GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série| Ensino Médio

MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA FINANCEIRA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT303 Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.	• Identificar os principais elementos envolvidos no cálculo de juros simples: capital inicial (ou principal), taxa de juros, tempo e montante. • Diferenciar o conceito de juros simples (crescimento linear) do conceito de juros compostos (crescimento exponencial), compreendendo suas aplicações práticas. • Interpretar a fórmula de juros simples ($J=C \cdot i \cdot t$) e a relação entre seus elementos. • Analisar o comportamento linear do montante em situações de juros simples, identificando o impacto da variação da taxa de juros e do tempo. • Representar graficamente o montante de juros simples em função do tempo, utilizando o modelo de função de 1º grau $M(t) = C + J(t)$. • Resolver problemas de cálculo de juros simples, determinando capital, taxa, tempo, juros ou montante em diferentes contextos financeiros.	**D078_M** Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico.

Contextualização

04/03/2024 13h27 - Atualizado em 04/03/2024 13h40

Ministério da Educação lança Programa Pé-de-Meia no Espírito Santo

es.gov.br

es.gov.br

Lançamento regional do Programa Pé-de-Meia, do Ministério da Educação (MEC).

O desenvolvimento de habilidades de Matemática Financeira é essencial para que jovens possam tomar decisões conscientes sobre o uso e o planejamento de seus recursos no futuro. Nesse contexto, destacamos o Programa Pé-de-Meia, lançado pelo Ministério da Educação (MEC), que visa promover a permanência dos(as) alunos(as) no Ensino Médio público por meio de incentivos financeiros e educação financeira.

No Espírito Santo, o programa irá beneficiar mais de 31 mil estudantes, oferecendo depósitos mensais e anuais em contas de poupança. Esse incentivo não apenas promove a inclusão social e a permanência na escola, mas também é uma oportunidade única para que os jovens aprendam a gerenciar seus recursos e planejar seu futuro financeiro.

A ***Matemática Financeira***, parte central deste material, ajuda a entender como o dinheiro pode crescer ao longo do tempo, seja por meio de poupança ou investimentos. Dessa forma, o presente material contribuirá para compreender, por exemplo, como os depósitos do Programa Pé-de-Meia podem acumular e se transformar em valores significativos para apoiar os estudos e projetos futuros dos(as) jovens.

Imagine que o depósito de R$ 200 mensais realizado pelo programa seja aplicado em uma poupança com rendimento de ***juros simples***. Como podemos calcular o valor acumulado ao final de um ano? Como o dinheiro se comporta ao longo do tempo? A ***Matemática Financeira*** é a chave para responder a essas perguntas e para preparar os(as) estudantes para um consumo mais consciente e um futuro mais estável.

Este material, alinhado ao tema integrador de ***Educação Financeira e Consumo Consciente***, busca apresentar não apenas os conceitos matemáticos, mas também a importância de planejar e utilizar os recursos financeiros de forma responsável. Vamos juntos aprender e explorar as possibilidades que a Matemática Financeira pode oferecer!

BONS ESTUDOS!

Conceitos e Conteúdos

O QUE É MATEMÁTICA FINANCEIRA ?

Marcos, deseja comprar um celular novo que custa R$ 2 400,00. A loja oferece duas formas de pagamento:

- à vista, com um desconto de 10%, ou
- parcelado em 12 vezes fixas de R$ 220,00.

Qual é a melhor opção?

Para decidir, é necessário calcular os valores finais e comparar as condições de pagamento. Esse tipo de situação faz parte do cotidiano de muitas pessoas, e entender como analisar as diferentes opções pode ajudar a tomar decisões financeiras mais vantajosas e conscientes. É aqui que entra a matemática financeira.

A ***MATEMÁTICA FINANCEIRA*** é uma área prática da Matemática que estuda conceitos e métodos para resolver problemas ligados à questões financeiras, como empréstimos, financiamentos, investimentos e juros. Ela fornece ferramentas que ajudam a compreender e comparar valores ao longo do tempo, contribuindo para análise de vantagens e desvantagens, nas compras à vista ou a prazo e ainda para simplificar as operações financeiras a serem realizadas.
Neste material, vamos rever alguns conceitos relacionados a ***porcentagem*** e estudar situações envolvendo ***juros***.

ELEMENTOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

CAPITAL INICIAL (PRINCIPAL)

O ***capital inicial***, também chamado de principal, é o valor de partida em uma operação financeira, seja o valor investido, emprestado ou tomado como empréstimo.

TAXA DE JUROS

A taxa de juros é o percentual que indica a remuneração ou o custo pelo uso do capital em determinado período. É expressa em unidades de tempo, como ao mês (a.m) ou ao ano (a.a). É importante garantir que o tempo usado no cálculo seja compatível com a unidade da taxa.

JUROS SIMPLES

Os juros simples representam a remuneração obtida ou paga pelo uso de um capital durante determinado período, sendo calculados apenas sobre o valor inicial, ou seja, o capital (principal). A fórmula para o cálculo é:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Onde:

- J : Juros acumulados.
- C : Capital inicial (principal).
- i : Taxa de juros (em forma decimal).
- t : Tempo (em unidade compatível com a taxa de juros).

Exemplo:

Se você emprestar R$ 1 000,00 por 3 meses a uma taxa de juros simples de 2% ao mês, os juros serão:

$$J = 1000 \cdot 0{,}02 \cdot 3 = 60$$

Os juros acumulados são de R$ 60,00.

Observe que a taxa 2% pode ser representada na forma e fracionária $\frac{2}{100}$ ou na forma decimal 0,02 (obtida ao dividir o numerador 2 pelo denominador 100, da fração).

MONTANTE

O montante é o valor total acumulado ao final de uma operação financeira, sendo a soma do capital inicial com os juros. Sua fórmula é:

$$M = C + J$$

Ou, substituindo os juros simples (J) pela fórmula do cálculo:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Exemplo:

Se você investir R$ 1 000,00 por 3 meses, com uma taxa de juros simples de 2% ao mês:

$$\mathbf{M} = 1000 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 3) = 1000 \cdot 1{,}06 = 1060$$

O montante será de R$ 1 060,00.

Esses conceitos são essenciais para resolver problemas práticos no dia a dia, como cálculos de empréstimos, financiamentos ou investimentos.

JUROS COMPOSTOS

Os ***juros compostos*** são calculados de forma diferente dos juros simples: aqui, os juros ***acumulados*** são ***incorporados ao capital inicial*** e passam a gerar novos juros. Essa lógica é conhecida como “juros sobre juros”.

Exemplo:
Imagine que você invista R$ 1 000,00 em um fundo que rende 2% ao mês, no regime de juros compostos, durante 3 meses. Vamos calcular o montante final após a aplicação.

No regime de juros compostos, devemos considerar os juros calculados em cada período e adicioná-los ao capital anterior para constituir um novo capital, sobre o qual será calculado os juros do período posterior.
Assim temos:

- Cálculo do juro e do montante obtido no 1º mês:

$J = C \cdot i \cdot t$

$J = 1\,000 \cdot 0,02 \cdot 1 = 20$

$M = 1\,000 + 20 = 1\,020$ (montante ao final do 1º mês)

- Cálculo do juro e do montante obtido no 2º mês:

Agora, o capital inicial é o montante do mês anterior, ou seja, 1 020.

$J = 1\,020 \cdot 0,02 \cdot 1 = 20,40$

$M = 1\,020 + 20,40 = 1\,040,40$ (montante ao final do 2º mês)

- Cálculo do juro e do montante obtido no 3º mês:

O capital inicial é o montante do mês anterior, ou seja 1 040,40.

$J = 1\,040,40 \cdot 0,02 \cdot 1 = 20,81$

$M = 1\,040,40 + 20,81 = 1\,061,21$ (montante ao final do 3º mês)

Após 3 meses, o montante acumulado será R$ 1 061,21.
Os juros totais acumulados são R$ 61,21.

COMPARAÇÃO ENTRE JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS

No exemplo que vimos acima, observe a tabela de comparação entre os regimes de juros simples e compostos

Mês	Juros Simples	Montante Simples	Juros Compostos	Montante Composto
1	20,00	1 020,00	20,00	1 020,00
2	20,00	1 040,00	20,40	1 040,40
3	20,00	1 060,00	20,81	1 061,21

- Em ***juros simples***, o crescimento do montante segue uma ***progressão linear***, e os juros não mudam ao longo do tempo.
- Em ***juros compostos***, o crescimento segue uma ***progressão exponencial***, e o valor dos juros aumenta a cada período devido ao reinvestimento dos juros anteriores.

JURO SIMPLES E FUNÇÃO AFIM

Há uma relação direta entre o regime de ***juros simples*** e a ***função afim***, como veremos a seguir.

Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado a uma taxa de 15% ao ano. Vamos calcular o montante obtido, ano a ano, para o regime de juros simples e analisar os resultados.

