GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO LOGARÍTMICA: DEFINIÇÃO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT305 Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	• Identificar e descrever as principais características das funções logarítmicas, incluindo base, domínio, imagem e comportamento de crescimento. • Resolver problemas envolvendo funções logarítmicas em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	Não há descritor relacionado.

Contextualização

Você já viu como os logaritmos nos ajudam a interpretar grandezas que crescem de forma exponencial, como a magnitude de um terremoto ou a intensidade do som. Mas agora é hora de dar um passo adiante: como representar e visualizar matematicamente esses comportamentos? É aqui que entram as funções logarítmicas.

Imagine que você está acompanhando a popularidade de um novo aplicativo de redes sociais. No primeiro dia, poucas pessoas o conhecem. Em uma semana, ele já tem milhares de usuários. Em um mês, milhões de pessoas estão usando a plataforma. O crescimento não é linear, mas segue um padrão previsível – e as funções logarítmicas são perfeitas para modelar esse tipo de comportamento.

Mas nem sempre lidamos com crescimento. Pense no processo de resfriamento de uma xícara de café quente deixada sobre a mesa ou na forma como a radioatividade de um material decai ao longo do tempo. Nesses casos, o comportamento não é de expansão, mas de redução, e as funções logarítmicas também desempenham um papel essencial na análise desses fenômenos.

As funções logarítmicas estão por toda parte, e agora você tem a oportunidade de explorá-las e compreender seu impacto no mundo ao nosso redor. Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Seja a um número real positivo diferente de 1 ($a > 0$ e $a \neq 1$), a função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \log_a x$$

é denominada **função logarítmica de base a**.

Exemplo:

Seja a função $f(x) = \log_5 x$

- $f(1) = \log_5 1 = 0, \text{ pois } 5^0 = 1.$
- $f(125) = \log_5 125 = 3, \text{ pois } 5^3 = 125.$
- $f\left(\dfrac{1}{25}\right) = \log_5 \dfrac{1}{25} = -2, \text{ pois } 5^{-2} = \dfrac{1}{25}.$

COMPORTAMENTO GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função logarítmica pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor de sua base. É importante lembrar que a base deve ser sempre um número positivo e diferente de 1. Assim, considerando uma função logarítmica qualquer de base a, o gráfico pode apresentar dois comportamentos distintos:

- ***Crescente***: A resposta da função aumenta a medida que x aumenta. No caso da função logarítmica, isto ocorre quando a base é maior que 1, ou seja, $a > 1$.
- ***Decrescente***: A resposta da função diminui a medida que x aumenta. Isto ocorre quando a base está entre 0 e 1, isto é, $0 < a < 1$.

Portanto, a base da função logarítmica define diretamente o crescimento ou decrescimento da função, e consequentemente, de sua representação gráfica.

Funções Logarítmicas Crescentes

Vamos, então, iniciar nossa análise pelo comportamento gráfico das **funções logarítmicas crescentes**. Para isso, consideremos a função logarítmica de base 2 aplicada a potências de dois, o que facilita os cálculos e a construção do gráfico. Observe, na tabela abaixo, que à medida que x aumenta, o valor da função também cresce, confirmando seu caráter crescente.

	$f(x) = \log_2 x$
$x = \dfrac{1}{4}$	$\log_2 \dfrac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \cdot \cancelto{1}{\log_2 2} = -2$
$x = \dfrac{1}{2}$	$\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \cdot \cancelto{1}{\log_2 2} = -1$
$x = 1$	$\cancelto{0}{\log_2 1} = 0$
$x = 2$	$\cancelto{1}{\log_2 2} = 1$
$x = 4$	$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \cdot \cancelto{1}{\log_2 2} = 2$

Tabela 1: Desenvolvimento dos cálculos para esboçar o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

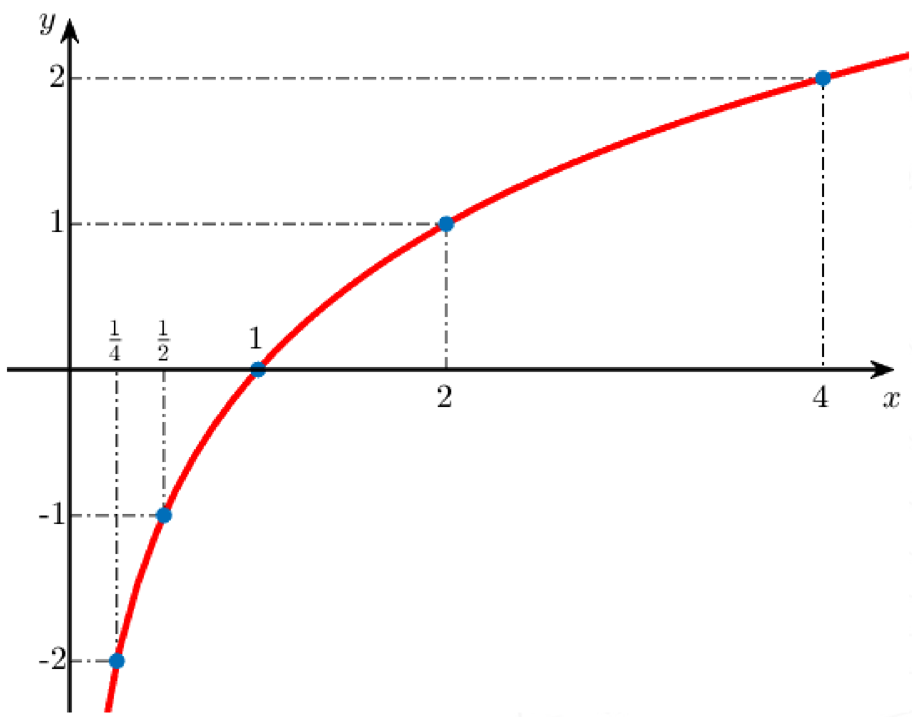


Figura 1: Gráfico da função logarítmica crescente $f(x) = \log_2 x$.

Vale ressaltar que o domínio dessas funções é composto exclusivamente por números positivos. Isso significa que não consideramos valores negativos de x, pois o logaritmo de um número negativo não está definido no conjunto dos números reais.

Na figura 1 podemos ver o gráfico da função estudada, onde é possível observar seu crescimento. Nota-se que, inicialmente, a inclinação é mais acentuada, tornando-se gradativamente menos inclinada à medida que x aumenta.

Funções Logarítmicas Decrescentes

Agora, vamos analisar o comportamento gráfico das **funções logarítmicas decrescentes**. Para isso, tomemos como exemplo a função logarítmica de base $\frac{1}{2}$, aplicada a potências de dois. Assim como no caso crescente, essa escolha simplifica os cálculos e nos permite esboçar o gráfico com mais precisão. Observe, na tabela abaixo, que à medida que x cresce, os valores da função diminuem, confirmando sua natureza decrescente.

	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$x = \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{2^{-1}} 2^{-2} = \frac{-2}{-1} \cdot \cancelto{1}{\log_2 2} = 2 \cdot 1 = 2$
$x = \frac{1}{2}$	$\cancelto{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}} = 1$
$x = 1$	$\cancelto{0}{\log_{\frac{1}{2}} 1} = 0$
$x = 2$	$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2 = \frac{1}{-1} \cancelto{1}{\log_2 2} = -1 \cdot 1 = -1$
$x = 4$	$\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{2^{-1}} 2^2 = \frac{2}{-1} \cancelto{1}{\log_2 2} = -2 \cdot 1 = -2$

Tabela 2: Desenvolvimento dos cálculos para esboçar o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Assim como na função logarítmica crescente, o domínio continua sendo composto apenas por números positivos. Isso se deve ao fato de que o logaritmo de números negativos não está definido no conjunto dos números reais.

A seguir, apresentamos o gráfico dessa função, no qual é possível observar seu comportamento decrescente. Nota-se que, inicialmente, a inclinação é mais acentuada, tornando-se gradativamente menos inclinada conforme x aumenta, evidenciando a desaceleração da taxa de variação da função.

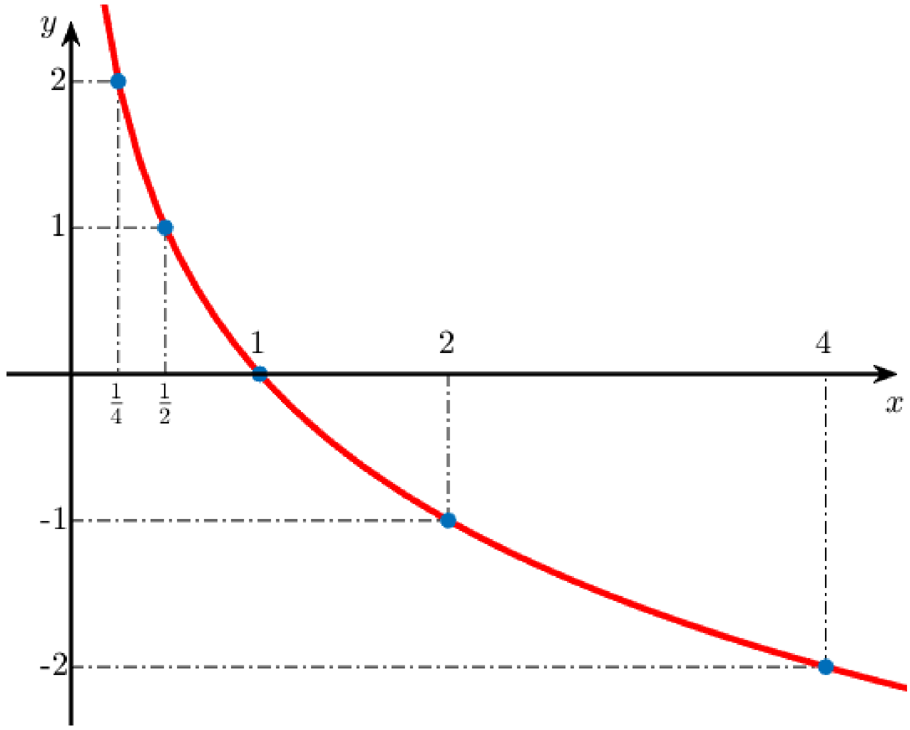


Figura 2: Gráfico da função logarítmica crescente $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

CARACTERÍSTICAS COMUNS A TODA FUNÇÃO LOGARÍTIMICA

Vejamos algumas características válidas para qualquer função logarítmica.

Domínio e imagem

- **Domínio:** o valor de x de uma função logarítmica é sempre estritamente positivo $(x > 0)$. Isso ocorre porque o logaritmo de um número negativo ou zero não está definido no conjunto dos números reais.

- **Imagem:** $f(x)$ pode assumir qualquer valor real $(f(x) \in \mathbb{R})$.

Função bijetiva

A função logarítmica é injetiva, pois para quaisquer dois elementos distintos x_1 e x_2 no domínio, os valores correspondentes da função, $f(x_1)$ e $f(x_2)$, também são distintos.

Além disso, a função logarítmica é sobrejetiva, pois, para qualquer número real b, sempre existe um único número real positivo x que satisfaz a equação $\log_a x = b$.

Consequentemente, a função logarítmica é **bijetiva**.

