GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

8º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS E SUAS OPERAÇÕES

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EF08MA06/ES Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações e noções de fatoração e produtos notáveis	• Identificar fator comum em um polinômio. • Utilizar a fatoração para reescrever um polinômio. • Desenvolver produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença. • Resolver e elaborar problemas, de diversos contextos, que envolvam produtos notáveis e cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.	**D081_M** Identificar expressão algébrica que modela uma sequência numérica ou figural. **D018_M** Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

Contextualização

ÁLGEBRA NA BABILÔNIA

Os babilônios, por volta de 2 000 a.C., desenvolveram métodos práticos e inovadores para resolver problemas envolvendo áreas de figuras geométricas, como quadrados e retângulos, utilizando tábuas de argila gravadas com escrita cuneiforme. Esses registros, encontrados em escavações arqueológicas, revelam uma matemática altamente funcional voltada para resolver questões do cotidiano, como divisão de terras, construção de edifícios e comércio. Apesar de não utilizarem uma linguagem algébrica simbólica como a nossa, eles abordavam esses cálculos de maneira geométrica e numérica, demonstrando um entendimento intuitivo.

Os babilônios usavam o métodos algébricos e numéricos para calcular extensões de terras cultiváveis. Eles usavam textos e símbolos para auxiliar na resolução de problemas ligados ao cálculo de impostos.

Plimpton 322 é uma tabela de argila em escrita cuneiforme com registros da matemática babilônica.

Na atualidade temos uma ferramenta muito eficaz que nos ajuda a resolver diversos problemas, inclusive os geométricos. Trata-se da Álgebra.

Neste material, veremos mais sobre Álgebra. Estudaremos:

- fatoração algébrica; e
- produtos notáveis

Conceitos e Conteúdos

FATORAÇÃO

Fatorar é escrever na forma de produto (multiplicação). A fatoração é um assunto muito útil no trabalho com a Álgebra. É como "quebrar" algo grande em partes menores que, quando multiplicadas, voltam a formar o original. Veja essas duas situações:

1°) Observe como representamos o número 36:

$$36 = 4 \cdot 9$$

Como $4 = 2^2$ e $9 = 3^2$, podemos escrever:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

36 foi escrito como ***produto de fatores primos***.
$2^2 \cdot 3^2$ é a forma fatorada prima de 36.

Se escolhêssemos outra decomposição para 36:

$$36 = 12 \cdot 3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3}_{12} \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

a fatoração completa seria a mesma.

2°) Observe a expressão numérica:

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$$

Ela não está escrita na forma de produto, pois há uma adição de parcelas.
No entanto, como o número 5 multiplica as duas parcelas, podemos usar a propriedade distributiva obtendo:

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot (3 + 7)$$

Escrevemos a expressão como produto de dois fatores: 5 e $(3 + 7)$, ou seja, fatoramos a expressão.

Você se lembra?

Os Números Primos são números naturais maiores do que 1 que possuem somente dois divisores, ou seja, são divisíveis por 1 e por eles mesmos. Exemplo:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$$

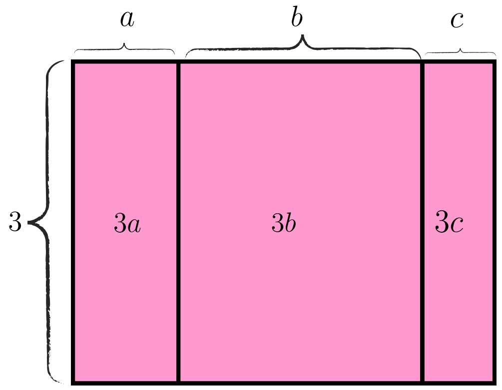
Você se lembra?

A propriedade distributiva estabelece que multiplicar um número pela soma ou pela subtração de dois ou mais termos é equivalente a multiplicar esse número por cada termo individualmente. Exemplo:

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$
$$2 \cdot 8 = 6 + 10$$
$$16 = 16$$

E o que tudo isso tem a ver com a Álgebra? Muitos polinômios podem ser fatorados: podemos escrevê-los como produto de outros polinômios, o que frequentemente permite simplificar expressões. Como? Acompanhe os casos a seguir.

Identificando o fator comum



A área desse retângulo é:

$$3a + 3b + 3c$$

(soma das áreas das figuras que o compõem) ou;

$$3(a + b + c)$$

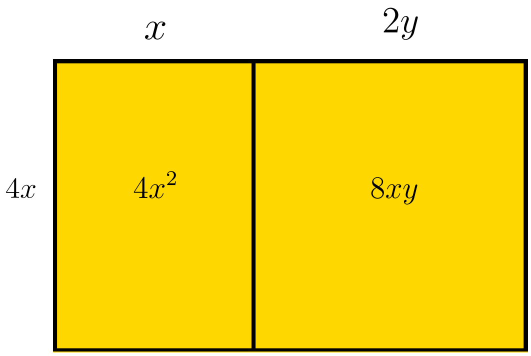
(produto da largura pelo comprimento)

Então,

$$\underbrace{3a + 3b + 3c}_{\text{Polinômio}} = \underbrace{3(a + b + c)}_{\text{Forma fatorada do polinômio}}$$

Observe ainda que, nesse exemplo, *3* é fator comum a todos os termos do polinômio $3a + 3b + 3c$. Na forma fatorada, *3* aparece com destaque. Dizemos que o ***fator comum*** 3 foi colocado em ***evidência***.

Nos próximos exemplos vamos identificar o fator comum e colocá-lo em evidência.



O polinômio que representa sua área é:

$$4x^2 + 8xy$$

$$4x^2 = 4x \cdot x \qquad 8xy = 4x \cdot 2y$$

Nesse caso, o ***fator comum*** a todos os termos do polinômio é $4x$. Colocando $4x$ em ***evidência***, obtemos a forma fatorada do polinômio:

$$4x^2 + 8xy = 4x(x + 2y) \qquad \begin{cases} 4x^2 \div 4x = x \\ 8xy \div 4x = 2y \end{cases}$$

A partir de agora vamos fazer a fatoração, e em seguida conferir reescrevendo o polinômio.

$A)\ 6a^2 + 8a$

$$6a^2 + 8a$$

$$2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \qquad 4 \cdot 2 \cdot a$$

Colocamos o fator comum $2a$ em evidência

$$6a^2 \div 2a = 3a$$
$$8a \div 2a = 4$$

$$6a^2 + 8a \rightarrow 2a(3a + 4)$$

Para conferir se a fatoração está correta, use a propriedade distributiva:

$$2a(3a+4) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot 4 = 6a^2 + 8a$$

Voltamos ao polinômio original!

$B)\ 3x^2y + 6xy^2 - 2xy$

Colocamos o fator comum xy em evidência

$$3x^2y \quad + \quad 6xy^2 \quad - \quad 2xy$$

$$3 \cdot x \cdot x \cdot y \qquad 6 \cdot x \cdot y \cdot y \qquad 2 \cdot x \cdot y$$

$$3x^2y \div xy = 3x$$
$$6xy^2 \div xy = 6y$$
$$-2xy \div xy = -2$$

$$3x^2y + 6xy^2 - 2xy \rightarrow xy(3x + 6y - 2)$$

Para conferir se a fatoração está correta, use a propriedade distributiva:

$$xy(3x+6y-2) = (xy \cdot 3x) + (xy \cdot 6y) - (xy \cdot 2) = 3x^2y + 6xy^2 - 2xy$$

Voltamos ao polinômio original!

$C)\ 10p^3 + 15p^2$

Colocamos o fator comum $5p^2$ em evidência

$$10p^3 \quad + \quad 15p^2$$

$$2 \cdot 5 \cdot p \cdot p \cdot p \qquad 3 \cdot 5 \cdot p \cdot p$$

$$10p^3 \div 5p^2 = 2p$$
$$15p^2 \div 5p^2 = 3$$

$$10p^3 + 15p^2 \rightarrow 5p^2(2p+3)$$

Para conferir se a fatoração está correta, use a propriedade distributiva:

$$5p^2(2p+3) = (5p^2 \cdot 2p) + (5p^2 \cdot 3) = 10p^3 + 15p^2$$

Voltamos ao polinômio original!