Para calcular o montante, ano a ano, da aplicação em regime de juro simples, vamos utilizar a relação $\boldsymbol{M = C \cdot (1 + i \cdot t)}$, a partir da qual, ao substituirmos os valores $C = 1\,000$ e $i = 0{,}15$, temos:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$M = C + C \cdot i \cdot t$$

$$M = 1\,000 + 1\,000 \cdot 0{,}15 \cdot t$$

$$\mathbf{M = 1\,000 + 150}\boldsymbol{t}$$

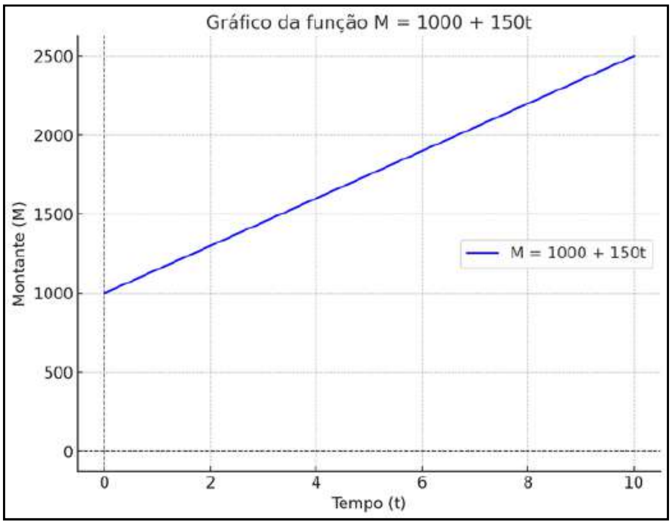
Observe que a expressão obtida é a lei da função afim , com variável dependente *M e* variável independente *t* . Ou seja, considerando que:

- f(x) = ax +b (função afim)
- M = 1 000 + 150t
- a = 150 e b= 1 000

Atribuindo para *t* os valores 1, 2, 3, 4, 5..., teremos os valores correspondentes de *M:*

t (anos)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
M (reais)	1 150	1 300	1 450	1 600	1 750	...

Utilizando os valores acima e sabendo que na função afim o gráfico é uma reta , veja o gráfico do montante.



- Ele representa uma relação linear, onde o montante *M* aumenta em 150 unidades para cada unidade de tempo *t*.
- O gráfico do montante em juros simples é uma ***reta crescente***, partindo do ponto (0 , C) .
- A ***inclinação da reta*** é diretamente proporcional à ***taxa de juros*** aplicada.

Exercícios Resolvidos

Caro(a) professor(a) este exercício irá abordar o cálculo de ***juros simples***.

EXERCÍCIO 1

Juliana pegou um empréstimo de R$ 2 000,00 para fazer uma reforma em sua casa. O banco informou que cobraria uma taxa de juros simples de 5% ao mês. Sabendo que ela levará 6 meses para quitar o empréstimo, qual será o total de juros que Juliana pagará?

SOLUÇÃO

A fórmula dos juros simples é: $\boldsymbol{J = C \cdot i \cdot t}$

Substituindo os valores:

Capital (C) = 2 000

Taxa (i) = 5% = 0,05

Tempo (t) = 6 meses

$$J = 2\,000 \cdot 0{,}05 \cdot 6$$
$$J = 600{,}00$$

Resposta: Juliana pagará ***R$ 600,00*** de juros ao final de 6 meses.

Caro(a) professor(a) este exercício irá abordar o cálculo do ***montante***, no regime de juros simples.

EXERCÍCIO 2

Um investidor decidiu investir R$ 1 500,00 em um título do governo que rende juros simples de 3% ao mês. Ele planeja deixar o dinheiro aplicado por 8 meses. Qual será o valor total (montante) acumulado ao final do período?

SOLUÇÃO

A fórmula do montante é: $\boldsymbol{M = C \cdot (1 + i \cdot t)}$

Substituindo os valores:

Capital (C) = 1 500

Taxa (i) = 3% = 0,03

Tempo (t) = 8 meses

$$M = 1\,500 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 8)$$
$$M = 1\,860$$

Resposta: O montante acumulado será R$ 1 860,00.

Caro(a) professor(a) este exercício irá abordar o cálculo do **capital**, no regime de juros simples.

EXERCÍCIO 3

Qual o valor a ser aplicado hoje, a uma taxa de juro simples de 2% ao mês, para que uma pessoa receba R$ 8 000,00 ao final de 6 meses ?

SOLUÇÃO

A fórmula do montante é: ***M = C · (1 + i · t)***

Substituindo os valores:

Montante = 8 000,00 Taxa (*i*) = 2% = 0,02 Tempo (*t*) = 6 meses

$$8000 = C \cdot (1 + 0,02 \cdot 6)$$
$$8000 = C \cdot (1 + 0,12)$$
$$C = \frac{8000}{1,12}$$
$$C = 7\ 142,86$$

Resposta: O valor a ser aplicado (capital inicial) deverá ser de R$ 7 142,86.

Caro(a) professor(a) este exercício irá abordar o cálculo da **taxa de juros**, no regime de juros simples.

EXERCÍCIO 4

canva

Em uma loja, um aparelho de TV é vendido com as seguintes condições:

À vista R$1 750,00
ou
Entrada de R$ 950,00 e
2ª parcela, um mês após a compra, de R$ 950,00

Qual a taxa de juros cobrada nesse financiamento?

SOLUÇÃO

Para descobrir a taxa de juros, primeiro devemos conhecer o valor dos juros que serão aplicados. Esse valor é obtido a partir do saldo devedor após a entrada. Para calcular o saldo devedor, subtraímos o valor da entrada do valor do produto:

C = 1 750 - 950 = 800

Após um mês, o saldo devedor de R$ 800,00 se converte num montante de R$ 950,00, o valor da 2ª parcela. Usando a fórmula do montante, temos:

$$M = C + C \cdot i \cdot t$$
$$950 = 800 + 800 \cdot i \cdot 1$$
$$950 - 800 = 800i$$
$$150 = 800i$$
$$i = \frac{150}{800}$$
$$i = 0,1875$$

Para transformar a taxa em porcentagem devemos multiplicar por 100

Resposta: a taxa de juros cobrada pela loja para essa opção de pagamento é de 18,75% ao mês.

Material Extra

LIVRO MATEMÁTICA EM CONTEXTOS - ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA FINANCEIRA

- Nas páginas 90 a 95 as atividades sugeridas são uma boa oportunidade para que os alunos possam revisar o conteúdo de porcentagem.
- Nas páginas 112 a 115 as atividades ali apresentadas podem ser usadas como aprofundamento dos estudos sobre juro simples e compostos.

LIVRO PRISMAS - SISTEMAS, MATEMÁTICA FINANCEIRA E GRANDEZAS

- Na página 73 as atividades apresentadas podem ser usadas como aprofundamento dos estudos sobre juro simples.
- Nas páginas 80 e 81 as atividades propostas são para tratar a relação da função afim com o juro simples.

SUGERIMOS QUE ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.

Regime de Juros Simples

Problemas sobre Juros Simples

Atividades

ATIVIDADE 1

Qual das seguintes afirmativas melhor descreve a ideia de **juros simples**?
A) Juros simples é calculado sobre o valor principal somado aos juros acumulados.
B) Juros simples envolve a adição de uma porcentagem fixa ao valor principal original em cada período.
C) Juros simples é calculado aplicando-se uma taxa de juros ao valor principal multiplicado pelo tempo.
D) Juros simples é calculado aplicando uma taxa de juros sobre o valor principal apenas uma vez no início do período de empréstimo.
E) Juros simples é um método de cálculo de juros que aumenta exponencialmente com o tempo.

ATIVIDADE 2

Qual das seguintes afirmativas está **correta** sobre a **taxa de juros simples**?
A) A taxa de juros simples é adicionada ao valor principal apenas uma vez no início do período de empréstimo.
B) A taxa de juros simples é aplicada sobre o valor principal original em intervalos regulares de tempo.
C) A taxa de juros simples aumenta exponencialmente com o tempo.
D) A taxa de juros simples é calculada aplicando-se uma taxa variável ao valor principal.
E) A taxa de juros simples considera os juros acumulados ao longo do tempo.

ATIVIDADE 3

Se um **empréstimo** de R$ 2 000,00 for contratado a uma **taxa de juros simples** de 5% ao mês, qual será o **valor total dos juros** acumulados em 6 meses?
A) R$ 300,00
B) R$ 600,00
C) R$ 500,00
D) R$ 700,00
E) R$ 200,00

ATIVIDADE 4

Ana **investiu** R$ 5 000,00 em um fundo de investimento que oferece uma **taxa de juros simples** de 3% **ao trimestre**. Após 9 meses (3 trimestres), qual será o **valor total dos juros** acumulados?

A) R$ 450,00
B) R$ 600,00
C) R$ 675,00
D) R$ 500,00
E) R$ 550,00

ATIVIDADE 5

Carlos **investiu** R$ 2 500,00 em um fundo que **rende 4% de juros simples** ao mês. Após **um período**, ele resgatou um montante de R$ 3 300,00. Por **quanto tempo** o capital de Carlos ficou aplicado?