Interseção com o eixo das abscissas em $x = 1$

Toda função logarítmica possui um ponto comum $(1, 0)$, pois

$$\log_a 1 = 0$$

para qualquer base que respeite a condição dada pela definição de logaritmo $(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$.

Não interseção com o eixo das ordenadas

O gráfico não intercepta o eixo y e não possui pontos nos quadrantes II e III do plano cartesiano.

Aproximação assintótica do eixo y

À medida que x se aproxima de zero pelo lado positivo, o valor da função logarítmica se aproxima cada vez mais do eixo y, sem jamais tocá-lo.

Intensidade do crescimento/decrescimento

A função logarítmica tem um crescimento/decrescimento cada vez mais atenuado a medida que o valor de x aumenta.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Os químicos utilizam o **potencial hidrogeniônico** (**pH**) para medir a acidez ou alcalinidade de uma solução. A água destilada possui um pH em torno de 7. Soluções com pH maior que 7 são classificadas como **básicas**, enquanto aquelas com pH menor que 7 são consideradas **ácidas**.

O pH de uma solução pode ser calculada através da seguinte função logarítmica:

$$f(x) = -\log x$$

em que x é a concentração de íons de hidrogênio, em mols por litro.

Com base nessa equação, determine o pH de uma solução cuja concentração de íons hidrogênio é $6 \cdot 10^{-5}$ mol/L.

Dados: $\log 2 \approx 0,301 \quad ; \quad \log 3 \approx 0,477$

Resolução

$$\begin{aligned} f(6 \cdot 10^{-5}) &= -\log\left(6 \cdot 10^{-5}\right) = -\left[\log 6 + \log 10^{-5}\right] \\ &= -\left[\log(2 \cdot 3) - 5 \cdot \cancel{\log 10}^{\,1}\right] = -\left[\log 2 + \log 3 - 5\right] \\ &\approx -(0,301 + 0,477 - 5) = -(-4,222) = 4,222 \end{aligned}$$

O pH da solução é aproximadamente 4,22, o que indica que a **solução é ácida**, pois **seu pH é menor que 7**.

atenção

***Professor(a),** nesses exercícios resolvidos buscamos mostrar algumas conexões com o conteúdo função logarítmica. É importante discutir com os alunos que, por mais que não usemos determinados conteúdos de forma direta na nossa vida, eles são importantes em outras áreas e para o desenvolvimento da Ciência, como um todo. É o caso da função logarítimica.*

EXERCÍCIO 2

A intensidade sonora percebida pelo ouvido humano, medida em decibéis (dB), é calculada pela seguinte função logarítmica:

$$f(x) = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Em que:

- x é a intensidade sonora no local da medição; e
- x_0 é a menor intensidade sonora perceptível ao ouvido humano.

No ambiente de trabalho, a NR-15 (Norma Regulamentadora 15) estabelece limites de exposição ao ruído, determinando o tempo máximo diário que um trabalhador pode ser submetido a determinada intensidade sonora sem risco de perda auditiva ocupacional. A tabela abaixo apresenta os níveis de ruído e seus respectivos tempos máximos de exposição permitidos pela norma:

NÍVEL DO RUÍDO (DB)	MÁXIMA EXPOSIÇÃO DIÁRIA
85	8 horas
90	4 horas
95	2 horas
100	1 hora
105	30 min
110	15 min
115	7 min

Agora, considere que um trabalhador opere uma britadeira que gera um ruído de intensidade equivalente a $10^{11} \cdot x_0$. Com base na equação logarítmica apresentada, determine o nível de ruído produzido pela britadeira e, de acordo com a NR 15, o tempo máximo diário que o trabalhador pode operar esse equipamento sem o uso de abafadores sonoros.

Resolução

$$f(10^{11} \cdot x_0) = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{11} \cdot \cancel{x_0}}{\cancel{x_0}}\right) = 10 \cdot 11 \cdot \cancel{\log 10}^{\,1} = 110$$

Para 110 dB, o tempo máximo de exposição diária permitido sem proteção auditiva é 15 minutos.

atenção

__Professor(a),__ este exercício resolvido pode ser uma oportunidade para discutir com os alunos sobre a importância de equipamentos de segurança em determinados trabalhos e sobre a importância dos cuidados com a saúde do trabalhador.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logarítmica.
- A função logarítmica. (p. 83 - 89)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.
- Função logarítmica. (p. 99 - 102).

VIDEOAULAS

Portal da OBMEP
Função Logaritmica

Professor(a),
nesse link você encontra três vídeos sobre Logaritmo. Eles podem ser um suporte para o estudo do aluno, caso considere necessário.

Atividades

ATIVIDADE 1

As funções f e g são dadas por $f(x) = 4 + log_3 x$ e $g(x) = log(x+6)$. Dessa forma, determine:

a) $f(1)$ =

d) $f(9) + g(-5)$ =

b) $g(4)$ =

e) x tal que $f(x) = 9$

c) $f(3)$ =

f) x tal que $g(x) = 2$

ATIVIDADE 2

Considere a função logarítmica $f(x) = log_a x$, onde a é a base do logaritmo.

Qual das alternativas abaixo descreve corretamente as principais características desta função logarítmica?

a) A função logarítmica possui domínio em $\mathbb{R}$, imagem em $\mathbb{R}$ e, para todas as bases $a > 1$, é uma função crescente.

b) A função logarítmica possui domínio em $x < 0$, imagem em $\mathbb{R}$ e, para todas as bases $a > 1$, é uma função crescente.

c) A função logarítmica possui domínio em $x > 0$ e imagem em $\mathbb{R}$ e, é decrescente quando $a > 1$ e crescente quando $0 < a < 1$.

d) A função logarítmica possui domínio em $x > 0$, imagem em $\mathbb{R}$ e, é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

e) A função logarítmica possui domínio em $x > 0$ e imagem em $\mathbb{R}$ e, para todas as bases $a > 0$, é uma função crescente, exceto quando $a = 1$.

ATIVIDADE 3

Classifique, cada função logarítmica a seguir em crescente ou decrescente.

$a)\ f(x) = log_9\, x$

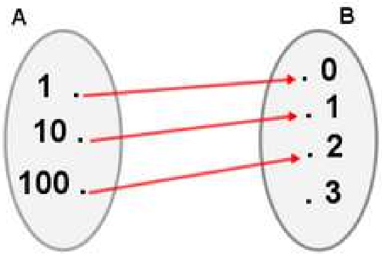
$c)\ y = log_{0,2}\, x$

$b)\ f(x) = log_{\frac{1}{5}}\, x$

$d)\ y = log\, x$

ATIVIDADE 4

Dados os conjuntos A = {1, 10, 100} e B = {0, 1, 2, 3}, considere uma função $g : A \rightarrow B$ definida por $g(x) = log\, x$, conforme apresentado no diagrama, determine:



a) Domínio D(g) e o conjunto imagem Im(g) da função.

b) o valor de *g(10)*.

c) O valor *x* para o qual *g(x) = 2*

ATIVIDADE 5

Determine os valores reais de *x* para os quais os logaritmos indicados em cada item podem ser definidos, ou seja, identifique o domínio da função.

$a) f(x) = log_5\, x$

$b) f(x) = log\, (x - 3)$

$c) f(x) = 5 + log_4\, 2x$

$d)\ f(x) = log_{\frac{1}{2}}\, (5x - 52)$

$e) f(x) = log_3\, (x^2 - 9)$

ATIVIDADE 6

(ENEM-2019) Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) ($\mu m \cdot Hz$)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3{,}9$
Ligeiro	$4{,}0 \leq M_s \leq 4{,}9$
Moderado	$5{,}0 \leq M_s \leq 5{,}9$
Grande	$6{,}0 \leq M_s \leq 9{,}9$
Extremo	$M_s \geq 10{,}0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3,3 + log(A \cdot f)$, em que *A* representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (µm) e *f* representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 µm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,30 como aproximação para log 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

a) Pequeno.
b) Ligeiro.
c) Moderado.
d) Grande.
e) Extremo.

ATIVIDADE 7

Em um financiamento de imóvel em uma instituição bancária, Carlos observou que, ao financiar o valor de R$ 200 000,00 com uma taxa de juros compostos de 8% ao ano, o valor final a ser pago seria de R$ 440 000,00. Esse valor pode ser modelado pela equação $V(t) = 200\,000 \cdot (1,08)^t$, onde *t* representa o tempo em anos e *V(t)* o valor total a ser pago ao final do financiamento. Mantendo essas condições e pagando as parcelas anualmente, sem antecipações, podemos determinar que o tempo, em anos, necessário para quitar o financiamento é um número que mais se aproxima de:

(Dados: $log\, 1,08 \approx 0,033$; $log\, 2,2 \approx 0,342$ **)**

a) 2 anos
b) 5 anos
c) 7 anos
d) 9 anos
e) 10 anos

ATIVIDADE 8

O pH é uma medida que indica o nível de acidez ou basicidade de uma solução, de acordo com a concentração de íons hidrogênio (H^+) presentes. Ele varia em uma escala de 0 a 14, onde valores abaixo de 7 representam soluções ácidas, como o suco de limão, e valores acima de 7 indicam soluções básicas, como a água sanitária. O valor 7 é considerado neutro, como na água pura.

Disponível em: <https://www.manualdaquimica.com/fisico-quimica/conceito-ph.htm#:~:text=A%20escala%20de%20pH%20vai,neutra%2C%20como%20a%20%C3%A1gua%20pura>. Acessado em: 20/12/2024.

Para o cálculo do pH se usa a expressão pH = −log [H^+], em que [H^+] é a concentração de íons de hidrogênio em mol/litro. Ao analisar uma solução de café, um químico verificou que a concentração de íons de hidrogênio na solução era de $10^{-5}\,mol/l$.

a) Qual é o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução de café?

b) O cafézinho analisado pelo químico é uma solução neutra, básica ou ácida?

ATIVIDADE 9

O valor do imposto pago por uma empresa, denotado por *V* (em milhares de reais), em função do tempo *t* (em meses), é dado pela função:

$$V(t) = log_2\,(t+4)$$

a) Determine o valor do imposto que será pago pela empresa daqui a 4 meses.

b) Determine o tempo *t* no qual a empresa pagará R$ 6 000,00 de imposto.

ATIVIDADE 10

A velocidade máxima, em bits por segundo com a qual os sinais podem passar por canais de comunicação pode ser obtida por meio da fórmula $V_{max} = 3\,400 \cdot lo_2\,(x+1)$, em que 3 400 hertz é a frequência limite da voz humana e *x* está relacionado a potencia do sinal, medida em Decibéis-miliwatt (dBm). Calcule a potência do sinal correspondente a uma velocidade máxima de 27 200 bits por segundo.