Agrupamento

Observe o polinômio $ax + ay + bx + by$. Não há fator comum a todos os termos. No entanto podemos encontrar dois grupos onde existe fator comum.

$$\underbrace{ax + ay}_{fator\ \ comum\ \ a} + \underbrace{bx + by}_{fator\ \ comum\ \ b}$$

Agora faremos a fatoração em cada grupo.

$$a(x+y)+b(x+y)$$

Observe que agora temos $(x+y)$ fator comum. Assim, procedemos novamente com a fatoração.

$$a(x+y)+b(x+y)$$

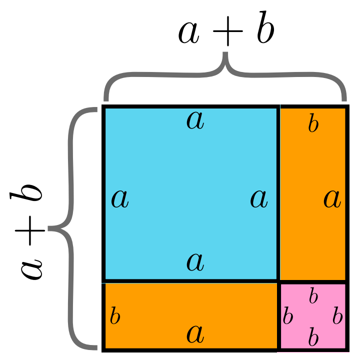
$$a(x+y)+b(x+y) \quad \rightarrow \quad (x+y)\cdot(a+b)$$

PRODUTOS NOTÁVEIS

Produtos notáveis são multiplicações de polinômios que aparecem com frequência em problemas de álgebra. Uma maneira interessante para compreender os produtos notáveis é por meio da geometria. Os produtos notáveis são: o ***quadrado da soma***, o ***quadrado da diferença*** e o ***produto da soma pela diferença*** de dois termos.

Quadrado da Soma

Observe o quadrado abaixo:



Vamos obsevar as áreas dos dois quadrados e dos dois retângulos.

$$\rightarrow \quad b\cdot b = b^2$$

$$\rightarrow \quad a\cdot a = a^2$$

$$\rightarrow \quad a\cdot b = ab$$

$$\rightarrow \quad a\cdot b = ab$$

Somando todas as áreas chegamos ao polinômio que representa a área do quadrado maior de lado $a+b$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Fazendo o produto algébrico também chegamos a esse resultado.

$$= (a+b)^2 =$$

$$= (a+b)\cdot(a+b) =$$

$$= a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) =$$

$$= a^2 + ab + ba + b^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Qual seria a área desse quadrado maior (formado pelas 4 figuras) se os valores de ***a*** e ***b*** fossem, respectivamente, **4** cm e **2** cm?
Para descobrir basta fazer a substituição das variáveis e calcular o valor numérico.

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

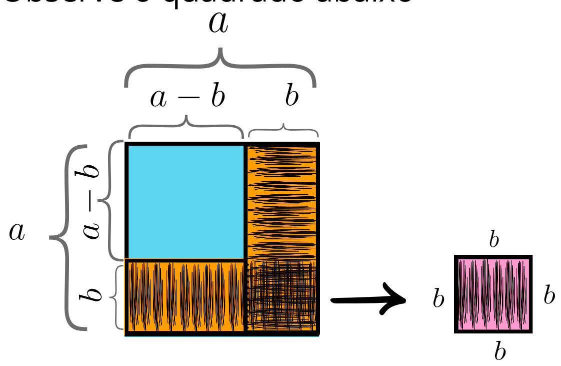
$$4^2 + 2\cdot 4\cdot 2 + 2^2 =$$

$$16 + 16 + 4 =$$

$$36\ cm^2$$

Quadrado da Diferença

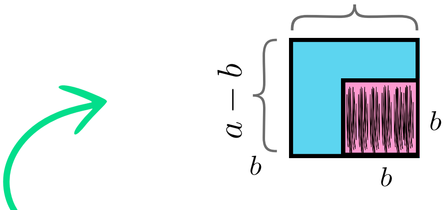
Observe o quadrado abaixo



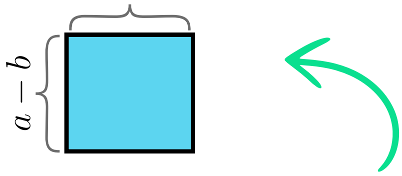
Ao subrair os dois retângulos de área ***ab,*** acabamos retirando um quadradinho de lado **b** a mais. Repondo esse quadradinho de lado ***b*** temos a seguinte expressão:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Se não repormos esse quadradinho de lado **b**, a área do quadrado $a - b$ não ficaria exata.



Área do quadrado $a - b$ sem a reposição do quadradinho de lado ***b***.



Área do quadrado $a - b$ com a reposição do quadradinho de lado **b**.

Fazendo o produto algébrico também chegamos a esse resultado.

$$(a-b)^2 =$$

$$(a-b)\cdot(a-b) =$$

$$a(a-b) - b(a-b) =$$

$$a^2 - ab - ba + b^2 =$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

Qual seria a área desse quadrado se os valores de ***a*** e ***b*** fossem, respectivamente, ***5*** cm e ***3*** cm?
Para descobrir basta fazer a substituição das variáveis e calcular o valor numérico.

$$a^2 - 2ab + b^2 =$$

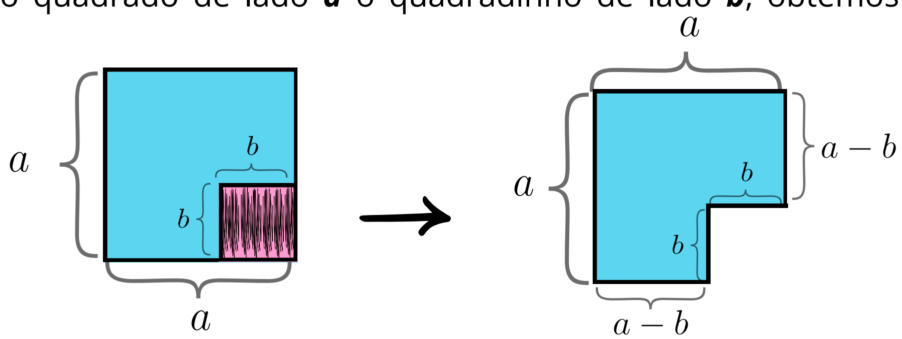
$$5^2 - 2\cdot 5\cdot 3 + 3^2 =$$

$$25 - 30 + 9 =$$

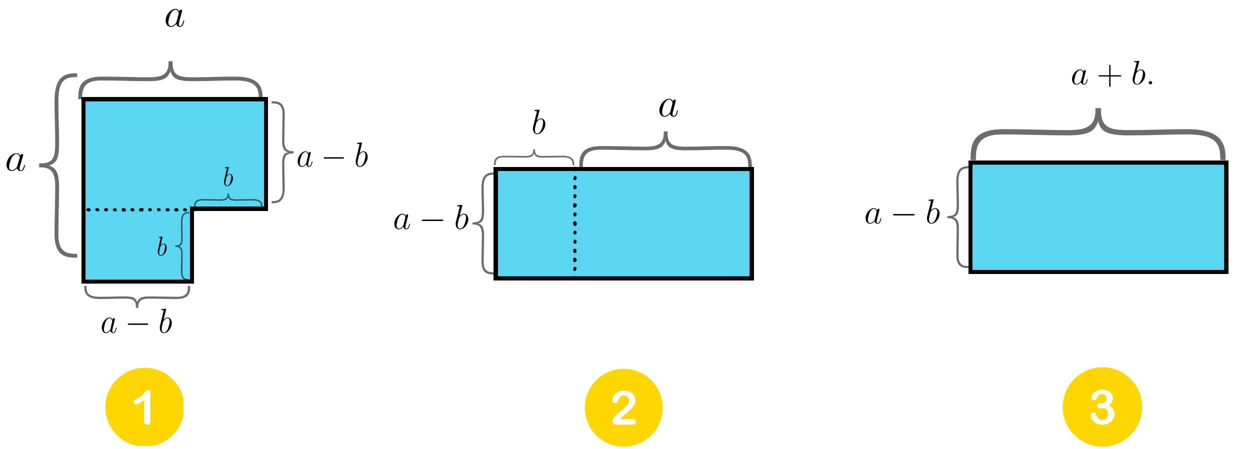
$$4\ cm^2$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

Ao subrair do quadrado de lado ***a*** o quadradinho de lado ***b***, obtemos o polígono abaixo.



Podemos reagrupar esse polígono em um retângulo de lados $a-b$ e $a+b$.
Veja a sequência de figuras (ordem 1, 2 e 3) para entender melhor:



Fazendo o produto algébrico também chegamos a uma diferença de quadados.

$$(a+b)\cdot(a-b)=$$
$$=a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)=$$
$$=\ a^2-ab+ab-b^2=$$
$$=\boxed{a^2-b^2}$$

Qual seria a área desse retângulo se os valores de ***a*** e ***b*** fossem, respectivamente, **9** cm e ***6*** cm?
Para descobrir basta fazer a substituição das variáveis e calcular o valor numérico.

