) R\$ 270,00
- C) R\$ 960,00
- D) R\$ 19200,00
- E) R\$ 2320,00



GOOGLE

ATIVIDADE 3

A SOMA DE GAUSS

$$S_N = \frac{(a_1 + a_N)N}{2}$$

Nem sempre é conveniente **somar termo a termo** de uma progressão aritmética (PA). Para facilitar nosso trabalho podemos usar a fórmula da **soma de Gauss**. Usando essa fórmula, podemos calcular a soma **S** de todos os **números pares positivos menores que 100**. Quanto vale S?

- A) 2352
- B) 2450
- C) 2550
- D) 2552
- E) 2600

ATIVIDADE 4

Usando a **fórmula da soma de Gauss** podemos deduzir uma expressão geral para a **soma S dos N primeiros números ímpares positivos**. Por exemplo, se $N = 2$ então $S = 1 + 3 = 4$, se $N = 3$ então $S = 1 + 3 + 5 = 9$. Uma **expressão geral** para **S** é?

- A) $S = 2N - 1$
- B) $S = N^2 - 1$
- C) $S = N^2$
- D) $S = N^2 + N$
- E) $S = N^3$

ATIVIDADE 5

Ana está participando de uma competição de leitura na escola. No primeiro dia, ela lê 5 páginas de um livro e, a cada dia seguinte, ela 2 páginas a mais. Ana pretende continuar essa rotina de leitura durante **15 dias**.

Qual será o **número total de páginas** lidas por Ana ao final dos 15 dias?

- A) 285 páginas
- B) 255 páginas
- C) 225 páginas
- D) 220 páginas
- E) 215 páginas



CANVA

ATIVIDADE 6



CANVA

Ao financiar uma casa em **20 anos**, José fechou o seguinte negócio com a financeira: em **cada ano**, o valor das 12 prestações **deve ser igual** e o valor da prestação mensal em um determinado ano é **R\$ 40,00 a mais** que o valor pago, mensalmente, no ano anterior.

Considerando que o valor da prestação no **primeiro ano é de R\$ 350,00**, qual será o **valor total pago** por José, em reais?

- A) 175000
- B) 175100
- C) 175200
- D) 175300
- E) 175400

ATIVIDADE 7

Numa **sequência de 50 números** que **aumenta de 5 em 5** (PA de razão 5), a **soma** de todos esses números é igual a 6625. Qual é o **1º número** que aparece nessa sequência?

- A) 5
- B) 10
- C) 15
- D) 20
- E) 25

ATIVIDADE 8

Se a **soma S** dos **n primeiros termos** de uma PA é dada pela expressão

$$S = 2n^2 - n \quad \text{então qual é o valor do } \mathbf{20^\circ \text{ termo?}}$$

- A) 77
- B) 81
- C) 85
- D) 89
- E) 93

ATIVIDADE 9

A **soma dos 10 termos** de uma PA é 300. Se o **primeiro** termo dessa PA é 3, assinale a alternativa que apresenta sua **razão**.

- A) 4
- B) 5
- C) 6
- D) 7
- E) 8

ATIVIDADE 10



Numa caixa há 1000 bolinhas de gude. Retira-se 15 bolinhas na primeira vez, 20 na segunda, 25 na terceira e assim sucessivamente na mesma razão.

Após a **décima quinta** retirada, quantas bolinhas **sobrarão** na caixa?

- A) 100
- B) 150
- C) 200
- D) 250
- E) 300



Gabarito

ATIVIDADE 01: E

ATIVIDADE 02: D

ATIVIDADE 03: B

ATIVIDADE 04: C

ATIVIDADE 05: A

ATIVIDADE 06: C

ATIVIDADE 07: B

ATIVIDADE 08: A

ATIVIDADE 09: C

ATIVIDADE 10: D

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Para calcular a distância total percorrida (D) por João, basta somar os 10 primeiros termos da PA onde o primeiro termo é 2 e a razão é 1.

$$S = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 65$$

Portanto, João percorreu 65 km nesses 10 dias de treino e a opção correta é a **letra E**.

Podemos, ainda, resolver utilizando a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Aritmética (PA).