Gabarito

ATIVIDADE 02: D
ATIVIDADE 06: C
ATIVIDADE 07: E

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Considerando as funções logarítmicas $f(x) = 4 + log_3 x$ e $g(x) = log\,(x+6)$, teremos:

$a)\ f(1) = 4 + log_3 1 = 4 + 0 = 4$

Lembrando que, o logaritmo de 1 na base 3 é o expoente x tal que 3 elevado a x resulte em 1.
$3^x = 1 \quad 3^x = 3^0 \quad x = 0$

$b)\ g(4) = log(4+6) = log\,10 = 1$

$c)\ f(3) = 4 + log_3 3 = 4 + 1 = 5$

$d)\ f(9) + g(-5) \Rightarrow 4 + log_3 9 + log(-5+6) \Rightarrow 4 + 2 + log\,1 = 6 + 0 = 6$

$e)\ f(x) = 9 \Leftrightarrow 4 + log_3 x = 9 \Rightarrow log_3 x = 9 - 4 \Leftrightarrow log_3 x = 5$

Logo, fazemos a exponencial inversa de log: $3^5 = x \therefore x = 243.$

$f)\ g(x) = 2 \Leftrightarrow log(x+6) = 2, logo: 10^2 = (x+6) \Rightarrow 100 = x+6 \therefore x = 100-6 = 94$

ATIVIDADE 2

A alternativa correta é **LETRA D**. A função logarítmica possui domínio em *x > 0*, imagem em $\mathbb{R}$ (todos os números reais) e é crescente quando *a > 1* e decrescente quando *0 < a < 1*.

Justificativa:

- O domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, *x* > 0, pois o logaritmo de números negativos ou zero não está definido.
- A imagem da função logarítmica é $\mathbb{R}$, ou seja, ela pode gerar qualquer número real.
- A função é crescente quando a base *a > 1*, porque à medida que *x* aumenta, o valor de $f(x) = log_a x$ também aumenta. Já quando *0 < a < 1*, a função é decrescente, pois à medida que *x* aumenta, o valor de $f(x) = log_a x$ diminui.

ATIVIDADE 3

A função logarítmica é definida por $f(x) = log_a\, x$ e, quando a base *a* > *1* a função é crescente e quando *0* < *a* < *1*, a função é decrescente, logo analisando os itens teremos:

$a)\ f(x) = log_9\, x$ A base *a* = *9*, logo *a* > *1*, função crescente.

$b)\ f(x) = log_{\frac{1}{5}}\, x$ A base $a = \dfrac{1}{5}$, logo *0* < *a* < *1*, função decrescente.

$c)\ y = log_{0,2}\, x$ A base $a = 0,2$, logo *0* < *a* < *1*, função decrescente.

$d)\ y = log\, x$ A base *a* = *10*, logo *a* > *1*, função crescente.

ATIVIDADE 4

Considere uma função $g : A \rightarrow B$ definida por $g(x) = log\, x$, teremos:

a) O domínio da função: *D(g)* = {1, 10, 100} e o Conjunto imagem *Im(g)* = {0, 1, 2}.

b) O valor de *g(10)* = 1

c) O valor de *x* para o qual *g(x)* = 2 é 100, pois *g(100)* = 2.

ATIVIDADE 5

Pela definição, o domínio de uma função $f(x) = log_a\, x$ está definido somente para valores positivos de *x*, ou seja, *x* > *0*, independentemente do valor da base *a* (desde que *a* > *0* e *a* ≠ *1*), portanto:

a) Para a função $f(x) = log_5\, x$, a função está bem definida para x > 0, ou seja, *D(f)* = { $x \in \mathbb{R}^*_+$ }

b) Para a função $f(x) = log(x-3)$, teremos a condição de existência:
$(x-3) > 0 \Rightarrow x > 0 + 3 \Rightarrow x > 3$, logo: $D(f) = \{x \in R / x > 3\}$

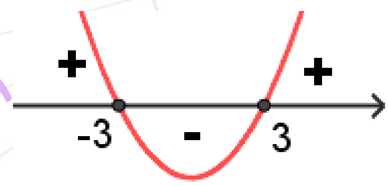
c) Para a função $f(x) = 5 + log_4\, 2x$, teremos a condição de existência:
$2x > 0 \Rightarrow x > \dfrac{0}{2} \Rightarrow x > 0$ Logo: $D(f) = \{x \in R / x > 0\}$

d) Para a função $f(x) = log_{1/2}(5x - 52)$, teremos a condição de existência:
$(5x - 52) > 0 \Rightarrow 5x > 0 + 52 \Rightarrow x > \dfrac{52}{5}$ Logo: $D(f) = \left\{ x \in R / x > \dfrac{52}{5} \right\}$

e) Para a função $f(x) = log_3(x^2 - 9)$, teremos a condição de existência:
$(x^2 - 9) > 0$ Resolvendo a equação, teremos: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

As raízes são **x = 3** e **x = - 3.**

Fazendo o estudo do sinal, onde *f(x)* > 0



Os valores que satisfazem a condição de existência do domínio são, x < - 3 e x > 3.
Logo, o domínio da função é:
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x < -3\ e\ x > 3\}$

ATIVIDADE 6

Para calcular a magnitude local *M* do terremoto, utilizando a fórmula fornecida e substituímos *A* = 2 000 µm e *f* = 0,2 Hz

$M = 3,3 + log\,(2\,000 \cdot 0,2) \Rightarrow M = 3,3 + log\,400$

Utilizando a propriedade do logaritmo de um produto, é possível resolver o *log 400*:

$log\,400 \Rightarrow log(4 \cdot 100) \Rightarrow log\,4 + log\,100 \Rightarrow log\,2^2 + log 100 \Rightarrow 2 \cdot log\,2 + log\,100$

Considerando que $log\,2 \approx 0,30$, teremos: $2.(0,30) + 2 \Rightarrow 0,60 + 2 = 2,60$

Voltando com a função, teremos:

$$M_s = 3,3 + log 400 \Rightarrow M_s = 3,3 + 2,60 \Rightarrow M_s = 5,90$$

Portanto, analisando a tabela é possível observar que 5,90 corresponde a um terremoto moderado, logo a resposta correta é a **LETRA C**

ATIVIDADE 7

A pergunta pede para determinar o número total de anos *t* necessários para que o valor final *V(t)* do financiamento seja igual a R$ 440.000,00. Para isso utilizaremos a equação: $V(t) = 200\,000 \cdot (1,08)^t$

Vamos resolver a equação para *t,* substituindo *V(t)* = 440 000.

$$440\,000 = 200\,000 \cdot (1,08)^t \Rightarrow \frac{440\,000}{200\,000} = (1,08)^t \Rightarrow 2,2 = (1,08)^t$$

Agora, sabemos que $2,2 = (1,08)^t$ equivale a: $log_{1,08}\,2,2 = t \therefore t = log_{1,08}\,(2,2)$

Ao realizar a mudança de base para a base 10 e considerando que log 2,2 ≈ 0,342 e log 1,08 ≈ 0,033, obtemos:

$$t = log_{1,08}\,(2,2) = \frac{log\,2,2}{log\,1,08} = \frac{0,342}{0,033} \approx 10,36$$

Assim, o tempo, em anos, necessário para quitar o financiamento está mais próximo de 10 anos.

Portanto, a alternativa correta é a **LETRA E.**

Lembrete ao(a) Professor(a): Alguns autores resolvem esta questão aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação para isolar o valor de *t*. Para simplificar o cálculo, adotamos as aproximações log 2,2 ≈ 0,342 e log 1,08 ≈ 0,033. Logo teríamos:

$$log\,2,2 = log\,(1,08)^t \Rightarrow t \cdot log\,(1,08) = log\,2,2 \Rightarrow t = \frac{log\,2,2}{log\,1,08} = \frac{0,342}{0,033} \approx 10,36$$

ATIVIDADE 8

Utilizando a expressão pH = −log [H+], teremos:
a) Para a concentração de íons de hidrogênio na solução de $10^{-5}\ mol/l$, iremos substituir [H+] na expressão e utilizar a propriedade do logaritmo de uma potência:

$$pH = -log[H^+] \Rightarrow pH = -log10^{-5} \Rightarrow pH = -(-5) \cdot log\,10$$

$$pH = 5.1 = 5$$

b) O pH encontrado do cafezinho foi 5. Considerando que a escala de pH varia de 0 a 14, e que valores abaixo de 7 indicam soluções ácidas, podemos concluir que o café é uma solução ácida.

ATIVIDADE 9

Utilizando a função, $V(t) = log_2\,(t+4)$ teremos:

a) Substituímos *t* = 4 na função *V(t)*:

$$V(t) = log_2(t+4) \Rightarrow V(4) = log_2(4+4) \Rightarrow V(4) = log_2\,8 = 3$$

Como o valor do imposto pago é denotado em milhares de reais, teremos:
3 . 1 000 = 3 000, ou seja, 3 mil reais.

b) Sabemos que o imposto pago será *V(t)* = 6 mil reais. Logo, a equação fica:

$$6 = log_2(t+4)$$

Para resolver essa equação, aplicamos a definição de logaritmo para reescrevê-la na forma exponencial:

$$6 = log_2(t+4) \Rightarrow 2^6 = (t+4) \Rightarrow 64 = t+4 \therefore t = 64 - 4 = 60$$

Portanto, o tempo necessário para que a empresa pague R$ 6 000,00 de imposto é: **t = 60 meses.**

ATIVIDADE 10

A fórmula geral para calcular a velocidade máxima de transmissão de sinais *V* (em bits por segundo) é dada por: $V_{max} = 3\,400 \cdot lo_2\,(x+1)$ e substituímos $V_{max} = 27\,200$ na equação:

$$\begin{array}{l} V_{max} = 3\,400 \cdot lo_2\,(x+1) \\ 27\,200 = 3\,400 \cdot log_2\,(x+1) \end{array} \Rightarrow \frac{27\,200}{3\,400} = log_2\,(x+1) \Rightarrow 8 = log_2(x+1)$$

Para resolver essa equação, aplicamos a definição de logaritmo para reescrevê-la na forma exponencial:

$$2^8 = x+1 \Rightarrow 256 = x+1 \therefore x = 256 - 1 = 255$$

Portanto, a potência representada por *x* corresponde a uma velocidade máxima de 27 200 bits por segundo é: **x = 255 dBm** (Decibéis-miliwatt)

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática: funções e progressões.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

______. **Matemática Completa 1º ano**. 4. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

Chavante, Eduardo. **Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio.** 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

______. **Matemática: contexto & aplicações. 3**. ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.** 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: matemática ciência e aplicações, 1.** 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Referências

ATIVIDADES

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.** Matemática e suas tecnologias - ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: funções e progressões.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

GOV.BR. **Ministério da Educação - INEP**. Provas e Gabaritos. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 27/12/2024.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

SILVA, Everton da Paz. **Manual da Química. pH**. Disponível em: <https://www.manualdaquimica.com/fisico-quimica/conceito-ph.htm#:~:text=A%20escala%20de%20pH%20vai,neutra%2C%20como%20a%20%C3%A1gua%20pura>. Acessado em: 20/12/2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Funções e suas aplicações**. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO LOGARÍTMICA: ANÁLISE GRÁFICA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT305 Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	• Construir e interpretar gráficos de funções logarítmicas, reconhecendo como alterações na base e nos parâmetros impactam a forma da curva. • Resolver problemas envolvendo funções logarítmicas em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	Não há descritor relacionado.

Contextualização

Até agora, você viu como os logaritmos ajudam a interpretar fenômenos do mundo real, como terremotos, intensidade sonora e pH. Mas, e se pudéssemos ir além e modificar essas funções para que se ajustem a diferentes contextos? Como pequenas alterações na equação afetam o comportamento do gráfico e a maneira como os dados são representados?