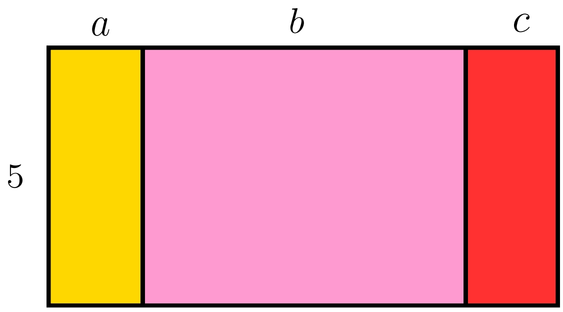
$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b)&=a^2-b^2\\&=9^2-6^2\\&=81-36\\&=45\ cm^2\end{aligned}$$

REVISANDO O QUE VOCÊ APRENDEU!

- **Fatoração algébrica:** é transformar uma soma ou uma subtração em um produto. A fatoração algébrica é o processo pelo qual polinômios podem ser fatorados, sendo escritos como produto de outros polinômios.
- **Produtos notáveis:** Produtos notáveis são multiplicações de polinômios que aparecem com frequência em problemas de álgebra.
- **Quadrado da soma de dois termos**: o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo termo, e o quadrado do segundo termo.
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
- **Quadrado da diferença de dois termos**: o quadrado do primeiro termo menos duas vezes o primeiro vezes o segundo termo, e o quadrado do segundo termo.
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
- **Produto da soma pela diferença de dois termos**: o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo termo.
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Exercícios Resolvidos

1) Observe a figura:



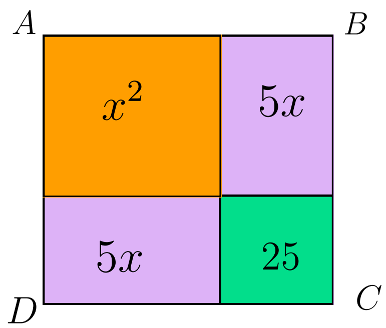
A área total do retângulo é $5a + 5b + 5c$. Qual é a forma fatorada dessa expressão?
Resposta:
Observe que o fator comum nos três termos é o 5. Logo colocaremos o 5 em evidência. Vamos dividir cada termo da expressão algébrica por 5. O resultado dessa divisão será colocado entre parêntesis.

$$5a \div 5 = a$$
$$5b \div 5 = b$$
$$5c \div 5 = c$$

$$5a + 5b + 5c \quad \rightarrow \quad 5(a + b + c)$$

Portanto a forma fatorada será: $5(a + b + c)$.

2) Na figura abaixo temos um quadrado grande (ABCD) formado por quatro polígonos: dois retângulos e dois quadrados menores.



A) Qual é a área do quadrado ABCD?
Resposta: Basta somar as áreas das quatro partes indicadas.

$$x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

B) Qual é a área desse quadrado quando $x = 3cm$?

Resposta: Faremos a substituição da variável x por 3 .

$$x^2+10x+25=$$
$$3^2+10\cdot 3+25=$$
$$9+30+35=$$
$$74\ cm^2$$

3) Pedro usou a fatoração da diferença de quadrados para calcular facilmente 2001^2-1999^2. Qual a resposta correta encontrada por Pedro?

Resposta: observe que temos nessa expressão uma diferença de quadrados. Portanto basta aplicar o produto notável da soma pela diferença de dois termos.

$$2001^2-1999^2=(2001+1999)\cdot(2001-1999)=4000\cdot 2=8000.$$

4) Um contador em uma empresa foi questionado sobre o número de relatórios que ele revisou em determinado dia. Ele respondeu:

"O número de relatórios que revisei é igual a $(14,5)^2-(9,5)^2$ *".*

Qual foi total de relatórios revisados?

Resposta: Para resolver a questão usando o produto da soma pela diferença, aplicamos a fórmula geral:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

O contador afirmou que o número de relatórios revisados foi igual a $(14,5)^2-(9,5)^2$. Podemos aplicar a fórmula com $a=14,5\ e\ b=9,5.$ Substituindo na fórmula e calculando os valores:

$$(14,5+9,5)\cdot(14,5-9,5)\ =$$
$$=\ 24\cdot 5\ =$$
$$=120$$

Foram revisados 120 relatórios.

5) No Espírito Santo, a produção de rapadura é uma tradição muito valorizada, especialmente em comunidades rurais. Em uma fazenda, os produtores estão organizando a distribuição de rapaduras em dois tipos de caixas: caixas grandes e caixas pequenas. Um produtor percebeu que a diferença de quantidades de rapadura armazenada nas duas caixas pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$(3y-4)(3y+4)\ -(3y-4)^2$$

A) Simplifique essa expressão utilizando os conceitos de produtos notáveis para encontrar o polinômio que representa a diferença de quantidades de rapadura armazenada entre os dois tipos de caixas.

Resposta: Calcularemos o valor da expressão algébrica: $(3y-4)(3y+4)\ -(3y-4)^2$
Sabemos que o primeiro produto é o produto da soma pela diferença, então temos que:

$$(3y)^2-4^2-(3y-4)^2\Rightarrow 9y^2-16-(3y-4)^2$$

O termo $-(3y-4)^2$ é o simétrico de um produto notável conhecido como quadrado da diferença. Desenvolvendo o termo, temos que:

$$9y^2 - 16 - (9y^2 - 2 \cdot 3y \cdot 4 + 16) =$$
$$= 9y^2 - 16 - 9y^2 + 24y - 16 =$$
$$= 24y - 32$$

O polinômio que representa a diferença de quantidades de rapadura armazenada entre os dois tipos de caixas é $24y - 32$.

B) Calcule o valor numérico da diferença de quantidades de rapadura entre as caixas quando $y = 5$.

Resposta: Substituindo o valor de y no polinômio $24y - 32$, temos:

$$24 \cdot 5 - 32 =$$
$$= 120 - 32 =$$
$$= 88$$

O valor numérico é 88.

Material Extra

Produtos notáveis com Geogebra
https://www.geogebra.org/m/C5rAMAQh

Fatoração de expressões algébricas
https://www.youtube.com/watch?v=ppJEnx_jVI0

Atividades

ATIVIDADE 1

Identifique o fator comum dos polinômios a seguir.

A) $2a + 2b$

B) $10ab + 5b$

C) $18x^3y^2 - 12x^2y$

D) $ax + bx + cx + dx$

E) $3bm - 3bx - 3bn$

F) $2x^2y + 8xy - 4xyz$

ATIVIDADE 2

Observe os polinômios abaixo. Identifique o fator comum e coloque-o em evidência.

A) $6m + 6n$

B) $5r + 10s$

C) $3w + 6y + 9z$

D) $c^2 + c^3 + c^4 + c^5$

E) $-2q^2 - 4q^3 - 6q^4 - 8q^5$

F) $-15p^5 - 35p^2y + 25p^3$

ATIVIDADE 3

Fatore os seguintes polinômios usando a fatoração por agrupamento.

A) $x^2 - 2x + yx - 2y$

B) $a^2 + 3a - 2a - 6$

C) $xb - 3x + yb - 3y$

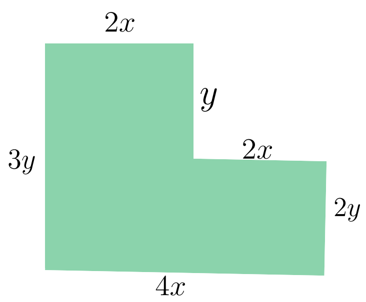
D) $xy - 2x + y - 2$

E) $2x + 2 + 3bx + 3b$

F) $x^2 - 3x + yx - 3y$

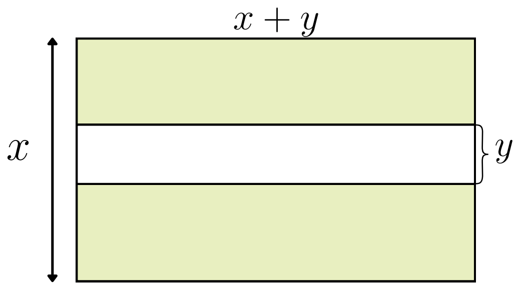
ATIVIDADE 4

A figura a seguir representa um canteiro, com as medidas de seus lados indicadas. Determine o polimônio que represente o perímetro desse canteiro.



ATIVIDADE 5

A figura é formada por retângulos. Escreva uma expressão simplificada para a área da parte colorida da figura.



ATIVIDADE 6

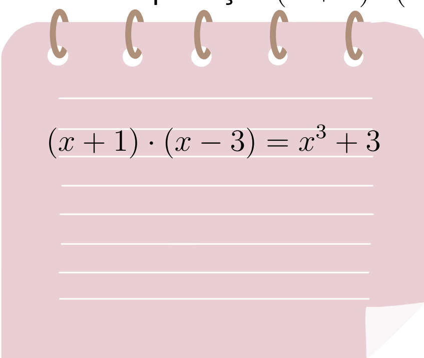
Escreva os polinômios abaixo de forma fatorada.