A) 6 meses
B) 7,5 meses
C) 8 meses
D) 10 meses
E) 11,5 meses

ATIVIDADE 6

Mely **investiu** R$ 4 000,00 em um projeto e, após 10 meses, **recebeu um total** de R$ 5 200,00. Qual foi a **taxa de juros simples** aplicada ao seu investimento?

A) 2% ao mês
B) 2,5% ao mês
C) 3% ao mês
D) 3,5% ao mês
E) 4% ao mês

ATIVIDADE 7

Paulo **investiu** uma quantia a uma **taxa de juros simples** de 2,5% ao mês. Após um **período** de 12 meses, o **montante total** recebido foi de R$ 6.000,00. Qual das opções a seguir mais se aproxima do **capital investido** por Paulo?

A) R$ 4 500,00
B) R$ 4 600,00
C) R$ 4 700,00
D) R$ 4 800,00
E) R$ 4 900,00

ATIVIDADE 8

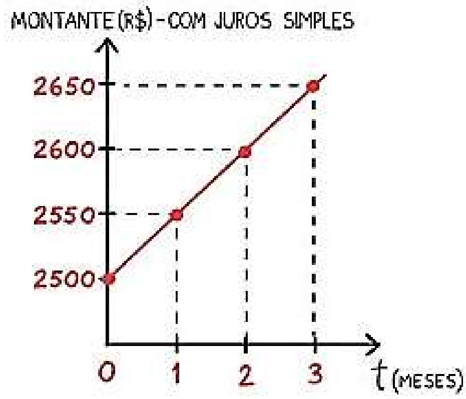
Um **capital** foi aplicado a **juros simples** de 5% ao mês. Em quanto **tempo** esse capital **dobrará de valor**?

A) 10 meses
B) 15 meses
C) 20 meses
D) 25 meses
E) 30 meses

ATIVIDADE 9

O **gráfico** a seguir mostra o **montante** de uma aplicação a **juros simples** em **função do tempo**. Qual é a **taxa mensal** envolvida nessa aplicação?

A) 50%
B) 20%
C) 10%
D) 5%
E) 2%



ATIVIDADE 10

Um **capital** de R$ 1 500,00 rende **juros simples** de 4% ao mês. Qual é a **lei** da **função afim** que representa o **montante** (M) em **função do tempo** (t)?

A) M(t) = 1 500 + 60t
B) M(t) = 1 500 + 0,04t
C) M(t) = 1 500 (1+0,4t)
D) M(t) = 1 500 (1+4t)
E) M(t) = 1 500 + 600t

Gabarito

ATIVIDADE 01: C
ATIVIDADE 02: B
ATIVIDADE 03: B
ATIVIDADE 04: A
ATIVIDADE 05: C
ATIVIDADE 06: C
ATIVIDADE 07: B
ATIVIDADE 08: C
ATIVIDADE 09: E
ATIVIDADE 10: A

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

O conceito de juros simples envolve calcular os juros apenas sobre o valor principal original do empréstimo ou investimento, sem considerar os juros acumulados de períodos anteriores.
Essa modalidade de juros é calculada aplicando-se uma taxa de juros ao valor principal multiplicado pelo tempo, portanto, a resposta correta é a ***alternativa C.***

ATIVIDADE 2

A taxa de juros simples é aplicada periodicamente sobre o valor principal original, sem levar em consideração os juros acumulados de períodos anteriores.
Em outras palavras, em cada período, os juros são calculados apenas sobre o valor inicial emprestado ou investido, e essa porcentagem fixa (taxa de juros) não muda ao longo do tempo. Portanto, a resposta correta é a ***alternativa B****.*

ATIVIDADE 3

Vamos aplicar os dados na fórmula que calcula juros simples usando a taxa percentual na forma decimal (5% = 0,05)

$$J = C \cdot i \cdot t = 2000 \cdot 0,05 \cdot 6 = 600$$

*Portanto, a alternativa correta é a **letra B**.*

ATIVIDADE 4

Vamos aplicar os dados na fórmula que calcula juros simples usando a taxa percentual i na forma decimal (3% = 0,03) e o período t = 3.

$$J = C \cdot i \cdot t = 5000 \cdot 0,03 \cdot 3 = 450$$

*Portanto, a alternativa correta é a **letra A**.*

ATIVIDADE 5

Isolando o tempo na fórmula dos juros simples, temos:

$$t = \frac{J}{C \cdot i}$$

Observe que foi investido R$ 2 500,00 com taxa mensal de 4% (0,04) e retirado R$ 3 300,00. Então, C = 2 500, J = 3 300 - 2 500 = 800 e i = 0,04.

$$t = \frac{800}{2500 \cdot 0,04} = 8$$

*Portanto, a alternativa correta é a **letra C**.*

ATIVIDADE 6

Isolando a taxa de juros simples na fórmula, temos:

$$i = \frac{J}{C \cdot t}$$

Substituindo os dados do problema com C = 4 000 , J = 5 200 - 4 000 = 1 200 e t = 10

$$i = \frac{1200}{4000 \cdot 10} = 0,03$$

*Portanto, a taxa de juros simples aplicada foi de 3% ao mês e a alternativa correta é a **letra C**.*

ATIVIDADE 7

Vamos aplicar esses dados na fórmula que calcula o montante M gerado por uma aplicação de um capital C com taxa de juros simples i durante um período t.

$$M = C \cdot (1 + it)$$

Isolando o capital C e substituindo os dados, fica

$$C = \frac{M}{1 + it}$$

$$C = \frac{6000}{1 + 0,025 \cdot 12} = \frac{6000}{1,3} = 4615,38$$

A alternativa que mais se aproxima é a alternativa correta é a ***letra B****.*

ATIVIDADE 8

Sendo C esse capital, então daqui a t meses teremos um montante M = 2C. Aplicando na fórmula do montante

$$M = C \cdot (1 + it)$$

$$2C = C \cdot (1 + 0,05t)$$

$$2 = 1 + 0,05t$$

$$t = \frac{2 - 1}{0,05} = 20$$

Logo, esse capital vai dobrar em 20 meses e a alternativa correta é a ***letra C****.*

ATIVIDADE 9

Tomando como referência no gráfico o ponto (2, 2600) podemos entender que, depois de um período t = 2 meses, o capital inicial C = 2500 tinha gerado um montante M = 2600. Aplicando esses valores na fórmula do montante a juros simples.

$$M = C \cdot (1 + it)$$

$$2600 = 2500 \cdot (1 + i \cdot 2)$$

$$\frac{2600}{2500} = 1 + 2i$$

$$1,04 - 1 = 2i$$

$$i = \frac{0,04}{2} = 0,02$$

Portanto, a taxa mensal envolvida nessa aplicação é de 2% alternativa ***E.***

ATIVIDADE 10

Aplicando os dados na fórmula do Montante a juros simples.

$$M = C + Cit$$

$$M(t) = 1500 + 1500 \cdot 0,04t$$

$$M(t) = 1500 + 60t$$

Portanto, a opção correta é a ***letra A****.*

Referências

ACADEMIA KHAN. Problemas sobre juros simples. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:estudo-das-taxas/x34e9dd8107ca5eda:juros-simples/e/simple-interest-word-problems . Acesso em: 23 jan. 2025.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

YOUTUBE. O que é razão e proporção? Disponível em : https://www.youtube.com/watch ? v = nYAsLjVPNuA . Acesso em: 23 jan. 2025.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série| Ensino Médio

MATEMÁTICA

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS - POLINÔMIOS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EF09MA27/ES - Reconhecer as diversas representações algébricas e as principais operações com polinômios. **EF09MA09 -** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.	• Identificar polinômios reconhecendo seus coeficientes, variáveis, termos e grau. • Realizar adição e subtração de polinômios, organizando termos semelhantes e simplificando expressões. • Realizar multiplicação de polinômios, aplicando a distributiva e os produtos notáveis (ex.: quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença). • Dividir polinômios por monômios ou por outros polinômios de menor grau, utilizando métodos algébricos (divisão longa ou por inspeção). • Representar polinômios em diferentes formas, como padrão (reduzida), expandida e fatorada.	**D087_M** Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.

Contextualização

LÁ VEM HISTÓRIA...

A ***Álgebra*** surgiu há milênios, com os primeiros registros de seu estudo encontrados em civilizações antigas como as mesopotâmicas e egípcias. Inicialmente, seu foco estava na resolução de problemas envolvendo valores desconhecidos. Um dos mais antigos exemplos de problemas algébricos conhecidos está no papiro de Rhind, um documento egípcio copiado por volta de 1650 a.C. por Ahmes, um escriba da época. Esse papiro foi encontrado em 1858 na cidade de Luxor, no Egito, por Henry Rhind, um antiquário escocês. Muitos dos problemas apresentados nesse papiro faziam uso da incógnita "aha" para representar as quantidades desconhecidas.

GOOGLE

Capa da obra Aritmética, de Diofante. Edição de 1621.