Assim como uma escala pode ser ajustada para medir diferentes intensidades, as funções logarítmicas podem ser transformadas para responder a diferentes necessidades. Algumas mudanças tornam a curva mais suave ou mais acentuada, outras deslocam o gráfico para um lado ou para cima, e algumas até invertem sua direção. Essas variações são essenciais para modelar fenômenos que não seguem um padrão fixo, permitindo adaptações para diferentes contextos.

Vamos explorar essas questões analisando as transformações das funções logarítmicas e o impacto de cada coeficiente na forma do gráfico. Entender essas mudanças nos ajudará a interpretar dados com mais precisão e flexibilidade, ampliando nossa compreensão sobre como o mundo funciona. Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

INTRODUÇÃO

Dando continuidade ao nosso estudo de funções matemáticas, chegamos às funções logarítmicas. Assim como as funções exponenciais, essas funções possuem um comportamento específico e apresentam diversas aplicações no cotidiano. **Nosso objetivo neste material é compreender a construção e a análise de seus gráficos, observando as características que se manifestam em qualquer função logarítmica e como os parâmetros influenciam seu comportamento**.

Embora já tenhamos introduzido a relação entre funções exponenciais e logarítmicas, exploraremos esse vínculo com mais detalhes no próximo material. Por ora, vamos nos concentrar na estrutura das funções logarítmicas e como elas se comportam graficamente.

ANÁLISE GRÁFICA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA CRESCENTE

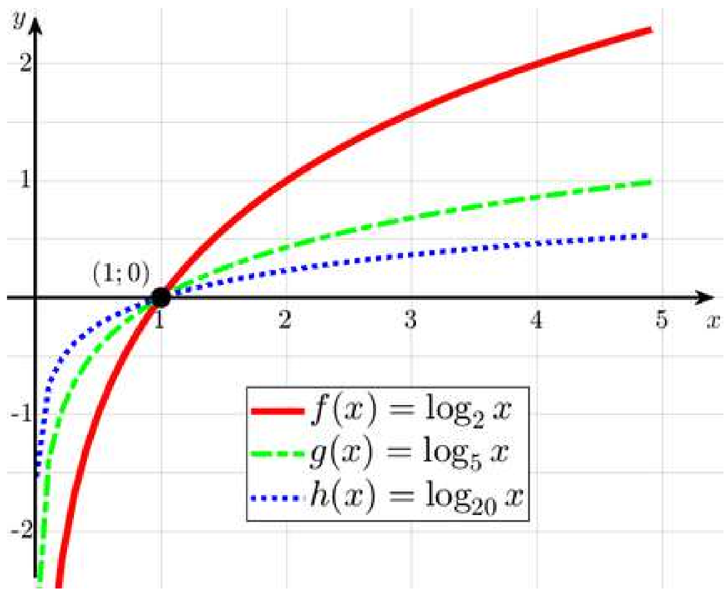


Figura 1: Gráfico de funções logarítmicas crescentes com diferentes bases.

Quando a base a é maior que 1, a função logarítmica $\log_a x$ é crescente, ou seja, conforme x aumenta, $f(x)$ também cresce.

Na figura 1, temos os gráficos de algumas funções logarítmicas crescentes. Observe que $f(x) = \log_2 x$ cresce mais rapidamente do que as demais funções. Isso ocorre porque, para atingir um mesmo valor de x, é necessário um expoente maior em bases menores do que em bases maiores. Como consequência, a curva da função se eleva mais rapidamente. Por outro lado, à medida que a base aumenta, o gráfico se torna mais achatado e o crescimento ocorre de forma mais lenta.

ANÁLISE GRÁFICA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA DECRESCENTE

Na figura 2, são apresentados os gráficos de algumas funções logarítmicas decrescentes. Diferente das funções logarítmicas crescentes, aqui a base está no intervalo $0 < a < 1$, o que inverte o sentido do crescimento. Isso significa que, à medida que x aumenta, $f(x)$ diminui.

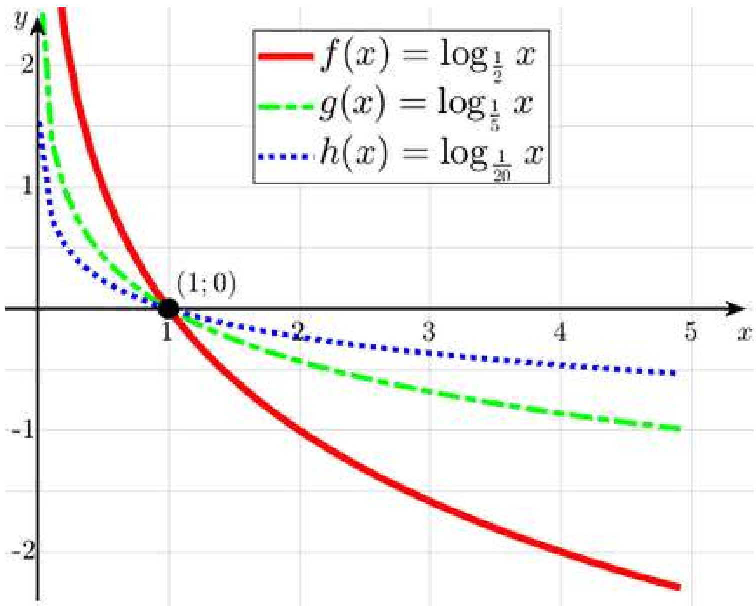


Figura 2: Gráfico de funções logarítmicas decrescentes com diferentes bases.

Observe que, quanto maior a base, mais acentuada é a queda da função. Isso ocorre porque, para atingir um mesmo valor de x, é necessário um expoente menor em bases menores do que em bases maiores. Como consequência, funções com bases próximas de zero decaem mais suavemente, enquanto aquelas com bases próximas de 1 apresentam uma queda mais rápida e um gráfico **menos achatado**.

FUNÇÃO DO TIPO LOGARÍTMICA

Até então nos debruçamos sobre a função logarítmica básica. No entanto, em diversas aplicações, essa função pode ser modificada por meio de transformações lineares, resultando em expressões mais gerais, que são denominadas de **função do tipo logarítmica**, como, por exemplo, a seguinte função:

$$f(x) = b \cdot \log_a (k \cdot x + c) + d, \qquad \text{em que } (k \cdot x + c) > 0$$

em que, além da base a, cada coeficiente b, c, d e k influenciam na função do tipo logarítmica como descrito a seguir:

- b: o seu valor absoluto controla o achatamento/estiramento vertical da função e, se negativo, ocorre uma reflexão em relação ao eixo x;
- c: desloca o gráfico horizontalmente, lembrando que $(k \cdot x + c) > 0$, portanto, o valor de c influenciará diretamente no domínio da função do tipo logarítmica, podendo, em decorrência disso, x assumir valores negativos;
- d: desloca o gráfico verticalmente; e
- k: multiplica ou divide o valor de x, e, consequentemente, acelera ou retarda a progressão da função para um determinado valor de entrada.

A seguir, analisamos essas transformações com o auxílio de gráficos que ilustram o impacto de cada parâmetro.

1ª Análise

Observe os gráficos representados nas figuras 3 e 4.

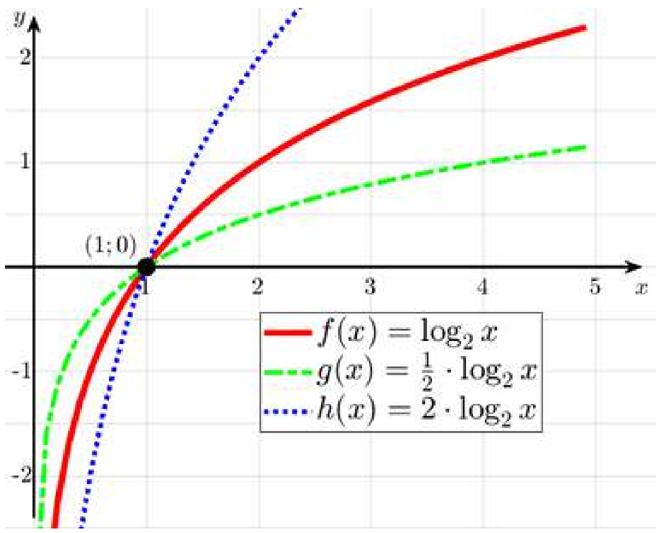


Figura 3: Compressão vertical por influência do valor absoluto do coeficiente b.

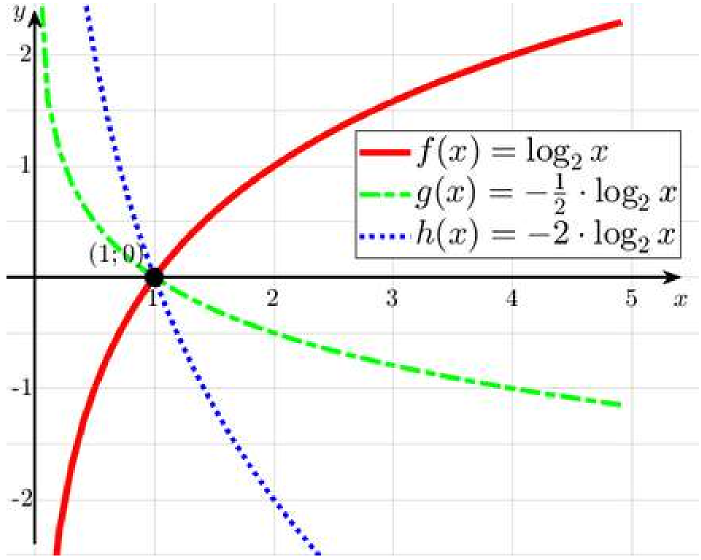


Figura 4: Reflexão da função em decorrência do sinal do coeficiente b.

Podemos verificar, nas figuras 3 e 4, que o coeficiente b multiplica o logaritmo e afeta a inclinação da curva. Valores $|b| > 1$ fazem a curva crescer mais rapidamente, enquanto $0 < |b| < 1$ tornam o crescimento mais lento. Podemos perceber, também, que estas funções passam pelo mesmo ponto $(1; 0)$, evidenciando que o valor deste coeficiente não altera a raiz da função original. Além disso, quando o sinal deste coeficiente é negativo, a função é refletiva em relação ao eixo x, invertendo, em decorrência disto, o comportamento de crescimento/decrescimento da função.

2ª Análise

Observe o gráfico representado na figura 5.