A) $y^2 - 49$ B) $x^2 - 64$ C) $y^2 - 16$ D) $25x^2 - 100$

E) $16z^2 - 9$ F) $4a^2 - 25$ G) $m^4 - 36$ H) $4 - 49w^2$

ATIVIDADE 7

Alessandra efetuou a multiplicação $(x+1)\cdot(x-3)$ no caderno.



A resposta dada por Alessandra está correta? Faça você mesmo a resolução e verifique se a resposta dada por ela está correta.

ATIVIDADE 8

Desenvolva os produtos notáveis abaixo.

A) $(x+y)^2$

B) $(2a+b)^2$

C) $(x-5y)^2$

D) $(3-a^3)^2$

E) $(f-3)^2$

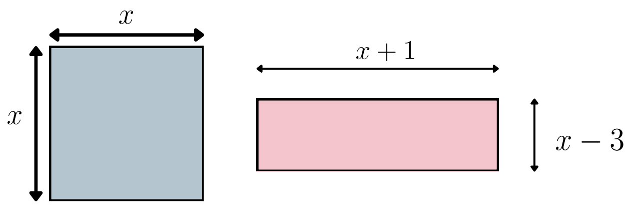
F) $(-2g-5)^2$

G) $(-yz-10)^2$

H) $(-4h-3j)^2$

ATIVIDADE 9

A área do quadrado excede a área do retângulo em $13\ cm^2$.



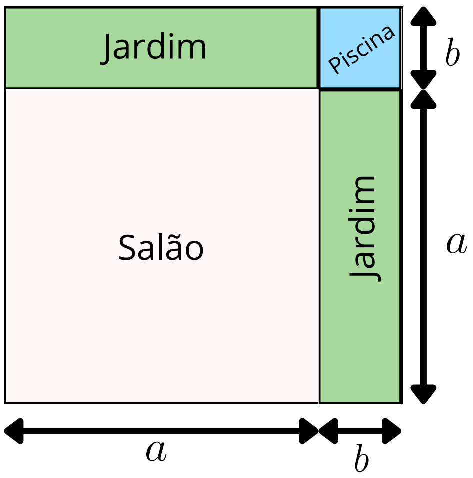
A) Qual é a medida do lado do quadrado?

B) Qual é o perímetro do quadrado?

C) Qual é o perímetro do retângulo?

ATIVIDADE 10

O desenho representa a planta de um clube construído sobre um terreno quadrado.



Indique o local que representam as expressões:

A) a^2

B) b^2

C) $2ab$

D) $(a+b)^2$

Gabarito

ATIVIDADE 01:

A) 2
B) $5b$
C) $6x^2y$
D) x
E) $3b$
F) $2xy$

ATIVIDADE 02:

A) $6 \cdot (m+n)$
B) $5 \cdot (r+2s)$
C) $3 \cdot (w+2y+3z)$
D) $c^2(1+c+c^2+c^3)$
E) $-2q^2 \cdot (1+2q+3q^2+4q^3)$
F) $-5p^2 \cdot (3p^3+7y-5p)$

ATIVIDADE 03:

A) $(x+y) \cdot (x-2)$
B) $(a-2) \cdot (a+3)$
C) $(x+y) \cdot (b-3)$
D) $(x+1) \cdot (y-2)$
E) $(2+3b) \cdot (x+1)$
F) $(x+y) \cdot (x-3)$

ATIVIDADE 04:

$8x+6y$

ATIVIDADE 05:

$$x^2-y^2$$

ATIVIDADE 06:

A) $(y-7) \cdot (y+7)$
B) $(x-8) \cdot (x+8)$
C) $(y+4) \cdot (y-4)$
D) $(5x+10) \cdot (5x-10)$
E) $(4z+3) \cdot (4z-3)$
F) $(2a+5) \cdot (2a-5)$
G) $(m^2+6) \cdot (m^2-6)$
H) $(2+7w) \cdot (2-7w)$

ATIVIDADE 07:

Não; pois a resposta correta é:

$$x^2-2x-3$$

ATIVIDADE 08:

A) $x^2+2 \cdot x \cdot y+y^2$
B) $4a^2+4ab+b^2$
C) $x^2-10xy+25y^2$
D) $9-6a^3+a^6$
E) f^2-6f+9
F) $4g^2+20g+25$
G) $y^2z^2+20yz+100$
H) $16h^2+24hj+9j^2$

ATIVIDADE 09:

A) *5 cm*
B) 20 cm
C) 16 cm

ATIVIDADE 10:

A) Área do salão
B) Área da piscina
C) Área dos jardins
D) Área do clube

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

A) 2
B) $5b$
C) $6x^2y$
D) x
E) $3b$
F) $2xy$

ATIVIDADE 2

A) $6m + 6n = 6 \cdot (m + n)$
B) $5r + 10s = 5 \cdot (r + 2s)$
C) $3w + 6y + 9z = 3 \cdot (w + 2y + 3z)$
D) $c^2 + c^3 + c^4 + c^5 = c^2(1 + c + c^2 + c^3)$
E) $-2q^2 - 4q^3 - 6q^4 - 8q^5 = -2q^2 \cdot (1 + 2q + 3q^2 + 4q^3)$
F) $-15p^5 - 35p^2y + 25p^3 = -5p^2 \cdot (3p^3 + 7y - 5p)$

ATIVIDADE 3

A) $x(x-2) + y(x-2) = (x+y) \cdot (x-2)$
B) $a(a+3) - 2(a+3) = (a-2) \cdot (a+3)$
C) $x(b-3) + y(b-3) = (x+y) \cdot (b-3)$
D) $x(y-2) + 1(y-2) = (x+1) \cdot (y-2)$
E) $2(x+1) + 3b(x+1) = (2+3b) \cdot (x+1)$
F) $x(x-3) + y(x-3) = (x+y) \cdot (x-3)$

ATIVIDADE 4

$2x + y + 2x + 2y + 4x + 3y = 8x + 6y$

ATIVIDADE 5

$(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - x \cdot y + x \cdot y - y^2 = x^2 - y^2$

ATIVIDADE 6

A) $(y-7) \cdot (y+7)$
B) $(x-8) \cdot (x+8)$
C) $(y+4) \cdot (y-4)$
D) $(5x+10) \cdot (5x-10)$
E) $(4z+3) \cdot (4z-3)$
F) $(2a+5) \cdot (2a-5)$
G) $(m^2+6) \cdot (m^2-6)$
H) $(2+7w) \cdot (2-7w)$

ATIVIDADE 7

Não; pois a resposta correta é:
$(x+1) \cdot (x-3) = x^2 - 3x + 1x - 3 = x^2 - 2x - 3$

ATIVIDADE 8

Podemos resolver esses produtos notáveis através da seguinte ideia:

"O primeiro termo elevado ao quadrado mais (ou menos) o dobro do primeiro termo multiplicado pelo segundo termo mais o segundo termo elevado ao quadrado."

A) $x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
B) $4a^2 + 4ab + b^2$
C) $x^2 - 10xy + 25y^2$
D) $9 - 6a^3 + a^6$
E) $f^2 - 6f + 9$
F) $4g^2 + 20g + 25$
G) $y^2z^2 + 20yz + 100$
H) $16h^2 + 24hj + 9j^2$

ATIVIDADE 9

Para resolver as alternativas precisamos descobrir o valor de ***x***, para isso vamos montar a expressão que define o enunciado da questão: $x^2 = (x+1)\cdot(x-3)+13$

Agora, vamos resolvê-la:

$$x^2 = (x+1)\cdot(x-3)+13$$
$$x^2 = x^2 - 3x + 1x - 3 + 13$$
$$x^2 = x^2 - 2x + 10$$
$$x^2 - x^2 + 2x = 10$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

A) A medida do lado do quadrado é $x = 5cm.$

B) A medida do perímetro do quadrado é $5+5+5+5 = 20cm.$

C) Para medida do perímetro do retângulo definimos a medida dos lados, primeiro: $x+1 = 5+1 = 6cm.$ e $x-3 = 5-3 = 2cm.$

Agora, definimos o perímetro do retângulo: $6+6+2+2 = 16cm.$

ATIVIDADE 10

A) Área do salão: $a \cdot a = a^2$

B) Área da Piscina: $b \cdot b = b^2$

C) Área dos jardins: $a \cdot b + a \cdot b = 2ab$

D) Área do clube: $(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2$

Referências

Andrini, Álvaro Praticando matemática 7/ Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 4. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2015. – (Coleção praticando matemática; v. 8)

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é matemática, 7º ano - 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009. Plataforma Compartilha , Grupo Santilhana

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)

https://brasilescola.uol.com.br/matematica/produtos-notaveis.htm

GIOVANNIJUNIOR, José Ruy, CASTRUCCI, Benedicto. A Conquista da Matemática, 8°Ano. Ed. Renovada- São Paulo:FTD, 2009.

https://impa.br/noticias/na-folha-de-s-paulo-marcelo-viana-fala-da-plimpton-322/

IMPA. Portal da OBMEP: matemática. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 26 nov. 2024.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

8º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EF08MA03 Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo.	• Compreender o princípio multiplicativo, desenvolvendo processos de contagem associados à multiplicação. • Resolver problemas de contagem cuja resolução pode ser modelada pelo princípio multiplicativo.	**D042_M** Utilizar o princípio multiplicativo de contagem na resolução de problema.