Diofante, um matemático grego que viveu em Alexandria, entre 221 e 305 d.C., foi o pioneiro no uso sistemático de símbolos para representar incógnitas, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da Álgebra.

Embora o estudo da Álgebra tenha começado na Antiguidade, o termo "álgebra" só foi adotado mais tarde. A palavra deriva da expressão árabe al-jabr, que significa "reunir" ou "juntar", e foi utilizada no título do livro Hisab al-jabr w'al-mugabalah, escrito por volta de 825 d.C. por Al-Khwarizmi, matemático árabe que também introduziu o sistema numérico decimal e os algarismos indo-arábicos no Ocidente.

A partir do século XI, com a tradução dessa obra para o latim, o estudo das equações com uma ou mais incógnitas passou a ser conhecido como Álgebra na Europa.

canva

Estátua de Al-Khwarizmi em Khiva, no Uzbequistão.

Ao longo dos séculos, matemáticos europeus como Descartes e Newton expandiram as ideias sobre álgebra, introduzindo conceitos e notações que permitiram a manipulação de expressões mais complexas, como os ***polinômios,*** por sua vez, são um tipo especial de expressão algébrica que permite modelar fenômenos como o crescimento populacional, os custos de produção e o movimento dos corpos celestes.
Neste material, iremos aprofundar nossos estudos sobre os polinômios.

BONS ESTUDOS!

Conceitos e Conteúdos

O QUE É ALGEBRA?

"A Álgebra surgiu há milênios, com os primeiros registros de seu estudo encontrados em civilizações antigas como as mesopotâmicas e egípcias."

Neste trecho do texto de contextualização, vemos que a linguagem algébrica começou no mundo antigo. Mas o que é essa ***Álgebra***?

A álgebra é um ramo da matemática que se dedica ao estudo de estruturas, relações e operações utilizando ***símbolos*** e ***letras*** para representar números e expressar relações gerais. Esses símbolos são utilizados para resolver problemas matemáticos de forma mais ampla e abstrata, permitindo que se trabalhe com incógnitas, equações e fórmulas.

Origem do Termo
A palavra "álgebra" vem do árabe al-jabr, que significa "reunião de partes quebradas" ou "restauração". Esse termo foi popularizado pelo matemático persa Al-Khwarizmi, em seu livro Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala no século IX, onde ele apresentou métodos para resolver equações lineares e quadráticas.

A álgebra é, portanto, uma linguagem universal da Matemática que nos ajuda a entender padrões, resolver problemas e descrever o mundo ao nosso redor de forma lógica e organizada.

Observe exemplos de uso de variáveis em expressões algébricas.

LINGUAGEM USUAL	LINGUAGEM MATEMÁTICA
O dobro de um número.	$2x$
O quadrado de um número.	x^2
Um número mais cinco.	$x + 5$
O triplo, de um número menos seis.	$3x - 6$
A soma de dois números.	$x + y$

Expressões como essas são chamadas de expressões algébricas. Elas são formadas por números, letras e sinais de operações.

O QUE É MONÔMIO?

Um ***monômio*** é uma ***expressão algébrica*** formada por um número (coeficiente) multiplicado por uma ou mais variáveis elevadas a potências inteiras e não negativas.
Veja alguns exemplos de monômios:

$3x^2$ $\quad$ $5g$ $\quad$ $-7ac$ $\quad$ $\frac{y^4}{2}$ $\quad$ $-\frac{2}{3}t^3$ $\quad$ $1,5bn^2$

Um monômio tem uma parte numérica (coeficiente) e uma parte literal.

Vamos identificar cada parte nos exemplos acima:

$3x^2$
- coeficiente: 3
- parte literal: x^2

$5g$
- coeficiente: 5
- parte literal: *g*

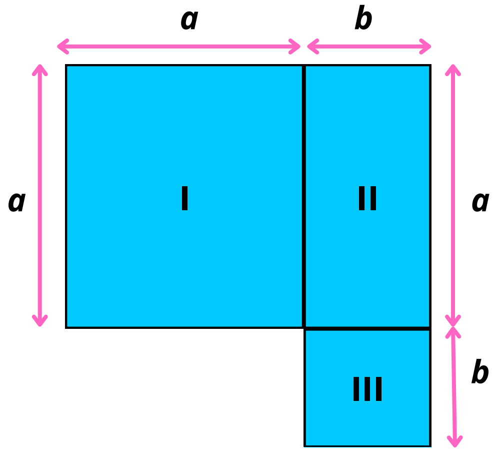
$-7ac$
- coeficiente: -7
- parte literal: *ac*

$\frac{y^4}{2}$
- coeficiente: $\frac{1}{2}$
- parte literal: y^4

$-\frac{2}{3}t^3$
- coeficiente: $-\frac{2}{3}$
- parte literal: t^3

$1,5bn^2$
- coeficiente: 1,5
- parte literal: bn^2

O QUE É POLINÔMIO?



Observe a figura ao lado. Vamos determinar a medida de **área total** dela.
Para isso, vamos calcular a medida de área de cada uma das partes **I**, **II** e **III** e somá-las.

- Medida de área de **I** : a^2
- Medida de área de **II** : ab
- Medida de área de **III** : b^2
- Medida de área total : $a^2 + ab + b^2$

A expressão algébrica $a^2 + ab + b^2$ indica uma adição de monômios não semelhantes.

*Toda expressão que indica uma adição ou subtração de monômios não semelhantes é chamada de **polinômio**.*

Cada monômio é chamado de ***termo do polinômio***.
Então, a expressão que indica a área da figura acima é um polinômio.

$a^2 + ab + b^2$

polinômio

Em alguns casos, os polinômios recebem nomes especiais: monômio, que você já viu, binômio ou trinômio. Veja alguns exemplos.

Número de termos	Nome	Exemplos
1	monômio	$2xy$
2	binômio	$a^2 - p^3$
3	trinômio	$c^2 + 3cd - d^3$

MONÔMIOS SEMELHANTES OU TERMOS SEMELHANTES

Considere os monômios $\boldsymbol{5xy}$, $\boldsymbol{-2xy}$ *e* $\boldsymbol{12xy}$. Observe que eles apresentam a mesma parte literal $\boldsymbol{xy}$.

Monômios que apresentam a mesma parte literal são chamados de monômios semelhantes ou termos semelhantes.

GRAU DO POLINÔMIO

Vejamos primeiramente o grau de um monômio.

O grau de um monômio é dado pela adição de todos os expoentes da parte literal.

Observe os exemplos:

- $\boldsymbol{8x^2y^1}$ é um monômio do 3º grau. Pois, somando os expoentes da parte literal temos 2 + 1 = 3.
- $\boldsymbol{5x^4}$ é um monômio do 4º grau.
- $\boldsymbol{0{,}5b}$ é um monômio de 1º grau.
- $\boldsymbol{-6}$ é um monômio de grau zero, pois - 6 é o mesmo que $\boldsymbol{-6x^0}$.

Agora, veja o significado de grau de um polinômio qualquer.

O grau de um polinômio é dado pelo termo de maior grau depois de reduzidos os termos semelhantes.

Exemplos:

- $\mathbf{5x^2 + 3x - 5}$ é um polinômio do 2º grau.
- $\boldsymbol{2x^4y^2}$ é um polinômio do 6º grau, pois somando os expoentes 4 + 2 = 6.
- $\boldsymbol{bcd}$ é um monômio de 3º grau, pois somando os expoentes 1 + 1 +1 = 3.
- $\boldsymbol{x^2 + 5x - x^2 - 10}$ é um polinômio de 1º grau. Juntamos os termos semelhantes temos $\boldsymbol{5x - 10}$, já que x = $\boldsymbol{x^1}$.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

Em uma cidade do interior, uma construtora planeja construir dois edifícios: o Residencial Sol Nascente e o Residencial Pôr do Sol.

O Residencial Sol Nascente terá os apartamentos distribuídos em 9 andares, além de um apartamento no térreo.

Já o Residencial Pôr do Sol será mais compacto, com 6 andares, mas terá 4 apartamentos a mais por andar do que o Residencial Sol Nascente, além de um apartamento no térreo.

Se o Residencial Sol Nascente tiver ***n*** apartamentos por andar, quantos apartamentos no total serão construídos nos dois edifícios?

Vamos resolver esta situação problema:

Residencial Sol Nascente:

- Número de andares: 9
- Apartamentos por andar: n
- Apartamento no térreo: 1

O total de apartamentos no Residencial Sol Nascente será:

Total do Sol Nascente = 9n + 1 polinômio

Residencial Pôr do Sol:

- Número de andares: 6
- Apartamentos por andar: n + 4 (pois tem 4 apartamentos a mais por andar do que o Sol Nascente)
- Apartamento no térreo: 1

O total de apartamentos no Residencial Pôr do Sol será:

Total do Pôr do Sol = 6(n + 4) + 1 = 6n + 25 polinômio

Para determinar o número total de apartamentos que a empresa planeja construir nesses dois edifícios, precisamos adicionar ***9n + 1*** a ***6n + 25***.