- O primeiro termo (a_1) é 2 km.
- O segundo termo (a_2) é 3 km, e assim por diante, aumentando 1 km a cada dia.
- O número de termos (n) é 10.

Fórmula do n-ésimo termo de uma PA: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

onde r é a razão da PA (neste caso, $r = 1$).

Soma dos n primeiros termos de uma PA: $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

Encontrar o 10º termo (a_{10}):

$$a_{10} = 2 + (10 - 1) \cdot 1 = 2 + 9 = 11 \text{ km}$$

Calcular a soma dos 10 primeiros termos:

$$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot (2 + 11) = 5 \cdot 13 = 65 \text{ km}$$

De fato, alternativa E.

ATIVIDADE 2

Para calcular o valor (V) economizado por Maria ao final de 12 meses, basta somar os 12 primeiros termos da PA que tem primeiro termo igual a 50 e razão igual a 20.

$$V = 50 + 70 + 90 + 110 + 130 + 150 + 170 + 190 + 210 + 230 + 250 + 270 = 1920$$

Portanto, o valor total economizado por Maria ao final dos 12 meses será de R\$ 1920,00 e a opção correta é a **letra D**.

Podemos, ainda, resolver utilizando a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Aritmética (PA).

- **Primeiro termo (a_1):** R\$ 50,00
- **Razão (r):** R\$ 20,00
- **Número de termos (n):** 12 meses

Encontrar o 12º termo (a_{12}):

$$a_{12} = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{12} = 50 + (12 - 1) \cdot 20$$

$$a_{12} = 50 + 11 \cdot 20$$

$$a_{12} = 270$$

Calcular a soma dos 12 primeiros termos (S_{12}):

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} \cdot (50 + 270)$$

$$S_{12} = 6 \cdot 320$$

$$S_{12} = 1\,920$$

De fato, a alternativa é D.



ATIVIDADE 3

O primeiro número par positivo é 2 e o último menor que 100 é 98, portanto nossa soma S será dada por:

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 96 + 98$$

Para usar a fórmula da soma de Gauss, precisamos saber o número N de termos nessa soma, para isso, basta usar a fórmula do termo geral da PA, logo,

$$a_N = a_1 + (N - 1) \cdot r$$

$$98 = 2 + (N - 1) \cdot 2$$

$$N = \frac{98 - 2}{2} + 1 = 49$$

Agora podemos calcular a soma S por meio da soma de Gauss

$$S = \frac{2 + 98}{2} \cdot 49 = 2450$$

Portanto, a opção correta é a **letra B**.

ATIVIDADE 4

Como já vimos anteriormente, o termo geral para a sequência dos números ímpares é $a_n = 2n - 1$ logo, $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$

Usando a fórmula da soma de Gauss,

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n$$

$$S = n^2$$

Portanto, a opção correta é a **letra C**.

ATIVIDADE 5

Para encontrar o número total de páginas lidas S por Ana usaremos a fórmula da soma de Gauss e, para isso, precisamos saber o valor do último termo (15º termo). Esse valor pode ser encontrado usando a fórmula do termo geral da PA.

$$a_{15} = a_1 + 14r = 5 + 14 \cdot 2 = 33$$

Aplicando agora na fórmula da soma de Gauss

$$S = \frac{5 + 33}{2} \cdot 15 = 285$$

Portanto, a opção correta é a **letra A**.



ATIVIDADE 3

O primeiro número par positivo é 2 e o último menor que 100 é 98, portanto nossa soma S será dada por:

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 96 + 98$$

Para usar a fórmula da soma de Gauss, precisamos saber o número N de termos nessa soma, para isso, basta usar a fórmula do termo geral da PA, logo,

$$a_N = a_1 + (N - 1) \cdot r$$

$$98 = 2 + (N - 1) \cdot 2$$

$$N = \frac{98 - 2}{2} + 1 = 49$$

Agora podemos calcular a soma S por meio da soma de Gauss

$$S = \frac{2 + 98}{2} \cdot 49 = 2450$$

Portanto, a opção correta é a **letra B**.

ATIVIDADE 4

Como já vimos anteriormente, o termo geral para a sequência dos números ímpares é

$$a_n = 2n - 1 \text{ logo, } S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Usando a fórmula da soma de Gauss,

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2$$

Portanto, a opção correta é a **letra C**.