Contextualização

AS CORES NA PINTURA INDÍGENA

As cores mais usadas na pintura indígena são o vermelho, o preto, o amarelo e o branco. Essas cores são obtidas de plantas e sementes da floresta. As cores utilizadas pelos indígenas têm significados específicos e são associadas a preceitos mágicos, simbólicos e cosmológicos.
Veja as principais cores e seus significados:

- Vermelho: Obtido do urucum, é usado quando predomina o sentimento de guerra.
- Preto: Obtido do sumo do jenipapo misturado à fuligem.
- Amarelo: Extraído do açafrão.
- Branco: Obtido da tabatinga.
- Verde: Simboliza as matas brasileiras.

As cores são vívidas e impressionantes. A maneira como são combinadas formam padrões que se inspiram na natureza.
Existem inúmeras possibilidades de se combinar as cores para formar esses padrões. O que significam as cores do cocar indígena?

Pintura corporal e o traje tradicional compõem a identidade de uma comunidade indígena.

O verde representa as mata e florestas. O vermelho, simboliza a casa dos homens. O amarelo representa as casas e as roças, áreas dominadas por mulheres.

De quantas maneiras diferentes é possível montar um cocar com as cores apresentadas? Para responder esse tipo de pergunta, podemos utilizar o princípio multiplicativo.

O princípio multiplicativo é uma ferramenta matemática que permite resolver problemas de contagem, como o de combinar cores.

Nesse material, estudaremos o ***princípio multiplicativo*** nos processos de contagem. Você verá que ele é útil para resolvermos problemas sem a necessidade de contar manualmente cada possibilidade.

Conceitos e Conteúdos

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

O ***princípio multiplicativo***, também chamado de princípio fundamental da contagem, é utilizado para encontrar o número de possibilidades para um evento constituído de n etapas. Para isso, as etapas devem ser sucessivas e independentes. Se a primeira etapa do evento possui x possibilidades e a segunda etapa é constituída de y possibilidades, então existem $x \cdot y$ possibilidades. Observe o exemplo.

Imagine que você quer escolher uma roupa. Você tem 3 camisetas (vermelha, azul e preta) e 2 calças (jeans e preta). Quantas combinações diferentes de roupa você pode montar (usando uma camiseta e uma calça)?

Veja os dados do problema:

- 3 camisetas: **vermelha**, **azul** e **preta**.
- 2 calças: **jeans** e **preta**.

Veja as combinações possíveis:

1. **camiseta vermelha** + **calça jeans.**
2. **camiseta vermelha** + **calça preta.**
3. **camiseta azul** + **calça jeans**.
4. **camiseta azul** + **calça preta**.
5. **camiseta preta** + **calça jeans**.
6. **camiseta preta** + **calça preta**.

Portanto, você pode montar 6 combinações diferentes de roupa.

$$3 \cdot 2 = 6$$

Como vimos no exemplo, você pode seguir alguns passos para aplicar o princípio multiplicativo:
1° **Dividir o problema em etapas**: Identifique as decisões ou escolhas a serem feitas.
2° **Contar as opções de cada etapa**: Verifique o número de possibilidades em cada decisão.
3° **Multiplicar as opções**: Multiplique as quantidades de escolhas de cada etapa para obter o total.

Veja como aplicar esse passo a passo no próximo exemplo.

Atualmente, no Brasil, as placas de carro são formadas por um código composto de 4 letras (L) e 3 algarismos (N), na seguinte ordem: LLLNLNN. Quantas placas diferentes são possíveis de se confeccionar?

Vamos aplicar os 3 passos:
1°) **Dividir o problema em etapas**: temos 4 letras e 3 algarismos. Tanto as letras quanto os números podem ser repetidos.
2°) **Contar as opções de cada etapa**: temos quatro grupos de 26 letras e três grupos de 10 algarismos.
3°) **Multiplicar as opções**: como há 26 opções para a escolha de cada letra e 10 opções para a escolhas de cada algarismo, a quantidade de possibilidade de placas de carros distintas é:

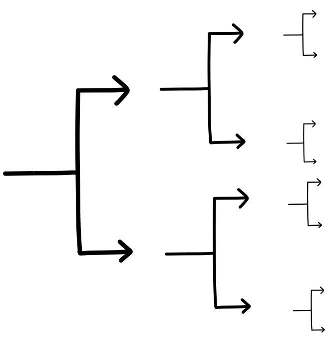
Modelo de placa de carro brasileira.

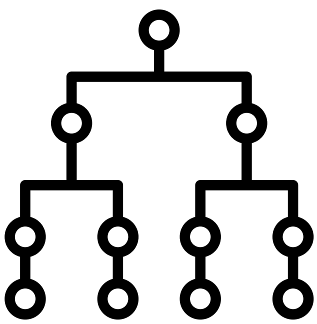
$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 456\ 976\ 000$$

Portanto são $456\ 976\ 000$ placas diferentes podem ser confeccionadas.

Árvores de possibilidades

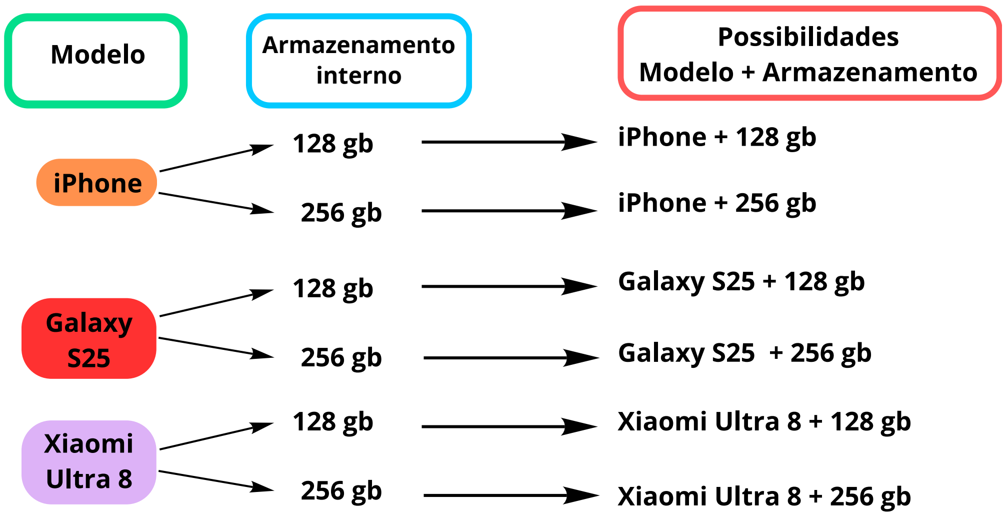
Para nos ajudar a visualizar a estrutura dos problemas envolvendo contagem temos o ***diagrama de árvore*** ou ***árvore de possibilidades.*** Esse dispositivo é muito útil para analisar a estrutura de um problema e visualizar o número de combinações. Trata-se de uma forma de organizar os dados do seu problema unindo as possibilidades com segmentos de reta, ramificando-as como uma árvore.



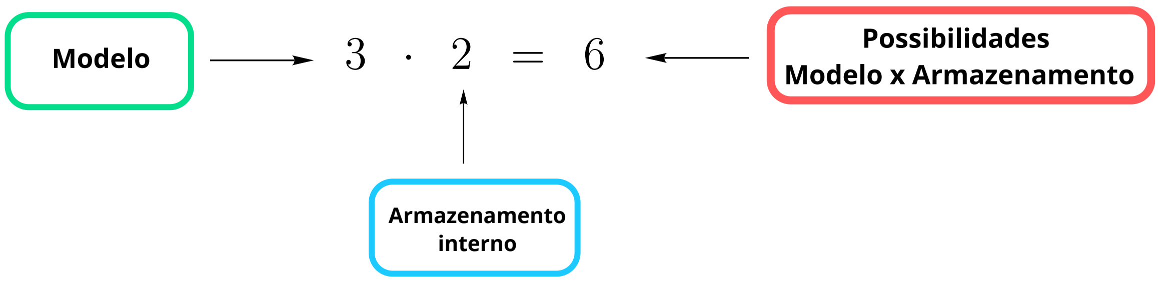


Vamos resolver um problema utilizando a árvore de possibilidades.