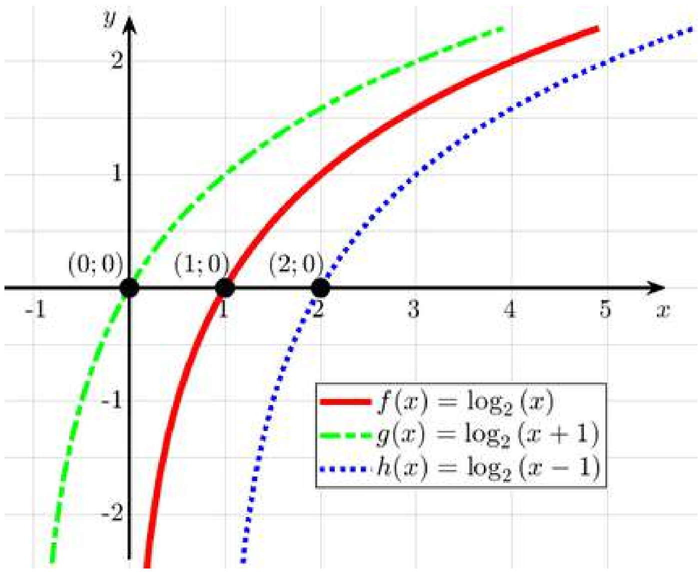


Figura 5: Deslocamento horizontal por influência do coeficiente c.

Na figura 5, podemos observar que o parâmetro c provoca um deslocamento horizontal da função ao longo do eixo x, movendo a assíntota vertical para $x = -c$. Os pontos destacados evidenciam a influência desse coeficiente, demonstrando que tanto a raiz da função original quanto a assíntota são deslocadas na mesma medida.

3ª Análise

Observe o gráfico representado na figura 6.

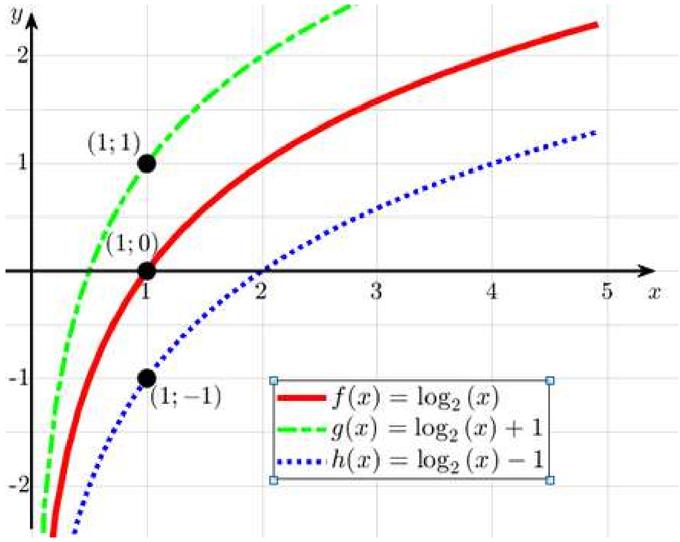


Figura 6: Deslocamento vertical por influência do coeficiente d.

O coeficiente d, como podemos verificar na figura 6, provoca um deslocamento vertical da curva sem alterar sua forma. Os pontos destacados evidenciam essa mudança de posição ao longo do eixo y, refletindo o impacto direto desse coeficiente. Esse deslocamento é uniforme e afeta todos os pontos do gráfico da mesma maneira.

4ª Análise

Observe o gráfico representado na figura 7.

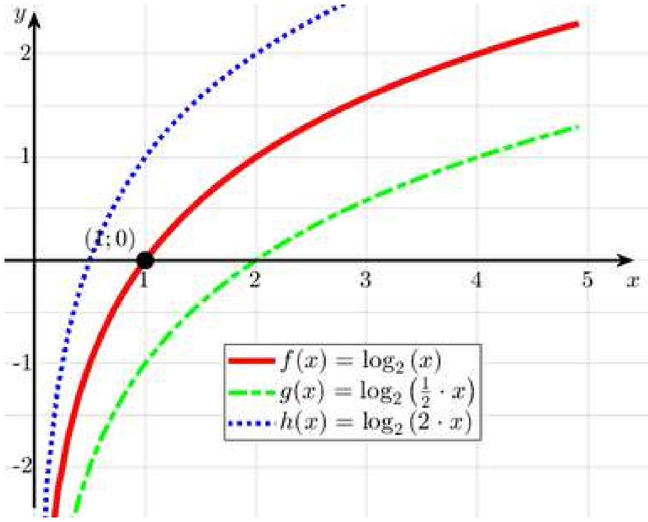


Figura 7: Deslocamento horizontal por influência do coeficiente k .

A multiplicação da variável x por um fator altera a taxa de crescimento da função, como ilustrado na figura 7. Quando x é multiplicado por um valor maior que 1, o gráfico original é comprimido horizontalmente, tornando-se mais inclinado. Por outro lado, quando x é multiplicado por um valor entre 0 e 1, o gráfico se expande horizontalmente, resultando em um crescimento mais lento.

atenção

***Professor(a),** esta seção do material aborda as transformações nas funções e tem como objetivo auxiliar na interpretação de gráficos, analisando como mudanças na base e nos parâmetros afetam a forma da curva. Os exemplos apresentados podem ser utilizados conforme a necessidade do professor, mas a discussão também pode ser conduzida de outras maneiras, como por meio da resolução de exercícios. Assim, este material serve como um suporte para enriquecer o ensino desse conteúdo.*

Exercícios Resolvidos

Exercício 1

Considere as seguintes funções logarítmicas:

$$f(x) = \log_3 x \qquad g(x) = \log_{\frac{5}{2}} x \qquad h(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$$

$$m(x) = \log_{0,25} x \qquad n(x) = \log_5 x \qquad o(x) = \log_{0,99} x$$

e responda:

a) Quais as funções crescentes e qual delas é a que cresce mais rapidamente em relação ao crescimento de x?

b) Quais as funções decrescente e qual delas decresce mais rapidamente em relação ao crescimento de x?

Resolução

a) As funções crescentes são as que tem a base maior que 1. Portanto, das funções apresentadas, $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ (pois $\frac{5}{2} = 2,5$) e $n(x) = \log_5 x$ são crescentes.

Entre elas, $g(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ cresce mais rapidamente, pois quanto menor a base (desde que maior que 1), mais rapidamente a função cresce.

b) As funções logarítmicas são decrescentes quando a base está entre 0 e 1. Assim, as funções $h(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$ (pois $\frac{2}{5} = 0,4$), $m(x) = \log_{0,25} x$ e $o(x) = \log_{0,99} x$ são decrescentes.

Entre elas, $o(x) = \log_{0,99} x$ decresce mais rapidamente, pois, quanto maior a base dentro do intervalo] 0,1 [, mais rápido a função diminui.

Exercício 2

O nível de intensidade sonora e o cálculo do pH de uma solução são dois exemplos de aplicações da função logarítmica na Ciência. Suas funções podem ser dadas por:

1. Intensidade sonora:

$$\boldsymbol{f(x) = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{x_0}\right)}$$

Em que:

- x **é a intensidade sonora no local da medição; e**
- x_0 **é a menor intensidade sonora perceptível ao ouvido humano.**

2. Cálculo do pH:

$$g(x) = -\log x$$

em que x é a concentração de íons de hidrogênio, em mols por litro.

Com isto, identifique o valor dos coeficientes que multiplicam o logaritmo em cada equação e explique a sua influência no comportamento da função.

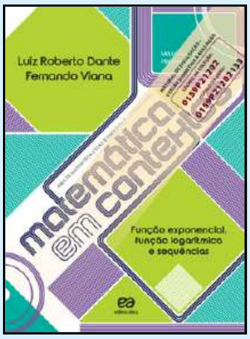
Resolução

Na equação da intensidade sonora, o coeficiente é 10, o que provoca uma dilatação vertical do gráfico, multiplicando seus valores por 10. Isso faz com que a curva cresça mais rapidamente em comparação à função logarítmica básica de base 10, mantendo a mesma estrutura, mas com valores ampliados.

Na equação do pH, o coeficiente é -1, o que causa uma reflexão vertical da função, invertendo seus valores em relação ao eixo x. Como a função logarítmica básica de base 10 é crescente, a presença desse coeficiente transforma seu comportamento em decrescente, sem alterar sua assíntota ou deslocamento horizontal.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logaritmica.
- Tecnologias digitais. (p. 90 - 96)
- Conexões. (p. 97 - 103)

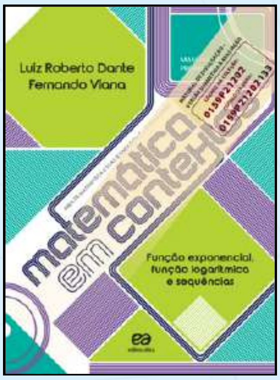
Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.
- Função logarítmica. (p. 99 - 102).

CONEXÕES

A audição e a função do tipo logarítmica

Professor(a),
no livro Matemática em Contextos: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE; VIANA, 2020), das páginas 97 a 100, há textos e questões para debate sobre o a relação entre a audição e a função do tipo logarítmica.



Atividades

ATIVIDADE 1

Seja *f* uma função logarítmica definida de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = log_4\, x$. Para cada item faça o que se pede: .

Considere que: $log\, 2 \approx 0,30$

a) Calcule o valor de $f\left(\frac{1}{4}\right)$, *f(1)*, *f(2)* e *f(4)*.

b) Com base nos valores de *x* e *y* obtidos nos itens anteriores, organize os pares ordenados (*x, y*) e construa o gráfico da função *f(x)* em seu caderno.

c) Com base no gráfico do item b, que representa uma função logarítmica, analise o comportamento dos valores de *f(x)* à medida que *x* aumenta.

ATIVIDADE 2

Com base nas características do gráfico da função logarítmica $f(x) = log_a\, x$, qual das alternativas abaixo está **incorreta**?

a) A função logarítmica possui uma assíntota vertical em *x* = *0*, ou seja, as curvas dos gráficos se aproxima do eixo *y*, mas não o tocam.

b) A taxa de crescimento de uma função logarítmica é muito mais lenta que a de funções lineares, quadráticas ou exponenciais.

c) Para *0 < a < 1* a função é decrescente, ou seja, a medida que *x* aumenta, o valor de *f(x)* diminui.

d) A função sempre passa pelo ponto (1, 0), independentemente da base *a*.

e) A função sempre passa pelo ponto (0, 1), independentemente da base *a*.

ATIVIDADE 3

Construa o gráfico de cada uma das funções dada a seguir:

$a) f(x) = log_{\frac{1}{10}}(x)$

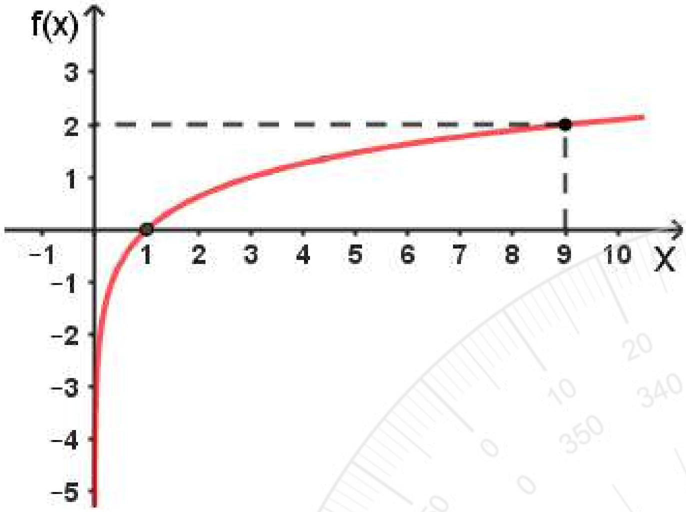
$b)\ f(x) = log_3\,(x+4)$

$c) f(x) = 3 + log_2(x)$

$d) f(x) = 3 \cdot log_2(x)$

ATIVIDADE 4

Observe abaixo o gráfico da função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.