Dados os polinômios A = 9n + 1 e B = 6n + 25, indicamos a soma **A + B** como segue:

A + B = (9n + 1) + (6n + 25)

Para calcular essa soma:

• eliminamos os parênteses, indicando a soma de todos os termos de A com todos os termos de B:

A + B = 9n + 1 + 6n + 25

• reduzimos os termos semelhantes:

A + B = ***9n*** + ***1*** + ***6n*** + ***25***

A + B = ***15n*** + ***26***

Assim, respondendo à pergunta do problema proposto, considerando os dois edifícios, serão construídos ***15n + 26*** apartamentos.

Agora vamos calcular a ***diferença*** entre a quantidade de apartamentos do Residencial Pôr do Sol e Residencial Sol Nascente.
Sabemos que:

- ***Quantidade de apartamentos Pôr do Sol = 6n + 25***
- ***Quantidade de apartamentos Sol Nascente = 9n + 1***

Para determinar a diferença de apartamentos nesses dois edifícios, precisamos subtrair **9n + 1** de **6n + 25**.
Dados os polinômios A = 6n + 25 e B = 9n + 1, indicamos a subtração **A - B** como segue:

$$\mathbf{A - B} = (6n + 25) - (9n + 1)$$

Para calcular essa subtração:

- eliminamos os parênteses, indicando a subtração de todos os termos de A com todos os termos de B:

$$\mathbf{A - B =} 6n + 25 - 9n - 1$$

- reduzimos os termos semelhantes:

$$\mathbf{A - B} = -3n + 24$$

Portanto, a diferença na quantidade de apartamentos entre o Residencial Pôr do Sol e o Residencial Sol Nascente é ***−3n + 24***.

Em resumo temos:

Na adição e subtração de polinômios, eliminamos os parênteses e reduzimos os termos semelhantes.

Veja o exemplo:

Dados os polinômios $\mathbf{A = 3x^2 + 2x}$ e $\mathbf{B = 2x^2 + x}$, vamos indicar a adição por A + B e a subtração por A - B.
Para calculá-las, eliminamos os parênteses e reduzimos os termos semelhantes.

ADIÇÃO

$$\mathbf{A + B} = (3x^2 + 2x) + (2x^2 + x)$$

$$\mathbf{A + B} = 3x^2 + 2x + 2x^2 + x$$

$$\mathbf{A + B = 5x^2 + 3x}$$

SUBTRAÇÃO

$$\mathbf{A - B} = (3x^2 + 2x) - (2x^2 + x)$$

$$\mathbf{A - B} = 3x^2 + 2x - 2x^2 - x$$

$$\mathbf{A - B = x^2 + x}$$

MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

Caro(a) professor(a) no material estruturado da quinzena 2, nas páginas 8 e 9 os alunos poderão revisar as propriedades da potenciação.

PRODUTO DE MONÔMIOS

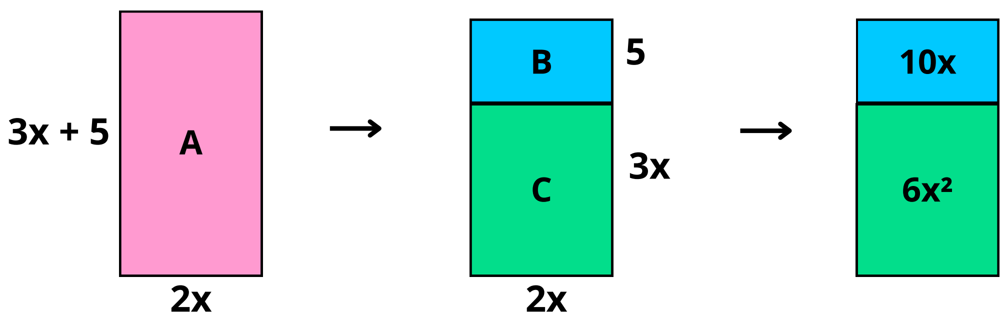
Dados 2 monômios, podemos sempre obter um novo monômio pela ***multiplicação*** deles. Para isso, usamos algumas propriedades da multiplicação e da potenciação.

$$\underbrace{(4x^2)\cdot(3x^3)}_{\text{Propriedades comutativa e associativa da multiplicação}} = (4\cdot 3)\cdot\underbrace{(x^2\cdot x^3)}_{\text{Propriedade do produto de potências de mesma base}} = 12x^{2+3} = 12\,x^5$$

O produto de dois monômios é aquele cujo coeficiente é o produto dos coeficientes dos monômios dados e cuja parte literal é o produto das respectivas partes literais.

MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIO POR POLINÔMIO

Você sabe calcular o produto $(2x)\cdot(3x+5)$?
Podemos interpretar geometricamente essa multiplicação. Veja:



área A = área C + área B

$$(3x+5)\cdot(2x) = 3x\cdot 2x + 5\cdot 2x = 6x^2 + 10x$$

Observe como multiplicamos um monômio por um polinômio:

$(3x)\cdot(4x+5) =$

$= 3x\cdot 4x + 3x\cdot 5 =$

$= 12x^2 + 15x$

$-x\cdot(x^2 - 3x + 4) =$

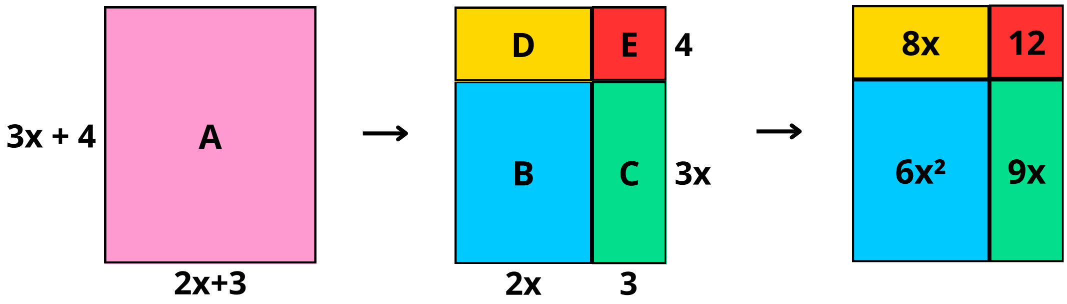
$= -x\cdot x^2 - x\cdot(-3x) - x\cdot 4 =$

$= -x^3 + 3x^2 - 4x$

Na multiplicação de um monômio por um polinômio, aplicamos a propriedade distributiva: multiplicamos o monômio por todos os termos do polinômio e adicionamos os termos semelhantes

PRODUTO DE POLINÔMIOS

Vamos calcular o produto $(2x+3) . (3x + 4)$.
Podemos interpretar geometricamente essa multiplicação. Veja:



área A = área B + área C + área D + área E

$$(2x + 3)(3x + 4) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 4 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 4 = 6x^2 + 8x + 9x + 12 = 6x^2 + 17x + 12$$

- Agora, acompanhe, nos exemplos, como multiplicamos esses polinômios usando a propriedade distributiva:

$$(2x + 3)(3x + 4) =$$

$$= 2x \cdot 3x + 2x \cdot 4 + 3 \cdot 3x + 3 \cdot 4 =$$
$$= 6x^2 + 8x + 9x + 12 =$$
$$= 6x^2 + 17x + 12$$

$$(x - 2)(x^2 + 3x - 1) =$$

$$= x \cdot x^2 + x \cdot 3x - x \cdot 1 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 3x + 2 \cdot 1$$
$$= x^3 + 3x^2 - x - 2x^2 - 6x + 2$$
$$= x^3 + x^2 - 7x + 2$$

- Multiplicação de três ou mais polinômios

Para multiplicar três ou mais polinômios, devemos multiplicar os dois primeiros, depois multiplicar o resultado pelo polinômio seguinte, e assim por diante. Veja o exemplo:

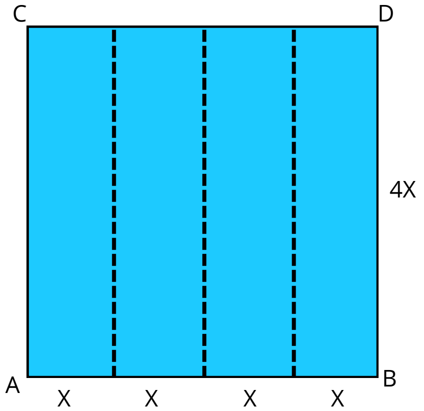
$$(x + 2)(x + 1)(2x - 1) = (x^2 + x + 2x + 2) \cdot (2x - 1) =$$
$$= (x^2 + 3x + 2) \cdot (2x - 1) =$$
$$= 2x^3 - x^2 + 6x^2 - 3x + 4x - 2 =$$
$$= 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

Para multiplicar dois polinômios, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro e adicionamos os termos semelhantes. O polinômio obtido é denominado produto dos polinômios dados.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Dividindo uma área

Qual é a área do quadrado ***ABCD*** ? E a área de cada retângulo?