ATIVIDADE 5

Para encontrar o número total de páginas lidas S por Ana usaremos a fórmula da soma de Gauss e, para isso, precisamos saber o valor do último termo (15º termo). Esse valor pode ser encontrado usando a fórmula do termo geral da PA.

$$a_{15} = a_1 + 14r = 5 + 14 \cdot 2 = 33$$

Aplicando agora na fórmula da soma de Gauss

$$S = \frac{5 + 33}{2} \cdot 15 = 285$$

Portanto, a opção correta é a **letra A**.



ATIVIDADE 6

Seja p_1 o valor das prestações pagas por José no primeiro ano, p_2 no segundo ano, p_3 no terceiro ano e assim por diante até p_{20} , o valor das prestações pagas no vigésimo ano. Desta forma, o valor total S pago por José será a soma de 20 termos da seguinte forma:

$$S = 12p_1 + 12p_2 + \dots + 12p_{20}$$

$$S = 12(p_1 + p_2 + \dots + p_{20})$$

Para calcular essa soma é necessário saber o valor de p_{20} .

$$p_{20} = p_1 + 19r = 350 + 19 \cdot 40 = 1110$$

Agora podemos calcular o valor de S usando a fórmula da soma de Gauss

$$S = 12 \cdot \frac{p_1 + p_{20}}{2} \cdot 20$$

$$S = 12 \cdot \frac{350 + 1110}{2} \cdot 20 = 175200$$

Portanto, a opção correta é a **letra C**.

ATIVIDADE 7

Vamos aplicar esses valores na fórmula da soma de Gauss substituindo o último termo (50° termo) pelo primeiro termo mais 49 vezes a razão.

$$a_{50} = a_1 + 49r$$

$$a_{50} = a_1 + 49 \cdot 5 = a_1 + 245$$

Aplicando agora na fórmula da soma

$$s_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50$$

$$6625 = \frac{a_1 + a_1 + 245}{2} \cdot 50$$

$$\frac{6625 \cdot 2}{50} - 245 = 2a_1 = 20$$

$$a_1 = 10$$

Portanto, a opção correta é a **letra B**.

ATIVIDADE 8

Se $n = 1$ então

$$S = a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$$

Se $n = 2$ então

$$S = a_1 + a_2 = 2 \cdot 2^2 - 2 = 6 \rightarrow a_2 = 5$$

Se $n = 3$ então

$$S = a_1 + a_2 + a_3 = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15 \rightarrow a_3 = 9$$

Logo, a sequência numérica a_n é uma PA de razão 4 e primeiro termo igual a 1 e,

portanto, seu vigésimo termo é $a_{20} = 1 + 19 \cdot 4 = 77$

Portanto, a opção correta é a **letra A**.

ATIVIDADE 9

Aplicando os dados na fórmula da soma de Gauss, encontraremos o valor do décimo termo dessa PA.

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 \rightarrow 300 = \frac{3 + a_{10}}{2} \cdot 10$$

$$\frac{300 \cdot 2}{10} - 3 = a_{10} \rightarrow a_{10} = 57$$

Substituindo agora na fórmula do termo geral,

$$a_{10} = a_1 + 9r \rightarrow 57 = 3 + 9r \rightarrow r = \frac{57 - 3}{9} = 6$$

Portanto, a opção correta é a **letra C**.

ATIVIDADE 10

Para saber quantas bolinhas sobrarão na caixa, precisamos antes saber quantas foram retiradas da caixa e, para isso, precisamos somar uma sequência de 15 números em PA de razão 5 que começa por 15.

Podemos realizar essa soma pela fórmula de Gauss, porém, precisamos antes de saber o 15º número dessa sequência, que pode ser calculado por

$$a_{15} = a_1 + 14r = 15 + 14 \cdot 5 = 85$$

Aplicando agora essas informações na fórmula da soma de Gauss

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{15 + 85}{2} \cdot 15 = 750$$

Portanto, sobrarão na caixa $1000 - 750 = 250$ bolinhas e a opção correta é a **letra D**.

Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