Qual é a lei de formação dessa função?

$a)\ f(x) = -3 \cdot log_3\,x$

$b)\ f(x) = 3 \cdot log_3\,x$

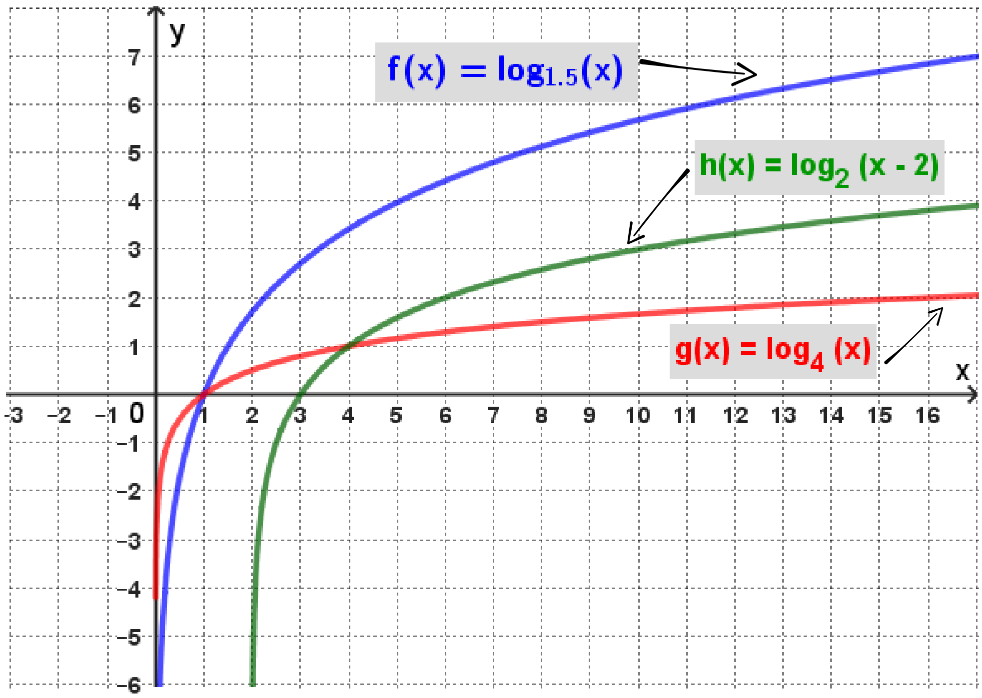
$c)\ f(x) = log_3\,x$

$d)\ f(x) = log_{\frac{1}{3}}\,x$

$e)\ f(x) = log_3\,(x+2)$

ATIVIDADE 5

Abaixo no plano cartesiano estão representados as funções reais *f(x), g(x) e h(x)*.



Considerando as representações gráficas de cada uma dessas funções no plano cartesiano, com suas respectivas leis de formação, marque "V" para as afirmações verdadeiras e "F" para as falsas nas frases dadas a seguir:

a) (   ) As funções *f(x)* e *g(x)* possuem a mesma taxa de crescimento porque ambas têm base maior que 1.

b) (   ) A função *f(x)* tem uma taxa de crescimento mais rápida do que a função *g(x)*. Isso ocorre porque, em uma função logarítmica crescente, quanto menor a base *a* do logaritmo, maior é a taxa de crescimento da função.

c) (   ) A função *h(x)* tem uma assíntota vertical em $x = 2$. Já a função *g(x)* tem assíntota vertical em $x = 0$.

d) (   ) As funções *f(x)*, *g(x)* e *h(x)* têm um ponto em comum, pois todas interceptam o eixo *x* no ponto de coordenadas (1, 0).

e) (   ) As funções *h(x)* e *g(x)*, se interceptam no ponto de coordenadas (4, 1)

f) (   ) A função *f(x)* possui uma assíntota vertical em $x = 0$.

g) (   ) A função *h(x)* é definida apenas para valores de *x* maiores que 2.

h) (   ) Na função *g(x)*, temos que $g(16) = 2$ e na função *h(x)*, temos que $h(10) = 3$.

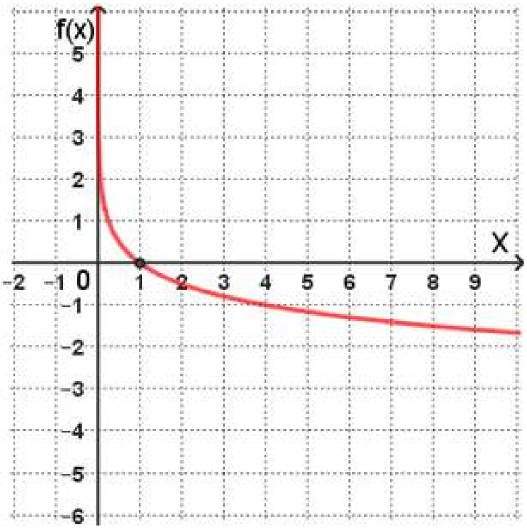
i) (   ) Na função *f(x)*, temos que $f(0) = -6$.

ATIVIDADE 6

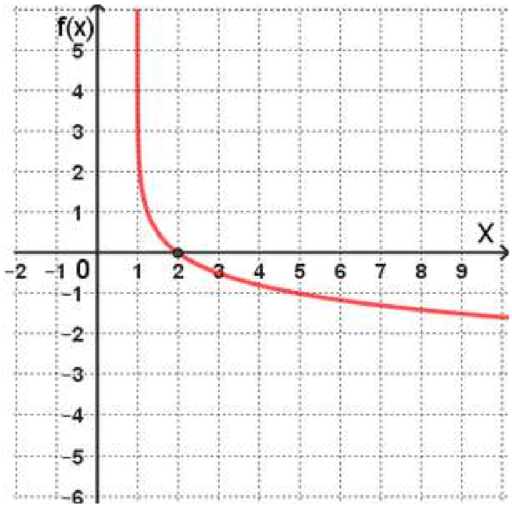
Qual é o gráfico que representa a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\boxed{f(x) = log_{\frac{1}{4}}(x-1)}$$

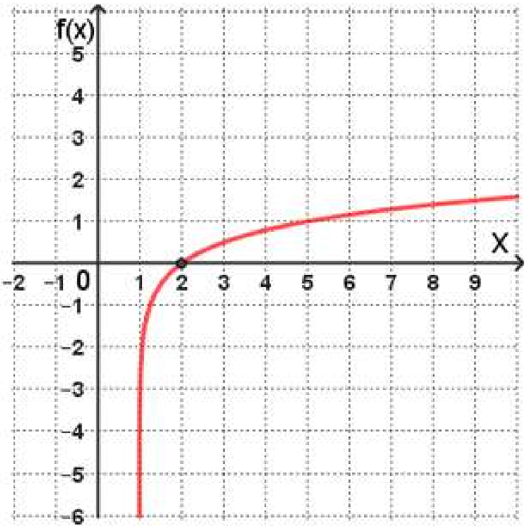
a)



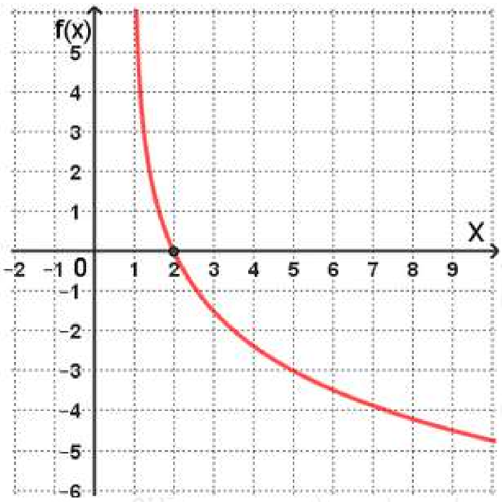
b)



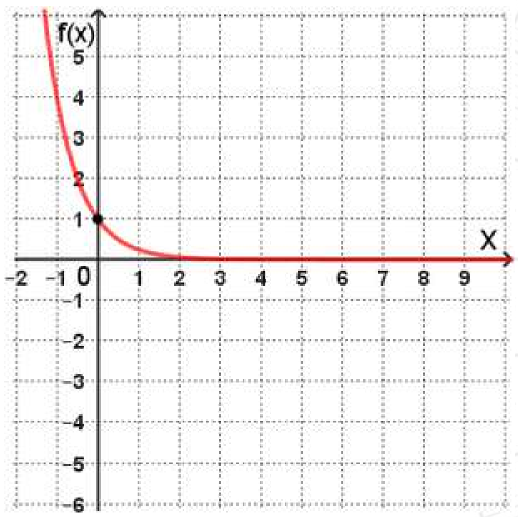
c)



d)



e)



ATIVIDADE 7

O aquecimento de um forno de precisão será feito de modo que sua temperatura *T*, em graus Celsius (ºC), será controlada para variar de acordo com a função $T = 30 \cdot log_2 (3t+1) + 25$, sendo *t* o tempo, em minutos, decorridos desde o início do aquecimento.

a) Qual a temperatura do forno no instante em que é iniciado o aquecimento?

b) Qual a temperatura do forno 5 minutos após o inicio do aquecimento?

c) Após quantos minutos a temperatura atingirá 205 ºC?

ATIVIDADE 8

Teste do bafômetro: qual o limite de tolerância?

Dirigir sob efeito de álcool é crime e, no Brasil, a política é de tolerância zero para quem dirige alcoolizado, ou seja, não é permitido consumir sequer uma gota de álcool antes de dirigir. O bafômetro, utilizado para medir a quantidade de álcool no organismo é preciso, mas pode apresentar falhas, justificando uma margem de erro. Segundo a Resolução nº 432/2013 do Contran, a margem de erro permitida é de 0,04 mg/l de álcool no ar expelido.

Margem do Contran que define presença de álcool no organismo como crime de trânsito.	
Até 0,04 mg/l	Sem penalidades. Está dentro da margem de erro estabelecida pelo Contran.
de 0,05 mg/l a 0,33 mg/l	Infração gravíssima com multa de R$ 2934,70.
Igual ou superior a 0,34 mg/l	Enquadra-se como crime de trânsito, e o condutor responderá criminalmente

Disponível em: <https://autoesporte.globo.com/mobilidade/noticia/2024/02/teste-do-bafometro-qual-o-limite-de-tolerancia.ghtml>. Acessado em 24/12/2024.

Supondo que, após o consumo de uma quantidade considerável de bebida alcoólica, o nível de álcool no sangue de uma pessoa diminua a uma taxa constante a cada hora, e que esse processo pode ser modelado pela função $f(x) = \dfrac{14 + 10 \cdot log\, x}{3}$, onde *x* representa a quantidade inicial de álcool no sangue, medida em miligramas por litro, e *f(x)* é uma função que descreve o tempo, em horas, necessário para que uma pessoa, após parar de beber, se recupere da intoxicação e atinja o nível mínimo de álcool no sangue.