Área do quadrado ABCD = $(4x)^2 = 16x^2$

Área de cada retângulo = $x \cdot 4x = 4x^2$

- ***Monômio dividido por monômio***

Na figura acima, o quadrado de área $16x^2$ está dividido em quatro partes iguais. A área de cada parte também pode ser assim calculada:

$$(16x^2) : 4 = \frac{16x^2}{4} = \frac{16}{4}x^2 = 4x^2$$

Veja outras divisões de monômios:

- $15x^3 : 3x = \frac{15x^3}{3x} = \frac{15}{3} \cdot \frac{x^3}{x} = 5x^{3-1} = 5x^2$
- $-12x^3y^2 : 8x^2y^2 = \frac{-12x^3y^2}{8x^2y^2} = \frac{-12}{8} \cdot \frac{x^3y^2}{x^2y^2} = -\frac{3}{2}x^{3-2}y^{2-2} = -\frac{3}{2}x^1y^0 = -\frac{3}{2}x$

Para dividir dois monômios, dividimos os respectivos coeficientes e partes literais.

Divisão de polinômio por monômio

Veja como dividimos polinômio por monômio:

- $(5x^4 + 3x^3) : x^2 = \frac{5x^4 + 3x^3}{x^2} = \frac{5x^4}{x^2} + \frac{3x^3}{x^2} = 5x^{4-2} + 3x^{3-2} = 5x^2 + 3x$
- $(y^5 - 3y^3 + 2y^2) : (3y^2) = \frac{y^5 - 3y^3 + 2y^2}{3y^2} = \frac{y^5}{3y^2} - \frac{3y^3}{3y^2} + \frac{2y^2}{3y^2} = \frac{1}{3}y^3 - y + \frac{2}{3}$
- $(2a^4b^3 - a^3b^2) : (4a^3b) = \frac{2a^4b^3 - a^3b^2}{4a^3b} = \frac{2a^4b^3}{4a^3b} - \frac{a^3b^2}{4a^3b} = \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{4}b$

Para dividir um polinômio por um monômio, dividimos cada termo do polinômio pelo monômio e adicionamos os resultados.

Divisão de polinômio por polinômio

Dividir polinômios é uma operação importante na álgebra, e pode ser realizada de diferentes formas, dependendo do tipo de divisor. Vamos explorar os métodos mais comuns de divisão: ***divisão longa*** e ***divisão por inspeção*** .

Divisão Longa

Quando dividimos um polinômio por outro polinômio de grau menor, usamos a divisão longa de polinômios , que é um processo semelhante à divisão longa de números. No exemplo a seguir, mostraremos como se efetua a divisão de polinômios.

- Vamos dividir o polinômio ***A* = *x*² + 3*x* + 2** por ***B* = *x* + 1**

1º) Dividimos o termo de maior grau de **A** (x^2) pelo termo de maior grau de **B** (x) e colocamos o resultado no quociente:

$x^2 : x = x$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 3x + 2 & x + 1 \\ \cline{2-2} & x \end{array}$$

2º) Multiplicamos o quociente obtido (x) pelo divisor e subtraímos o resultado do dividendo. Obtemos, assim, um resto parcial:

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 + 3x + 2 & x + 1 \\ \cline{3-3} & -x^2 - x & x \\ \cline{2-2} \text{resto parcial} \longrightarrow & 2x + 2 & \end{array}$$

3º) Dividimos o termo de maior grau do resto parcial ($2x$) pelo termo de maior grau do divisor (x). O resultado é um termo que acrescentamos ao quociente:

$2x : x = 2$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 3x + 2 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^2 - x & x + 2 \\ \cline{1-1} 2x + 2 & \end{array}$$

4º) Multiplicamos esse termo (2) pelo divisor e subtraímos o resultado do resto anterior:

$$\begin{array}{rl|l} & x^2 + 3x + 2 & x + 1 \\ \cline{3-3} & -x^2 - x & x + 2 \\ \cline{2-2} & 2x + 2 & \\ & -2x - 2 & \\ \cline{2-2} \text{resto} \longrightarrow & 0 & \end{array}$$

O resto obtido tem grau menor que o do divisor. Então, o quociente é x+2 e o resto é R = 0. Finalizamos a divisão quando encontramos um resto igual a zero ou um resto que é um polinômio de grau menor do que o grau do divisor.

Divisão por Inspeção

A divisão por inspeção é uma técnica mais rápida, geralmente usada quando o divisor é um polinômio de grau 1 e o problema pode ser resolvido diretamente, sem a necessidade de uma longa sequência de cálculos.

- Vamos dividir o polinômio $A = x^2 + 5x + 6$ por $B = x + 2$

1º) Pergunte: "O que multiplicado por x dá x^2?". A resposta é x.

2º) Multiplique $x + 2$ por x para obter $x^2 + 2x$

3º) Subtraia $x^2 + 5x + 6$ por $x^2 + 2x$, o que dá:

$$(x^2 + 5x + 6) - (x^2 + 2x) = 3x + 6$$

4º) Pergunte: "O que multiplicado por x dá $3x$?" A resposta é 3.

5º) Multiplique $x + 2$ por 3 para obter $3x + 6$.

6º) Subtraia $3x + 6$ por $3x + 6$, o que dá:

$$(3x + 6) - (3x + 6) = 0$$

Resultado: O quociente é $x + 3$, e o resto é 0.

- Vamos dividir o polinômio $A = x^2 + 3x + 2$ por $B = x + 1$

1º) Pergunte: "O que multiplicado por x dá x^2?" . A resposta é x.

2º) Multiplique $x + 1$ por x para obter $x^2 + x$

3º) Subtraia $x^2 + 3x + 2$ por $x^2 + x$, o que dá:

$$(x^2 + 3x + 2) - (x^2 + x) = 2x + 2$$

4º) Pergunte: "O que multiplicado por x dá $2x$?" A resposta é 2.

5º) Multiplique $x + 1$ por 2 para obter $2x + 2$.

6º) Subtraia $2x + 2$ por $2x + 2$, o que dá:

$$(2x + 2) - (2x + 2) = 0$$

Resultado: O quociente é $x + 2$, e o resto é 0.

TIPOS DE REPRESENTAÇÃO DOS POLINÔMIOS

Os polinômios podem ser representados de diferentes maneiras, dependendo do formato em que se deseja expressá-los. As formas mais comuns de representação de um polinômio são forma ***padrão (ou reduzida)***, ***forma expandida*** e ***forma fatorada***. Cada uma dessas representações tem suas características e pode ser útil em diferentes contextos.

FORMA PADRÃO (OU FORMA REDUZIDA)

É a representação em que os termos são organizados em ordem decrescente de grau (potências das variáveis) e os coeficientes são simplificados. O grau de um polinômio é o maior expoente da variável que aparece no polinômio.

Exemplo:

Considere o polinômio $3x^2 + 5x - 7$.

O polinômio já está na forma padrão, pois os termos estão organizados em ordem decrescente de grau (x^2 , x^1 , x^0) e não há mais termos semelhantes que possam ser combinados.

FORMA EXPANDIDA

A forma expandida de um polinômio é aquela em que todos os produtos de fatores são distribuídos e não há mais termos fatorados. Em outras palavras, a forma expandida é o resultado da multiplicação dos fatores e da simplificação dos termos.

Exemplo:

Vamos expandir o polinômio $(x + 2)(x - 3)$.

- Aplique a distributiva:

$$(x + 2)(x - 3) = x^2 - 3x + 2x - 6$$

- Junte os termos semelhantes:

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= x^2 - 3x + 2x - 6\\ &= x^2 - x - 6 \longrightarrow \textit{forma expandida}\end{aligned}$$

A forma expandida mostra o polinômio sem fatores, com todos os termos já multiplicados e somados.

FORMA FATORADA

É quando o polinômio é escrito como o ***produto*** de dois ou mais ***fatores***. A fatoração de um polinômio envolve expressá-lo como um produto de polinômios de grau inferior. Isso é útil para encontrar as raízes ou soluções da equação polinomial.

Veja exemplos de polinômios na forma fatorada:

- $(x - 2)(x - 3)$
- $a^2b\ (2b + 3a + 4a^3)$
- $(a + b)\ (x + 4)$
- $(y^3 - 2)(3c^2 - 5)$
- $2x\ .\ (3a^2 - 5a^3)$
- $(a - b)\ (z + 4)$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

(FEI-SP) Dividindo-se ***P(x) = 2x³ – 3x² + 8x + 3*** por ***S(x)***, obtêm-se um quociente ***Q(x) = 2x – 1*** e um resto ***R(x) = 3x + 5***. Então ***S(x)*** é igual a:

A) $x^2 + x + 1$

B) $x^2 - x + 1$

C) $2x^2 + 3x - 5$

D) $x^2 + x - 2$

E) $x^2 - x + 2$

SOLUÇÃO

Sabemos que :

Dividendo = divisor . quociente + resto

$$p(x) = s(x).\,q(x) + r(x)$$

$$s\,(x) = \frac{p\,(x) - r\,(x)}{q\,(x)}$$ isolando *S(x)*

Agora é só substituir:

$$s\,(x) = \frac{\left(2x^3 - 3x^2 + 8x + 3\right) - (3x + 5)}{2x - 1}$$

$$s\,(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 8x + 3 - 3x - 5}{2x - 1}$$

$$s\,(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{2x - 1}$$

Agora é só fazer a divisão. Utilizando a divisão longa temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^3} & -\,3x^2 & +\,5x & -\,2 & 2x - 1 \\ \cline{5-5}
-\,\cancel{2x^3} & +\,x^2 & & & x^2 - x + 2 \\ \cline{1-2}
 & -\,\cancel{2x^2} & +\,5x & -\,2 & \\
 & -\,\cancel{2x^2} & -\,x & & \\ \cline{2-3}
 & & \cancel{4x} & -\,2 & \\
 & & -\cancel{4x} & +\,2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Resposta : **x² - x + 2** , letra E.