Carlos está planejando comprar um novo celular. Ao visitar uma loja, ele encontrou três modelos disponíveis: iPhone 16, Galaxy S25 e Xiaomi Ultra 8. Cada um desses modelos é oferecido com duas opções de armazenamento interno: 128 gb ou 256 gb. Sabendo que Carlos precisa escolher apenas um celular com uma das opções de armazenamento, de quantas maneiras diferentes ele pode fazer sua escolha?
Vamos organizar todas as opções na árvore de possibilidades.

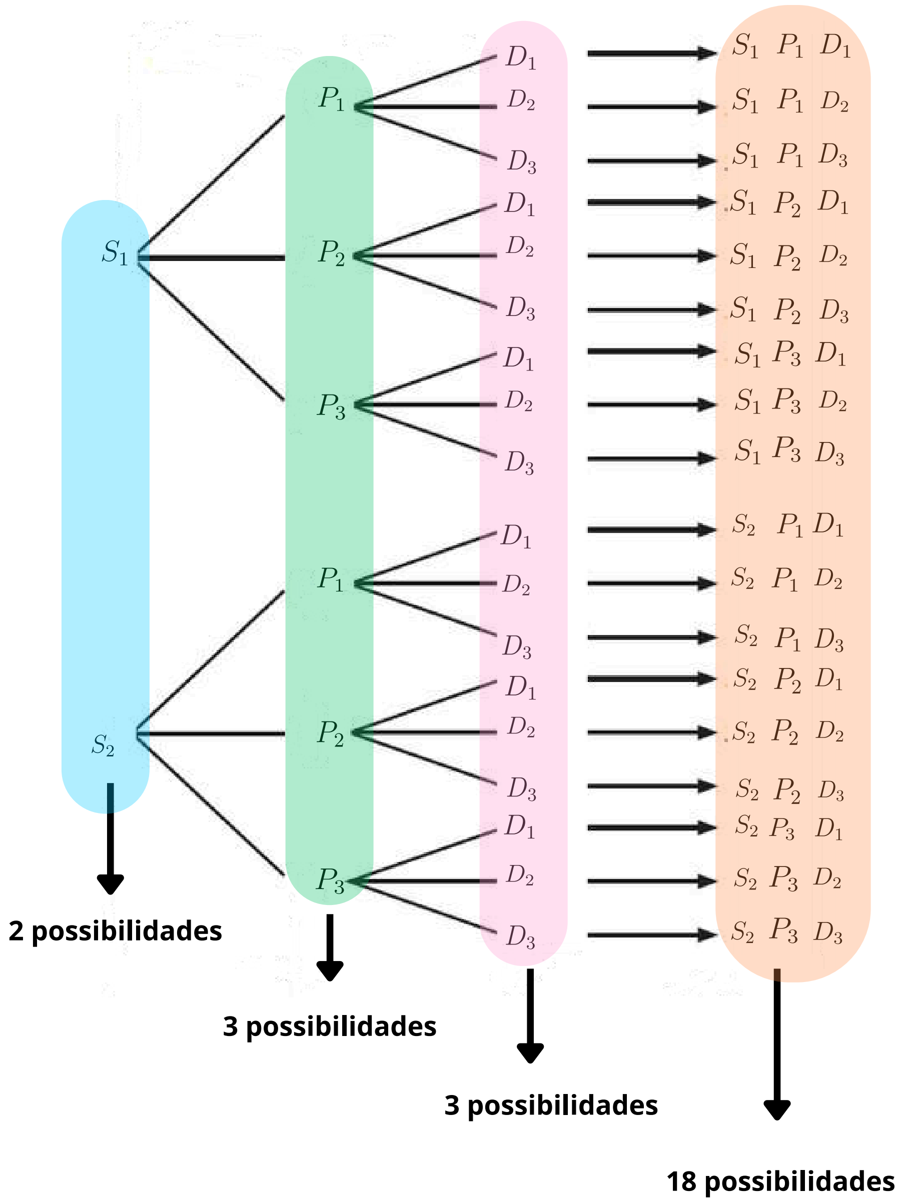


Cada opção de ***modelo*** pode ser combinada com cada opção de ***armazenamento interno***. Como são três modelos e dois tipos de armazenamento interno, efetuamos a seguinte multiplicação:



No próximo exemplo, você verá que podemos usar a árvore de possibilidades em situações mais complexas.
Em um restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer um refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa? Representando por S_1 e S_2 os 2 tipos de salada; por P_1, P_2 e P_3 os 3 tipos de pratos quentes; e por D_1, D_2 e D_3 os 3 tipos de sobremesa, podemos montar a árvore de possibilidades. Começando pela salada, depois pelos pratos quentes e por fim a sobremesa, temos:

- 2 possibilidades de salada;
- 3 possibilidades de pratos quentes; e
- 3 possibilidades de sobremesa.



Salada $\longrightarrow$ $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ $\longleftarrow$ **Possibilidades Salada + Prato quente + Sobremesa**

Prato quente **Sobremesa**

Portanto existem 18 maneiras diferentes de se escolher uma refeição nesse restaurante.

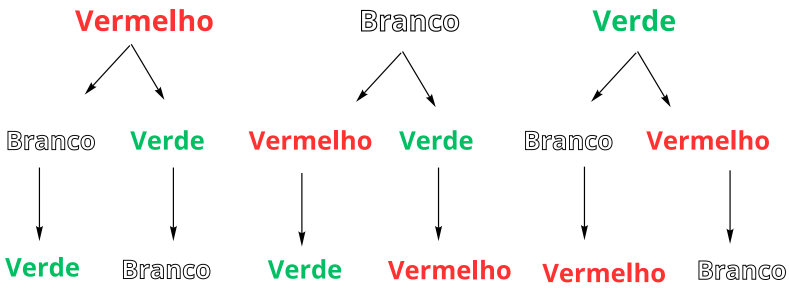
REVISANDO O QUE VOCÊ APRENDEU!

- **Princípio multiplicativo:** também chamado de princípio fundamental da contagem, é utilizado para encontrar o número de possibilidades para um evento constituído de n etapas.
- **Diagrama de árvore ou árvore de possibilidades**: trata-se de uma forma de organizar os dados do seu problema unindo as possibilidades com segmentos de reta, ramificando-as como uma árvore.

Exercícios Resolvidos

1) Um cocar indigena possui 3 cores : vermelho, branco e verde. Se forem utilizadas 3 penas de cores distintas quantos cocares diferentes podem ser confeccionados?

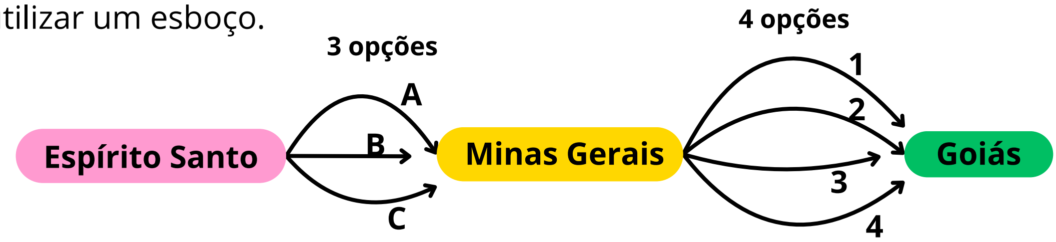
Resposta: Como temos 3 cores (vermelho, branco e verde), existem 3 opções iniciais. Após escolher a 1ª pena, restam apenas 2 opções disponíveis (pois não podemos repetir). Depois de escolher a 2ª pena, sobra apenas 1 opção para a 3ª.



Portanto podem ser confeccionados **6 cocares** diferentes com essas penas.

2) Uma pessoa quer viajar do Espírito Santo para Goiás passando por Minas Gerais. Sabendo que há 3 caminhos diferentes para chegar a Minas Gerais partindo do Espírito Santo e 4 caminhos diferentes para chegar a Goiás partindo de Minas Gerais, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar do Espírito Santo a Goiás?

Resposta: Vamos seguir três passos para resolver esse problema:
1°) **Dividir o problema em etapas**: temos 3 rotas do Espírito Santo até Minas Gerais (**A**, **B**, **C**) e 4 rotas de Minas Gerais até Goiás (**1**, **2**, **3**, **4**).
2°) **Contar as opções de cada etapa**: para facilitar a compreensão do problema, vamos utilizar um esboço.



3°) Multiplicar as opções: $3 \cdot 4 = 12$

Portanto, existem **12** rotas do Espírito Santo para Goiás, passando por Minas Gerais.