Considerando que, após interromper o consumo de bebida alcoólica, o motorista mediu seu nível de álcool no sangue e obteve o valor de 2,5 mg/l, qual será o tempo, em horas, necessário para que ele esteja apto a dirigir, levando em consideração o limite máximo indicado na margem de erro, conforme apontado pelo Contran nas medições feitas por bafômetro? **(Dados:** $log\,(2,5) \approx 0,40;\ log\, 5 \approx 0,70$ **)**

ATIVIDADE 9

A intensidade sonora é medida em uma unidade chamada decibel (dB). Quando uma pessoa escuta música através de fones de ouvido, os níveis de pressão sonora podem variar entre 85 dB e 110 dB, dependendo do volume do dispositivo e das condições do ambiente. No entanto, é fundamental ter cuidado com volumes excessivos, pois a exposição prolongada a níveis sonoros elevados pode resultar em danos permanentes à audição.

O nível sonoro de um ambiente, expresso em decibéis (dB), pode ser calculado pela Lei de Weber-Fechner, dada pela fórmula:

$$N = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

onde N é o nível de pressão sonora em decibéis (dB), I é a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado (W/m²), e I_0 é a intensidade de referência, equivalente a 10^{-12} W/m².

Calculando o nível sonoro em decibéis de um fone de ouvido cuja intensidade sonora seja 10^{-3} W/m², encontramos que o nível de pressão sonora é de:

a) 30 dB
b) 80 dB
c) 90 dB
d) 120 dB
e) 150 dB

ATIVIDADE 10

O altímetro é um instrumento de bordo das aeronaves responsável por medir a pressão atmosférica estática e indicar a altitude da aeronave. Ele é calibrado de acordo com o modelo internacional padronizado de pressão atmosférica e temperatura, garantindo precisão nas leituras durante o voo.

Disponível em: <https://www2.anac.gov.br/anacpedia/por_esp/tr3628.htm>. Acessado em: 23/12/2024.

Suponha que a altitude *h* acima do nível do mar, em quilômetro, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica *p*, em atm, por:

$$h(p) = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$$

Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,5 atm. Considerando a aproximação $log_2 \approx 0,30$, a altitude *h* do avião nesse instante, em quilômetro, era de :

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 14

Gabarito

ATIVIDADE 02: E
ATIVIDADE 04: C
ATIVIDADE 06: B
ATIVIDADE 09: C
ATIVIDADE 10: B

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Considerando a função logarítmica definida em $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = log_4\, x$, para cada item teremos:

a) $f\left(\frac{1}{4}\right) = log_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1$ pois, sabemos que: $4^{-1} = \frac{1}{4}$

$$f(1) = log_4\, 1 = 0$$

Para realizar o calculo de $f(2) = log_4\, 2$, utilizaremos as propriedades de Logaritmo e iremos considerar o valor aproximado $log\, 2 \approx 0,30$.

$$f(2) = log_4\, 2 = \frac{log\, 2}{log\, 4} = \frac{log\, 2}{log\, 2^2} = \frac{log\, 2}{2 \cdot log\, 2} = \frac{0,30}{2 \cdot (0,30)} = \frac{0,30}{0,60} = 0,5$$

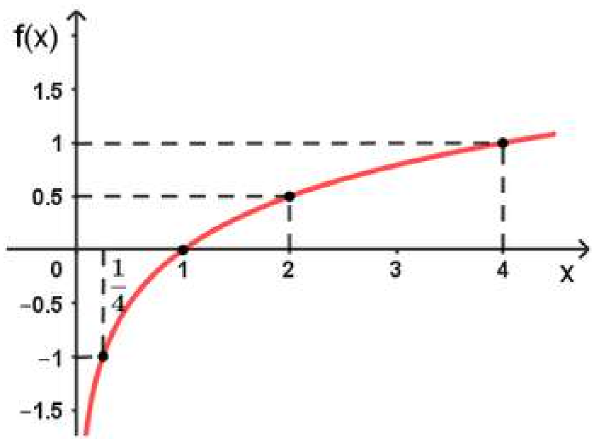
$$f(4) = log_4\, 4 = 1$$

Outra possibilidade:
Resolvendo através da definição de logaritmo e com noção de equação exponencial.

$$log_4\, 2 = x$$
$$4^x = 2$$
$$(\cancel{2}^2)^x = \cancel{2}^1$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2} = 0,5$$

b) Com base nos valores de x e y obtidos nos itens anteriores, teremos:

x	f(x)	(x , y)
$\frac{1}{4}$	-1	$\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
1	0	(1, 0)
2	0,5	(2; 0,5)
4	1	(4, 1)



c) Analisando o gráfico, é possível dizer que, quando *x* aumenta, o valor de *f(x)* também aumenta, mas de forma mais lenta. Ou seja, a função é crescente, mas de forma progressivamente mais suave à medida que *x* fica maior.

ATIVIDADE 2

A alternativa incorreta é a **LETRA E.**
Incorreto, porque a função logarítmica $f(x) = log_a x$ nunca passa pelo ponto (0, 1), independentemente da base *a*. A função logarítmica não é definida para *x* = 0, pois não existe *y* tal que $log_a 0$ tenha um valor real.

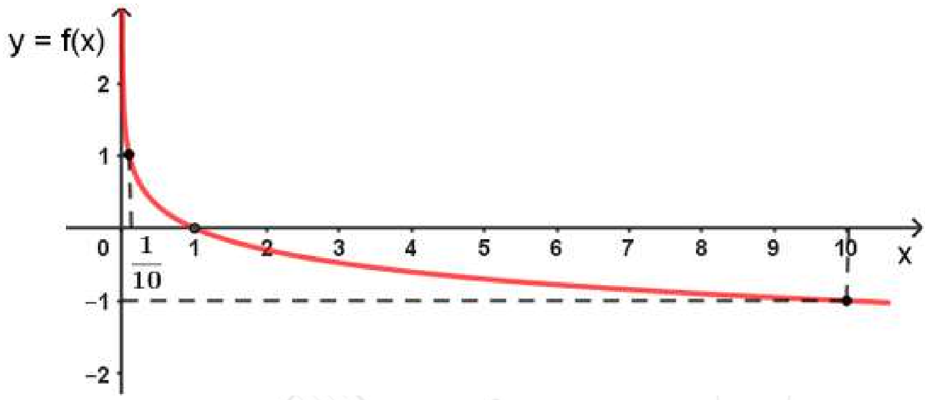
ATIVIDADE 3

Para a construção dos gráficos das funções logarítmicas a seguir, realizaremos cálculos com valores para x dentro do domínio da função, escolhendo valores que facilitem o cálculo dos logaritmos em relação à base *a*, a fim de simplificar a análise e a representação gráfica.

$a) f(x) = log_{\frac{1}{10}}(x)$ Identificamos que o domínio da função é x > 0, logo:

$f\left(\frac{1}{10}\right) = log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{10}\right) = 1$ $f(1) = log_{\frac{1}{10}} 1 = 0$ $f(10) = log_{\frac{1}{10}}(10) = -1$

x	f(x)	(x , y)
$\frac{1}{10}$	1	$\left(\frac{1}{10}, 1\right)$
1	0	(1, 0)
10	-1	(10, -1)



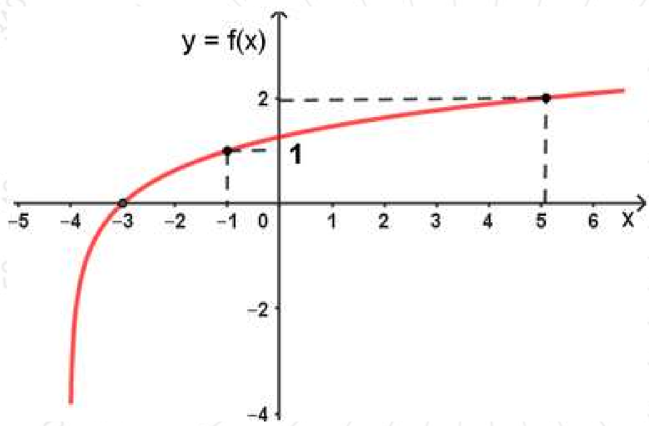
$b) f(x) = log_3(x+4)$ Identificamos que o domínio da função é x > -4, logo:

$f(-3) = log_3(-3+4) = log_3 1 = 0$

$f(-1) = log_3(-1+4) = log_3 3 = 1$

$f(5) = log_3(5+4) = log_3 9 = 2$

x	f(x)	(x , y)
-3	0	(-3, 0)
-1	1	(-1, 1)
5	2	(5, 2)



$c) f(x) = 3 + log_2(x)$ Identificamos que o domínio da função é x > 0, logo:

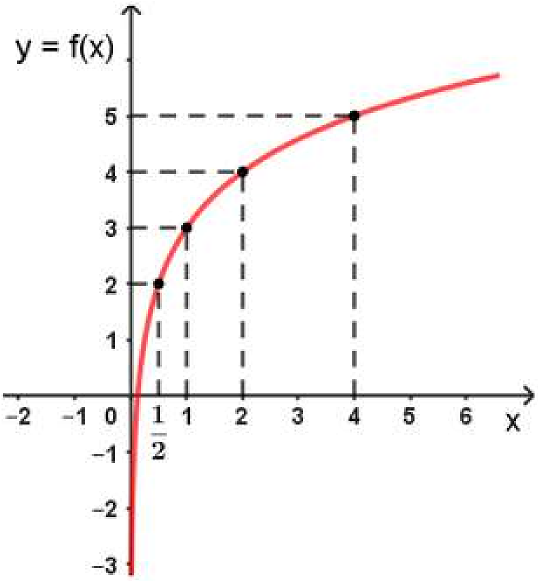
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + (-1) = 2$

$f(1) = 3 + log_2 1 = 3 + 0 = 3$

$f(2) = 3 + log_2 2 = 3 + 1 = 4$

$f(4) = 3 + log_2 4 = 3 + 2 = 5$

x	f(x)	(x , y)
$\frac{1}{2}$	2	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
1	3	(1, 3)
2	4	(2, 4)
4	5	(4, 5)



$d) f(x) = 3 \cdot log_2(x)$ Identificamos que o domínio da função é x > 0, logo:

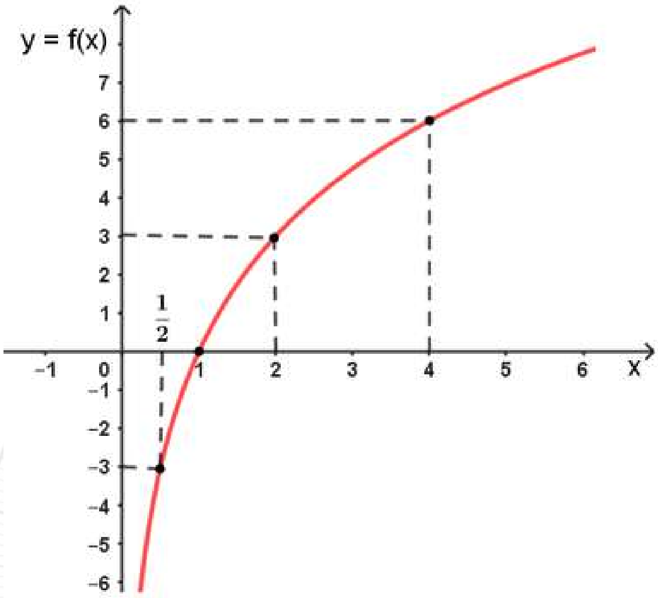
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot (-1) = -3$

$f(1) = 3 \cdot log_2 1 = 3 \cdot 0 = 0$

$f(2) = 3 \cdot log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

$f(4) = 3 \cdot log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$

x	f(x)	(x , y)
$\frac{1}{2}$	-3	$\left(\frac{1}{2}, -3\right)$
1	0	(1, 0)
2	3	(2, 3)
4	6	(4, 6)



Lembrete ao(a) Professor(a): é importante destacar que, para cada função logarítmica apresentada, existe um domínio real específico, ou seja, os valores de x utilizados na atividade servem como pontos de referência, mas os alunos podem ter feito suas representações gráficas utilizando outros valores de referência. Isso não invalida suas respostas, desde que a representação gráfica siga os critérios/definição de uma função logarítmica.