EXERCÍCIO 2

Ubiratan tem três irmãos: Marcos, Luana e Natália. Em relação à idade de Ubiratan, Marcos tem 5 anos a mais, Luana tem 2 anos a mais e Natália tem 6 anos a menos. Considerando que Ubiratan tenha ***n*** anos, quantos anos terão os quatro juntos?

SOLUÇÃO

Definimos a idade de Ubiratan como ***n*** anos.
A idade de cada irmão é dada da seguinte forma:

- Marcos tem 5 anos a mais que Ubiratan, logo a idade de Marcos é ***n + 5***.
- Luana tem 2 anos a mais que Ubiratan, logo a idade de Luana é ***n + 2***.
- Natália tem 6 anos a menos que Ubiratan, logo a idade de Natália é ***n − 6***.

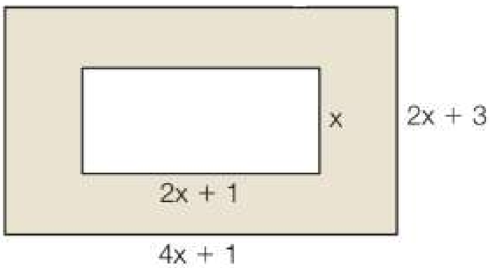
Agora, somamos as idades de todos os quatro, que é a soma de 4 polinômios:

$$\textit{Idade total} = n + n + 5 + n + 2 + n - 6$$

Simplificamos a expressão:
Idade total = 4n + 1
Portanto, a idade total dos quatro juntos é ***4n + 1*** .

EXERCÍCIO 3

Calcule a área da região colorida.



SOLUÇÃO

A área colorida (A) é a ***subtração*** entre a área do retângulo maior (B) e a área do retângulo menor (C).

$$A = B - C$$

Vamos calcular as áreas separadamente:

$B = (4x + 1) . (2x + 3)$

$B = 8x^2 + 12x + 2x + 3$

$B = 8x^2 + 14x + 3$

$C = x . (2x + 1)$

$C = 2x^2 + x$

$A = B - C$

$A = 8x^2 + 14x + 3 - 2x^2 - x$

$A = 6x^2 + 13x + 3$

Portanto a área da região colorida é $\boldsymbol{6x^2 + 13x + 3}$ **.**

Material Extra

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.

Expressões algébricas: Monômios

Introdução aos Polinômios

Operações com Polinômios: Adição e Subtração

Operações com Polinômios: Multiplicação

Operações com Polinômios: Divisão

Resolução de Exercícios: Polinômios

Atividades

ATIVIDADE 1

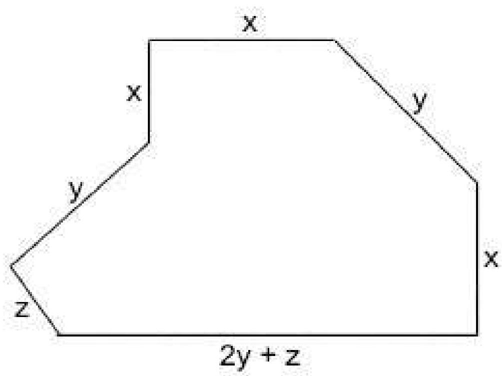
Sejam **P = $2x^2 + 3y$**, **Q = $y^2 - 2y + 1$** e **R = $x^2 + 2y^2 - 3$** três polinômios. Se **S** é um polinômio tal que **S = P + Q + R** então:

A) $S = 3x^2 + 3y^2 + y + 2$
B) $S = 3x^2 + 3y^2 - y - 2$
C) $S = 3x^2 + 3y^2 + y - 2$
D) $S = 3x^2 - 3y^2 + y - 2$
E) $S = 3x^2 - 3y^2 + y + 2$

ATIVIDADE 2

Suponha que o terreno comprado por um proprietário tenha a forma da figura a seguir e suas medidas sejam representadas, em unidades de comprimento, pelas variáveis **x**, **y** e **z**.

Qual dos polinômios abaixo melhor representa o perímetro desse terreno?



A) $2x + 3y + z$
B) $3x + 4y + 2z$
C) $3x + 3y + z$
D) $3x + 2y + 3z$
E) $4x + 3y + 2z$

ATIVIDADE 3

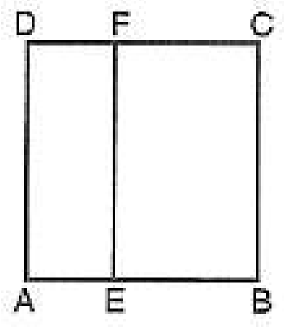
Seja **P = $3a^3 + 4b^2 - 3b$** um **polinômio** formado por três monômios (**trinômio**). O **grau** de **P** é:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

ATIVIDADE 4

Na figura abaixo, **ABCD é um quadrado de lado x**, enquanto no **retângulo AEFD**, o lado **AE mede y**.
Qual dos **polinômios** a seguir melhor expressa a **área do retângulo EBCF**?

A) $x^2 - y$
B) $x^2 - y^2$
C) $x^2 + xy$
D $x^2 - xy$
E) $(x - y)^2$



ATIVIDADE 5

Ana comprou **y maçãs** e **12 bananas**. O preço de cada maçã é 3 reais e o preço de 6 bananas é o triplo do preço de uma maçã. Ela também comprou **x laranjas**, sendo que o preço de 3 laranjas é igual ao preço de 4 bananas. Qual das expressões algébricas (**polinômios**) melhor descreve o **custo total** das compras de Ana?

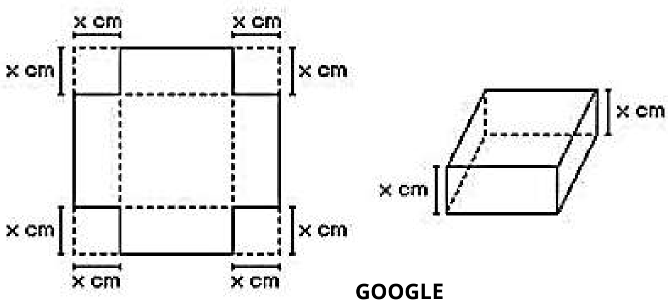
A) $3x + 2y + 18$
B) $2x + 3y + 18$
C) $3x + 3y + 9$
D) $2x + 2y + 18$
D) $4x + 3y + 9$

CANVA

ATIVIDADE 6

Um artesão está criando uma **caixa**, com formato de paralelepípedo, a partir de um quadrado de papelão com **lados de 20 cm**. Ele decide cortar quadrados de **lados x cm** nos cantos e dobrar as laterais para formar essa caixa, sem tampa. Sabendo que o **volume** dessa caixa pode ser calculado pela **multiplicação de suas dimensões** (largura, comprimento e altura). Marque a opção com o **polinômio** que melhor expressa o volume dessa caixa.

A) $4x^3 + 80x^2 + 400x$
B) $4x^3 + 80x^2 - 400x$
C) $- 4x^3 - 80x^2 - 400x$
D) $4x^3 - 80x^2 + 400x$
E) $- 4x^3 - 80x^2 + 400x$



GOOGLE

ATIVIDADE 7

Você precisa escrever um **comando algébrico** para um **programa de computador** ler duas variáveis inteiras **x** e **y** onde, x é a quantidade de cadernos e y é a quantidade de canetas adquiridas por um cliente em uma papelaria. O preço (em reais) de cada caderno é dado pelo triplo de sua quantidade adicionada de 5 unidades e o preço de cada caneta é dado pelo dobro de sua quantidade adicionada de 1 unidade.

Qual é a expressão algébrica (polinômio) que você precisa escrever como comando para o programa te dar o preço a ser pago por um cliente que comprou x cadernos e y canetas?

A) $3x^2 + 2y^2 + 5x + y$
B) $2x^2 + 3y^2 + 5x + y$
C) $3x^2 - 2y^2 + 5x - y$
D) $3x^2 + 2y^2 + x + 5y$
E) $2x^2 - 3y^2 + x - 5y$

ATIVIDADE 8

Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a **van**, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral.