Material Extra

Jogo interativo com princípio multiplicativo
https://encurtador.com.br/vq1tf

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022. Páginas 133 e 134.

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática). Páginas 214 a 217.

Atividades

ATIVIDADE 1

Considere que uma pessoa tenha duas escolhas para a vestimenta:

Primeira escolha: calça, saia ou short .

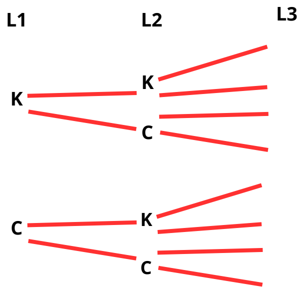
Segunda escolha: blusa azul, blusa branca ou blusa verde.

A) Ilustre essa situação por meio de um diagrama em árvore.

B) Admita que seja acrescentada para a vestimenta uma terceira escolha contendo sapato, tênis ou sandália. Ou seja, a vestimenta será composta por três escolhas. Nessas condições, de quantas maneiras essa pessoa pode escolher a vestimenta?

ATIVIDADE 2

Um professor, para mostrar aos estudantes as possibilidades de resultado que podem ocorrer no lançamento de uma moeda 3 vezes, desenhou o diagrama de árvore a seguir:



- *Admita "K" para cara e "C" para coroa.*

A) Complete o diagrama com os resultados do lançamento da terceira moeda.

B) De acordo com esse diagrama, quantas possibilidades diferentes de resultado temos para três lançamentos de moeda?

ATIVIDADE 3

Construa uma árvore de possibilidades sobre um cardápio de acordo com as seguintes instruções:
Primeira escolha: carne bovina, frango ou peixe;
Segunda escolha: feijão de caldo, feijão tropeiro ou polenta

ATIVIDADE 4

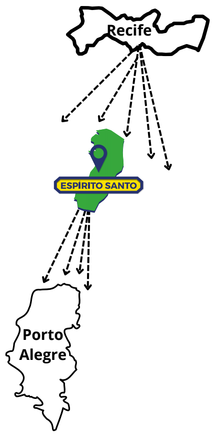
Quantos são os anagramas da palavra VILA?

Anagrama: permutação das letras de uma palavra formando novas palavras com ou sem sentido.


Vila Velha, Espírito Santo.

ATIVIDADE 5

Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando pelo Espírito Santo. Sabendo que há 5 caminhos diferentes para chegar ao Espírito Santo partindo de Recife e 4 caminhos diferentes para chegar a Porto Alegre partindo do Espírito Santo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?



ATIVIDADE 6

Antigamente, as placas de veículos no Brasil eram compostas por 3 letras (L) e 4 números (N), na forma **LLLNNNN**. Atualmente, o modelo de placas adotado é composto por 4 letras e 3 números, na forma **LLLNLNN**. Sabendo que cada letra pode ser escolhida dentre as 26 letras do alfabeto e que cada número pode ser escolhido dentre os algarismos de 0 a 9. Qual o aumento no número de combinações de placas ao passar do modelo antigo para o modelo novo?

ATIVIDADE 7

Bárbara e Giovana foram a uma lanchonete para tomar um suco e comer um lanche natural. No cardápio, verificaram que havia três opões de suco (laranja, melancia ou uva) e duas opções de lanche natural (simples ou completo). De quantas maneiras diferentes cada uma delas pode escolher um suco e um lanche?

ATIVIDADE 8

Um quiosque de comida italiana na Festa da Polenta em Venda Nova do Imigrante, que acontece todos os anos em homenagem a imigração Italiana no Município, oferece em seu cardápio três opções de macarrão: espaguete, pene e talharim. Cada uma dessas opções pode ser servida com uma dentre quatro opções de molho: branco, bolonhesa, pesto e ao sugo. De quantas maneiras distintas é possível compor um prato formado por uma opção de macarrão e uma opção de molho?

ATIVIDADE 9

Ao chegar ao aeroporto de Vitória, uma pessoa comprou um cadeado com senha de três dígitos para trancar a mala de viagem. Infelizmente, ela esqueceu a senha desse cadeado quando chegou a seu destino. Qual é o número máximo de vezes que ela deve tentar combinações de três dígitos para abrir a mala? Considere que cada dígito tem algarismos de 0 a 9 e que a senha pode apresentar algarismos repetidos.

ATIVIDADE 10

Em uma lanchonete são oferecidas diferentes opções de combo aos clientes. Veja.

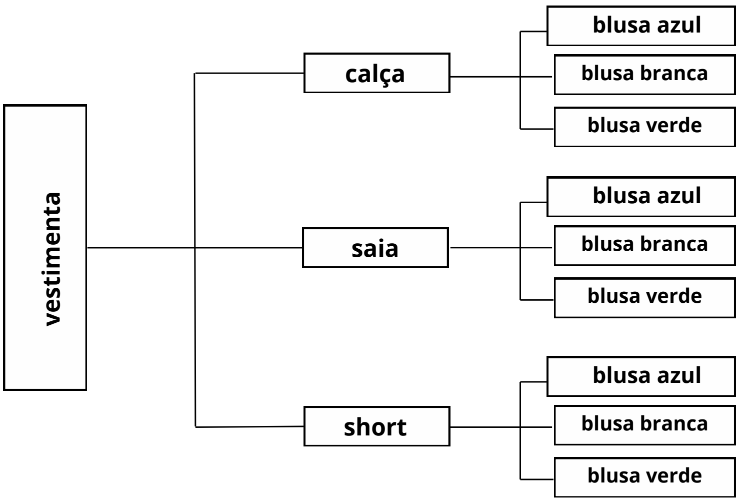
Fonte: Livro A conquista da matemática, José Giovanni Jurnior, 8ºano.

De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode montar um combo?

Gabarito

ATIVIDADE 01:

A)



B) 27 maneiras diferentes.

ATIVIDADE 02:

A) Terceiro lançamento:
(K, C, K, C, K, C, K, C)

B) Oito possibilidades.

ATIVIDADE 03:

Resposta Pessoal

ATIVIDADE 04:

24 anagramas.

ATIVIDADE 05:

20 maneiras.

ATIVIDADE 03:

Resposta Pessoal

ATIVIDADE 04:

24 anagramas.

ATIVIDADE 05:

20 maneiras.

ATIVIDADE 06:

281 216 000 novas placas.

ATIVIDADE 07:

6 maneiras diferentes.

ATIVIDADE 08:

12 maneiras diferentes.

ATIVIDADE 09:

Número máximo de 1000 tentativas de combinações de três dígitos.

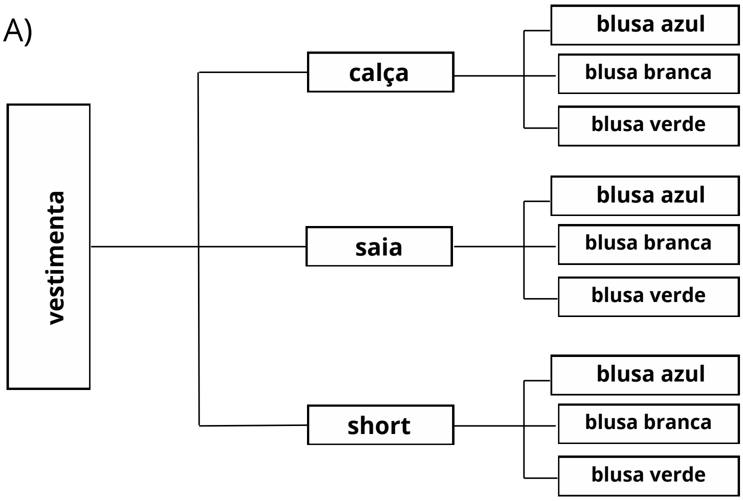
ATIVIDADE 10:

16 maneiras diferentes.