ATIVIDADE 4

Ao analisar a representação gráfica da função *f(x)*, podemos identificar as seguintes características principais:

- O gráfico da função *f(x)* é crescente, ou seja, à medida que *x* aumenta, o valor de *f(x)* também aumenta. Isso implica que a base *a*, por definição deve ser maior que 1;
- O gráfico está definido apenas para *x > 0*, o que significa que a função tem uma assíntota vertical em *x = 0*.
- O gráfico intercepta o eixo *x* no ponto (1, 0), ou seja, para *x* = *1*, o valor da função é 0.
- Quando *x* = 9, o valor da função é *y* = 2, ou seja, *f(9)* = 2. Com base nas opções apresentadas, podemos concluir que a função logarítmica que atende a essa condição é $f(x) = log_3\, x$, pois, para *x* = 9, temos $f(9) = log_3\, 9 = 2$.

Portanto, a lei de formação que define esta função é $f(x) = log_3\, x$ onde a base do logaritmo é 3, o que a define completamente. A alternativa correta é a **LETRA C**.

Sobre a assíntota (letras C e F): abordamos a ideia na semana de 28/04 a 02/05. Para determinar a assíntota, primeiro verificamos em quais condições o argumento é igual a zero. Por exemplo: *f(x) = log (x - 4)*. Sabemos que *(x - 4)* é igual a zero quando *x = 4*. A medida que x tende a 4, *(x - 4)* se aproxima de zero de forma positiva. Então, a função tem assíntota vertical em *x = 4*.

ATIVIDADE 5

Vamos analisar cada uma das afirmações com base nas representações gráficas e nas leis de formação das funções fornecidas:

a) **Falso (F)**. Embora ambas as funções tenham base maior que 1, isso não significa que possuam a mesma taxa de crescimento. Funções logarítmicas com *a > 1* e bases diferentes apresentam taxas de crescimento distintas: quanto menor a base, mais rápida é a taxa de crescimento. Como a base de *f(x)* é menor que a base de *g(x)* , a função *f(x)* cresce mais rápido que *g(x)*.

b) **Verdadeiro (V).**

c) **Verdadeiro (V).** A função *h(x)* tem uma assíntota vertical em *x* = 2, porque o logaritmo só é definido para valores *x* > 2.

d) **Falso (F).** A função *h(x)* **não** intercepta o eixo *x* no ponto de coordenadas (1, 0), mas sim no ponto (3, 0). Já as funções *f(x)* e *g(x)* interceptam o eixo *x* no ponto de coordenadas (1, 0).

e) **Verdadeiro (V).**

f) **Verdadeiro (V).**

g) **Verdadeiro (V).**

h) **Verdadeiro (V).**

Professor(a), nesta atividade 5, é importante discutir os motivos que tornam cada frase verdadeira ou falsa. Assim, se por questões de tempo não puder abordar todas elas, selecione algumas e realize coletivamente com a turma.

i) **Falso (F)**. A função $f(x) = log_{1,5}\,(x)$ não está definida para x = 0, pois o logaritmo de 0 não existe. Portanto, o valor de f(0) não pode ser −6 (nem pode ser definido).

ATIVIDADE 6

Analisando a função $f(x) = log_{\frac{1}{4}}(x-1)$, é possível identificar que:

- É uma função logarítmica com base $a = \frac{1}{4}$, portanto é um número que está entre 0 e 1, logo é uma função decrescente. Isso significa que à medida que *x* aumenta, o valor de *f(x)* diminui.
- A função tem um deslocamento horizontal devido ao termo (x − 1), o que faz com que a função tenha uma assíntota vertical em *x* = 1, pois a função tem domínio para *x* > 1.
- A função intercepta o eixo *x* quando *f(x)* = 0. Para encontrar esse ponto, basta resolver $log_{\frac{1}{4}}(x-1) = 0$, ou seja: $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = x - 1 \Rightarrow 1 = x - 1 \therefore x = 1 + 1 = 2$

  Portanto, a função intercepta o eixo *x* no ponto (2, 0).
- Quando *x* = 5, a imagem da função é - 1 , ou seja, ao substituir a variável *x por 5* na função logarítmica, teremos: $f(5) = log_{\frac{1}{4}}(5-1) \Rightarrow f(5) = log_{\frac{1}{4}}(4) = -1$

Portanto, a representação gráfica apresentada no item B satisfaz todas essas condições. Alternativa correta é a **LETRA B**.

ATIVIDADE 7

A função que descreve a temperatura *T* do forno em função do tempo *t* é dada por:

$$T = 30 \cdot log_2(3t+1) + 25$$

a) Substituímos *t* = 0 na equação: $T = 30 \cdot log_2(3 \cdot 0 + 1) + 25 \Rightarrow T = 30 \cdot log_2 1 + 25$

$T = 30 \cdot 0 + 25 \Rightarrow T = 0 + 25 \Rightarrow T = 25\ ^0\mathrm{C}$

b) Substituímos *t* = 5 na equação: $T = 30 \cdot log_2(3 \cdot 5 + 1) + 25 \Rightarrow T = 30 + log_2(16) + 25$

$T = 30 \cdot 4 + 25 \Rightarrow T = 120 + 25 = 145\ ^0\mathrm{C}$

c) Qual é o valor de *t* (em minutos) para que *T* = 205 °C? Para encontrar esse valor, substituímos *T* = 205 na equação:

$205 = 30 \cdot log_2(3t+1) + 25 \Rightarrow 205 - 25 = 30 \cdot log_2(3t+1) \Rightarrow \frac{180}{30} = log_2(3t+1)$

$6 = log_2(3t+1) \therefore log_2(3t+1) = 6$

Agora, sabemos que $log_2(3t+1) = 6$ equivale a $2^6 = (3t+1)$, logo:

$(3t+1) = 2^6 \Rightarrow 3t + 1 = 64 \Rightarrow 3t = 64 - 1 \therefore t = \frac{63}{3} = 21$

Portanto, a temperatura atingirá 205 °C após **21 minutos**.

ATIVIDADE 8

Professor(a), você pode levantar algumas discussões sobre o tema tratado e promover um diálogo de conscientização.

A função fornecida para modelar a diminuição do nível de álcool no sangue ao longo do tempo é:
$$f(x) = \frac{14 + 10 \cdot log\, x}{3}$$

Substituir o valor de *x = 2,5 mg/l* na função e sabendo que : $log(2,5) \approx 0,40$

$$f(2,5) = \frac{14 + 10 \cdot log\,(2,5)}{3} \Rightarrow f(2,5) = \frac{14 + 10 \cdot 0,40}{3} \Rightarrow f(2,5) = \frac{14 + 4}{3}$$

$$f(2,5) = \frac{18}{3} = 6$$

Professor(a), outra possibilidade é considerar log (2,5) como $log\left(\frac{25}{10}\right)$ *e, aplicando a propriedade operatória, desenvolver log 25 - log 10.*

Portanto, o tempo necessário para que o motorista atinja o limite mínimo de álcool no sangue, de acordo com o modelo fornecido, é aproximadamente **6 horas**. Isso significa que, após 6 horas de ter interrompido o consumo de bebida alcoólica, ele estará apto a dirigir, de acordo com o modelo matemático fornecido.

ATIVIDADE 9

Para calcular o nível de pressão sonora N em decibéis de um fone de ouvido cuja intensidade sonora é $I = 10^{-3}\, W/m^2$, utilizamos a fórmula da Lei de Weber-Fechner:

$N = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ Onde: $I = 10^{-3}\, W/m^2$ é a intensidade sonora; e $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$ é a intensidade de referência.

Substituímos os valores na fórmula: $N = 10 \cdot log\left(\frac{10^{-3}}{10^{-12}}\right) \Rightarrow N = 10 \cdot log(10^{-3-(-12)})$

$$N = 10 \cdot log\,(10^9) \Rightarrow N = 10 \cdot 9\, log\,(10) \Rightarrow N = 10 \cdot 9 \cdot 1 = 90\, dB$$

Portanto, o nível de pressão sonora do fone de ouvido com intensidade $10^{-3}\, W/m^2$ é 90 dB. Alternativa correta **LETRA C**.

ATIVIDADE 10

A função que descreve a altitude *h* em função da pressão atmosférica *p* é dada por:
$$h(p) = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$$

No problema, é fornecido que a pressão atmosférica no instante considerado é *p* = 0,5 atm , e que $log_2 \approx 0,30$

Primeiro, substituímos o valor de p na equação: $h(0,5) = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{1}{0,5}\right)$

Sabemos que $\left(\frac{1}{0,5}\right) = 2$ ou $\left(\frac{1}{0,5}\right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{10}}\right) = \left(\frac{10}{5}\right) = 2$, portanto: $h(0,5) = 20 \cdot log\, 2$

Agora, substituímos : $log_2 \approx 0,30$
$$h(0,5) = 20 \cdot log\, 2 \Rightarrow h(0,5) = 20 \cdot 0,30 \Rightarrow h(0,5) = 6$$

Portanto, a altitude *h* do avião nesse instante é 6 km.
Alternativa correta **LETRA B**

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática: funções e progressões.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

______. **Matemática Completa 1º ano**. 4. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

Chavante, Eduardo. **Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio.** 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

______. **Matemática: contexto & aplicações. 3**. ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.** 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: matemática ciência e aplicações, 1.** 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Referências

ATIVIDADES

ANAC, Agencia Nacional de Viação Civil. **ANACPÉDIA: altímetro**. Disponível em: <https://www2.anac.gov.br/anacpedia/por_esp/tr3628.htm>. Acessado em: 23/12/2024.

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.** Matemática e suas tecnologias - ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: funções e progressões**. ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências**. Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Funções e suas aplicaçõe**s. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **Contato Matemática**. Ensino Médio. 1ª ano. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.

LEONARDO, Fabio Martins. **Conexões com a matemática. Ensino Médio**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.

TOLEDO, Júlia Maria; FELIX, Leonardo. **Teste do bafômetro: qual o limite de tolerância?.** Publicado em 10/02/2024. Disponível em: <https://autoesporte.globo.com/mobilidade/noticia/2024/02/teste-do-bafometro-qual-o-limite-de-tolerancia.ghtml>. Acessado em 24/12/2024