O dono de uma van, cuja **capacidade máxima** é de **15 passageiros**, cobra para uma excursão até a capital de seu estado **R$ 60,00 de cada passageiro**. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro **pagará mais R$ 2,00 por lugar vago**.

Sendo **x o número de lugares vagos**, qual é o **polinômio V** que representa o **valor arrecadado**, em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital?

A) $V = 870x + 2x^2$
B) $V = 930x - 2x^2$
C) $V = 900 + 30x$
D) $V = 60x + 2x^2$
E) $V = 900 – 30x – 2x^2$

canva

ATIVIDADE 9

Dividindo o polinômio **A = $2x^3 + 9x^2 + 5x - 6$** pelo polinômio **B = $2x + 3$**, encontramos o polinômio **C**. Esse polinômio **C** é:

A) $x^2 + 3x - 2$
B) $x^2 + 3x + 2$
C) $- x^2 - 3x + 2$
D) $x^2 - 3x + 2$
E) $- x^2 + 3x - 2$

ATIVIDADE 10

A **função horária para a distância percorrida** de um automóvel em movimento uniformemente variado (MUV) é dada pelo binômio **D = $5t^2 + 30t$** onde D é dado em quilômetros e $t > 0$ é dado em horas. Por outro lado, a **função horária para o consumo** de combustível é dada pelo monômio **C = $5t$** com C em litros e t, também em horas.

Sendo **R = D/C** o polinômio para a **função horária do rendimento** desse automóvel (km/L), então esse polinômio é dado por:

A) $R = t + 6$
B) $R = t - 6$
C) $R = 6t$
D) $R = 6t + 6$
E) $R = t^2 - 6$

Gabarito

ATIVIDADE 01: C
ATIVIDADE 02: B
ATIVIDADE 03: B
ATIVIDADE 04: D
ATIVIDADE 05: B
ATIVIDADE 06: D
ATIVIDADE 07: A
ATIVIDADE 08: E
ATIVIDADE 09: A
ATIVIDADE 10: A

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Sendo $S = P + Q + R$ então $S = (2x^2 + 3y) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 + 2y^2 - 3)$, juntando os monômios semelhantes fica
$S = (2x^2 + x^2) + (y^2 + 2y^2) + (3y - 2y) + (1 - 3) = 3x^2 + 3y^2 + y - 2$ *e, portanto, a alternativa correta é a **letra C**.*

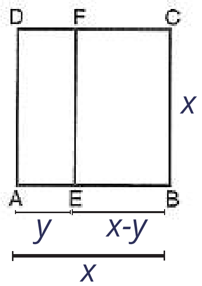
ATIVIDADE 2

Para encontrar o polinômio que expressa o perímetro desse terreno, basta somar as medidas de todos os seus 7 lados, ou seja,
perímetro $= x + y + x + 2y + z + z + y + x = 3x + 4y + 2z$.
*Portanto, a alternativa correta é a **letra B**.*

ATIVIDADE 3

*O grau do polinômio P é dado pelo maior expoente, que neste caso, é o expoente 3. Logo, a opção correta é a **letra B**.*

ATIVIDADE 4



Observe na figura ao lado que a altura do retângulo EBCF mede x, conforme o lado do quadrado ABCD.
A base do retângulo EBCF é obtida ao subtrair a medida AE da medida AB, ou seja, x - y.
A área do retângulo EBCF é dado pela medida EB multiplicada pela medida BC:
$(x - y) \cdot x = x^2 - xy$.
*A opção correta é a **letra D**.*

ATIVIDADE 5

O preço das maçãs pode ser expresso por 3y. Como 6 bananas custam 9 reais, então 12 bananas custarão 18 reais (1,50 cada banana). Por fim, 3 laranjas custarão 6 reais (2 reais por laranja) e a expressão para o preço das laranjas é 2x.
*Portanto, a expressão algébrica para o custo total das compras de Ana é $2x + 3y + 18$ e a alternativa correta é a **letra B**.*

ATIVIDADE 6

Após recortar os quadrados de lados x cm nas quinas da cartolina e levantar suas laterais, teremos sua base quadrada com dimensões de (20 – 2x) cm e sua altura com x cm. Portanto, a expressão algébrica para o volume V dessa caixa será
$$V = (20 - 2x) \,.\, (20 - 2x) \,.\, x$$
Multiplicando termo a termo os binômios entre parênteses, temos
$$V = (20 \,.\, 20 - 20 \,.\, 2x - 2x \,.\, 20 + 2x \,.\, 2x) \,.\, x$$
$$V = (400 - 40x - 40x + 4x^2) \,.\, x$$
$$V = (400 - 80x + 4x^2) \,.\, x$$
Multiplicando cada monômio dentro dos parênteses por x, resulta em
$$V = 400x - 80x^2 + 4x^3$$
*Portanto, a opção correta é a **letra D**.*

ATIVIDADE 7

O preço pago pelos cadernos é $Cd = x \cdot (3x + 5) = 3x^2 + 5x$ e o preço pago pelas canetas é $Cn = y \cdot (2y + 1) = 2y^2 + y$.
*Portanto, a expressão algébrica que dará o preço a ser pago pelo cliente é $P = Cd + Cn = 3x^2 + 5x + 2y^2 + y$ e a opção correta é **letra A**.*

ATIVIDADE 8

Se x é o número de lugares vagos na Van, então (15 – x) é o número de lugares ocupados. Logo, o valor cobrado pelo dono da Van será $V = (15 - x) \,.\, (60 + 2x)$, multiplicando termo a termo esse valor pode ser escrito como $V = 15 \cdot 60 + 15 \cdot 2x - x \cdot 60 - x \cdot 2x$, ou seja, $V = 900 + 30x - 60x - 2x^2$ que equivale a $V = 900 - 30x - 2x^2$. Portanto, a opção correta é a ***letra E****.*

ATIVIDADE 9

Vamos usar a ***divisão por inspeção****:*

Primeiro vamos descobrir qual é o monômio que multiplicado por (2x) resulta em ($2x^3$). Esse monômio é **(x^2)**, *pois $x^2 \cdot 2x = 2x^3$. Agora vamos subtrair do polinômio A o produto de B por x^2.*

$A - Bx^2 = (2x^3 + 9x^2 + 5x - 6) - (2x + 3) \cdot x^2 = 2x^3 + 9x^2 + 5x - 6 - (2x^3 + 3x^2) = 6x^2 + 5x - 6$

Vamos repetir o processo, agora temos que descobrir o monômio que multiplicado por (2x) resulta em ($6x^2$). Esse monômio é **(3x)**, *pois, $3x \cdot 2x = 6x^2$. Agora vamos subtrair de $6x^2 + 5x - 6$ o produto de B por 3x.*

$6x^2 + 5x - 6 - (2x + 3) \,.\, 3x = 6x^2 + 5x - 6 - 6x^2 - 9x = -4x - 6$

Por fim, vamos descobrir qual é o monômio que multiplicado por (2x) resulta em (– 4x). Esse monômio na verdade é a constante **(– 2)**, *pois $2x \cdot (-2) = -4x$. Agora vamos subtrair de $-4x - 6$ o produto de B por (– 2).*

$-4x - 6 - (2x + 3) \cdot (-2) = -4x - 6 + 4x + 6 = 0$

O polinômio procurado é a soma 3 dos monômios que descobrimos em cada etapa desse processo, logo, esse monômio é $x^2 + 3x - 2$ e a opção correta é a ***letra A****.*

ATIVIDADE 10

Para encontrar o polinômio R, vamos encontrar um polinômio que multiplicado por C resulta em D. Deste modo, $R \cdot (5t) = 5t^2 + 30t$. Para isso, é só dividir ($5t^2$) por (5t) e (30t) por (5t), de onde resulta que $R = t + 6$ e, portanto, a opção correta é a ***letra A****.*

Referências

Academy Khan. Expressões algébricas Parte 5: Polinômios - Aula 18. Portal da OBMEP. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:quadratics-multiplying-factoring/x2f8bb11595b61c86:multiply-monomial-polynomial/v/polynomials-intro . Acesso em: 30 jan. 2025.

BOYER, Carl B. História da Matemática.São Paulo: Blucher, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. Teláris matemática, 8º ano: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio; DOLCE, Osvaldo. Matemática e realidade: 8º ano. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2018.

OBMEP. Expressões algébricas Parte 3: Monômios - Aula 16. Portal da OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=FC0qgoHajdQ. Acesso em: 30 jan. 2025.

OBMEP. Operações com Polinômios: Adição e Subtração - Aula 20. Portal da OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=pPRtrN7bO1k. Acesso em: 30 jan. 2025.

OBMEP. Operações com Polinômios: Multiplicação - Aula 21. Portal da OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=S7u2mZMxjOA. Acesso em: 30 jan. 2025.

OBMEP. Operações com Polinômios: Divisão - Aula 22. Portal da OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=imneG1sv0TQ. Acesso em: 30 jan. 2025.

OBMEP. Resolução de Exercícios: Polinômios - Aula 23. Portal da OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=gzTsjQaDn28. Acesso em: 30 jan. 2025.