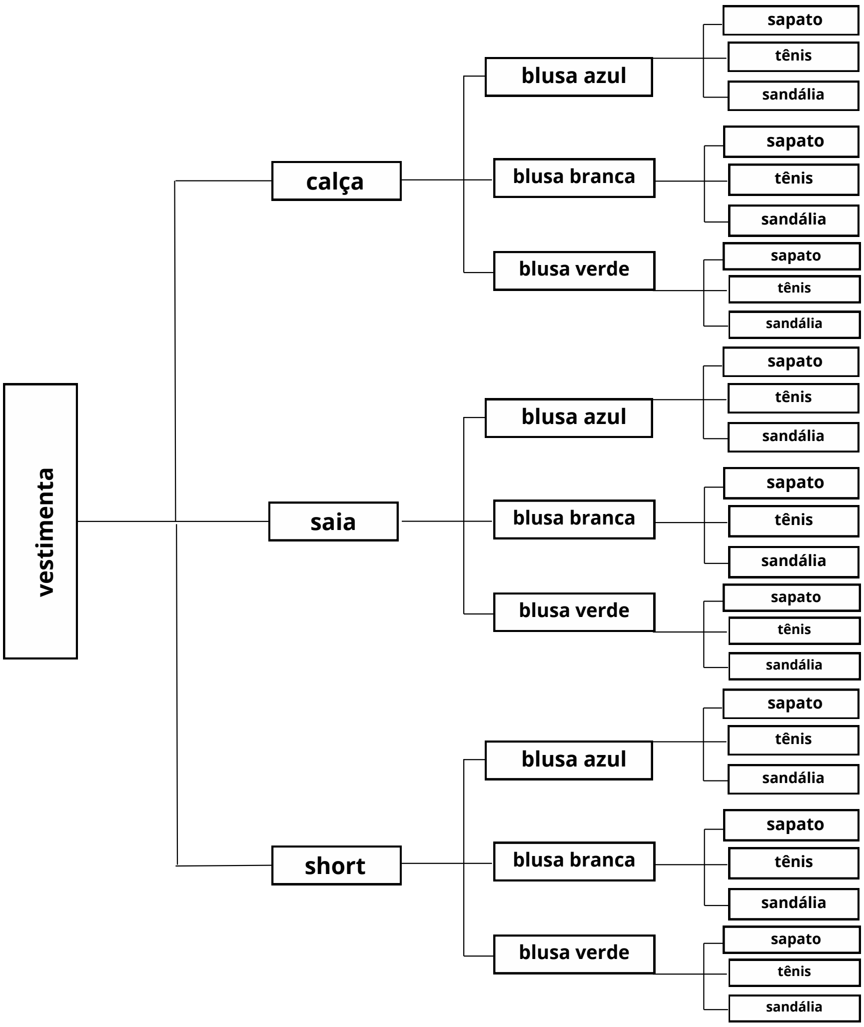
RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

A)



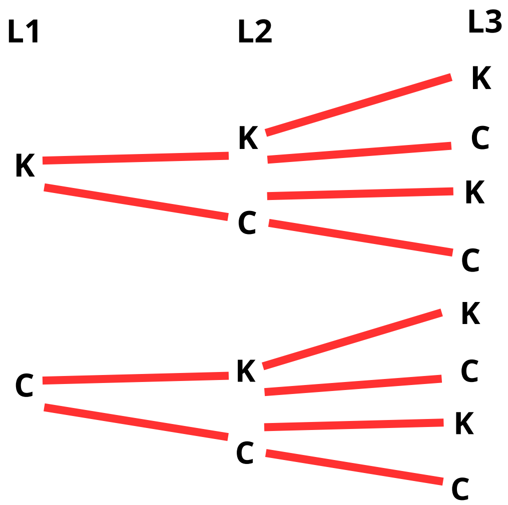
B) Multiplicamos as possibilidades: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ maneiras diferentes.



$(6 \cdot 6 = 36)$

ATIVIDADE 2

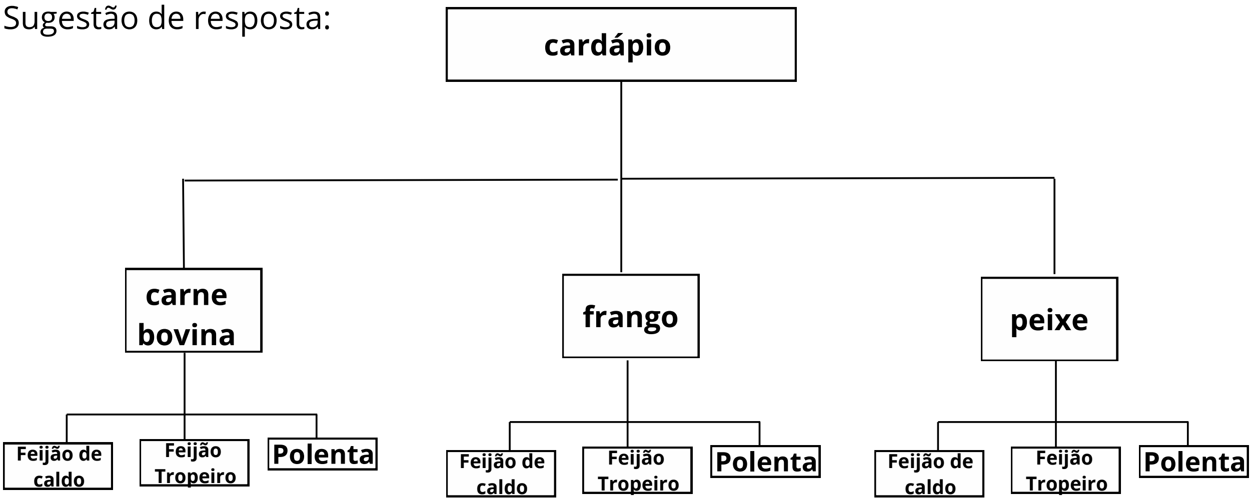
Note que no primeiro lançamento existem duas possibilidades: pode sair cara (K) ou pode sair coroa (C); Já no segundo lançamento, existem quatro sequências possíveis. São essas: {(K,K);(K,C);(C,K);(C,C)}; Ao considerarmos o terceiro lançamento, existem agora oito sequências possíveis, que são: {(K,K,K); (K,K,C); (K,C,K); (K,C,C); (C,K,K); (C,K,C); (C,C,K); (C,C,C)}. Pelo diagrama teremos:



Portanto temos oito sequências possíveis. De acordo com esse diagrama, a configuração do último ramo omitido de cima para baixo é:
(K, C, K, C, K, C, K, C)

ATIVIDADE 3

Resposta Pessoal.
Sugestão de resposta:



ATIVIDADE 4

A palavra VILA tem 4 letras, e qualquer uma dessas letras pode assumir a primeira posição na palavra. Escolhida essa letra, sobram outras 3 letras para a segunda posição. Na sequência, há 2 letras disponíveis para a terceira posição e, por fim, 1 letra para a quarta posição.

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Assim, há 24 anagramas da palavra VILA.

ATIVIDADE 5

Multiplicamos as possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$

Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre, passando pelo Espirito Santo.

ATIVIDADE 6

Para encontrar o número de placas que aumentaram após a adoção do novo modelo de placa, basta fazer a diferença entre o número de novas placas com o modelo novo e o número de placas com o modelo antigo.

Modelo novo:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456\ 976\ 000$$

Modelo antigo:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\ 760\ 000$$

Diferença:

$$456\ 976\ 000 - 175\ 760\ 000 = 281\ 216\ 000$$

ATIVIDADE 7

São 6 maneiras diferentes, 3 sucos e 2 sanduíches. $3 \cdot 2 = 6$

ATIVIDADE 8

Podemos resolver essa situação utilizando uma multiplicação, da quantidade de opções de macarrão pela quantidade de opções de molho Assim, temos $3 \cdot 4 = 12$ maneiras diferentes de compor um prato nesse quiosque.

ATIVIDADE 9

O número máximo de tentativas para abrir o cadeado corresponde à quantidade de possibilidades de combinações com os três dígitos do cadeado. Cada dígito possui 10 opções de algarismos. Assim, pelo princípio multiplicativo, concluímos que a quantidade de combinações de três dígitos é $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

ATIVIDADE 10

Nesse caso, três decisões podem ser tomadas: lanche (escolher o lanche entre as 4 opções possíveis), suco (escolher o sabor do suco entre as 2 opções possíveis) e doce (escolher o doce entre as 2 opções possíveis).

$$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Portanto, o número de maneiras distintas de tomar as decisões, são 16 maneiras diferentes.

Referências

A pintura e o traje tradicional fortalecem a identidade da etnia Haliti-Paresi. https://www.gov.br/funai/pt-br/assuntos/noticias/2022-02/a-pintura-e-o-traje-tradicional-fortalecem-a-identidade-da-etnia-haliti-paresi

Andrini, Álvaro Praticando matemática 7/ Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 4. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2015. – (Coleção praticando matemática; v. 8)

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é matemática, 7º ano - 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009. Plataforma Compartilha , Grupo Santilhana

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)

https://brasilescola.uol.com.br/matematica/produtos-notaveis.htm

GIOVANNIJUNIOR, José Ruy, CASTRUCCI, Benedicto. A Conquista da Matemática, 8°Ano. Ed. Renovada- São Paulo:FTD, 2009.

https://impa.br/noticias/na-folha-de-s-paulo-marcelo-viana-fala-da-plimpton-322/

IMPA. Portal da OBMEP: matemática. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 26 nov. 2024.