GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL
GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA: DEFINIÇÃO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT508 Identificar e associar Progressões Geométricas (PG) a Funções Exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	• Identificar a regularidade existente em sequências numéricas ou de figuras, em que, por recursão, cada termo a partir do segundo é obtido pelo produto do anterior por um fator constante. • Identificar a regularidade que permite a dedução do Termo Geral de Uma Progressão Geométrica. • Corresponder os termos de uma Progressão Geométrica à expressão de uma função exponencial. • Resolver problemas envolvendo Progressões Geométricas.	**D097_M** Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.

Contextualização

Você já parou para pensar em como as sequências estão presentes em nosso dia a dia? Desde os **dias da semana,** organizados em uma ordem fixa, até o **número de telefone** que usamos para nos comunicar, elas estão por toda parte. O **número do CPF**, por exemplo, não é apenas uma combinação aleatória de dígitos; ele segue regras matemáticas específicas que permitem verificar sua validade. Outro exemplo interessante é o **endereço IP**, uma sequência que identifica dispositivos conectados na internet. Até mesmo os **códigos binários**, compostos por 0s e 1s, são fundamentais para o funcionamento dos nossos aparelhos eletrônicos.

Muitas dessas sequências não estão ali por acaso. Elas são **planejadas e processadas** para garantir que os sistemas **operem de forma eficiente e segura**. Quando você acessa um site ou realiza uma transação bancária, algoritmos matemáticos verificam as informações que você fornece. A Matemática está nos bastidores, organizando, validando e processando dados.

Mas, e se olharmos para as sequências de forma mais ampla? Elas podem representar crescimento, decaimento ou padrões que se repetem no tempo. Um exemplo fascinante são as **progressões geométricas**, um tipo especial de sequência onde cada termo é obtido **multiplicando o anterior por um mesmo número**. Elas têm aplicações práticas no **cálculo de juros compostos**, no **crescimento de populações** e até na **propagação de ondas sonoras**.

Neste material, vamos relembrar o que são, sob a óptica da matemática, as **sequências** e aprender o que é um novo tipo de sequência: a **progressão geométrica**.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

SEQUÊNCIAS

No nosso cotidiano, frequentemente lidamos com situações envolvendo **sequências**. Alguns exemplos incluem:

- Os nomes dos alunos de uma turma em ordem da chamada;
- Os meses do ano (janeiro, fevereiro, março, ...);
- Os dias da semana (domingo, segunda-feira, terça-feira, ...).

Além dessas, algumas sequências têm **natureza numérica**, como:

- Os dígitos do número de CPF;
- Os dígitos do número do telefone celular;
- Os anos de ocorrência dos Jogos Olímpicos.

Cada elemento de uma sequência é chamado de **termo**. Geralmente, utilizamos uma letra acompanhada de um índice (como a_n) para denotar os termos de uma sequência, onde n indica a **posição** (ou ordem) do termo.

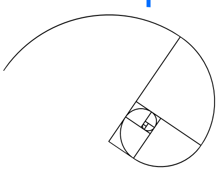
Por exemplo, a sequência numérica $(8, \quad 40, \quad 27, \quad 12)$ é uma sequência na qual

$$a_1 = 8;$$
$$a_2 = 40;$$
$$a_3 = 27; \text{e}$$
$$a_4 = 12.$$

Temos dois tipos de sequências: as **sequências finitas** e as **sequências infinitas**. Iremos conversar sobre elas a seguir.

VOCÊ SABIA?

A Sequência de Fibonacci e a proporção áurea: a razão entre números consecutivos da sequência de Fibonacci (1,1,2,3,5,8,...) tende à razão ϕ, a proporção áurea (≈1,618), uma constante de infinitas casas decimais que aparece na arte, na natureza e na arquitetura. Um exemplo é o formato de conchas, como as do nautilus, que segue uma espiral de Fibonacci.



Tipos de sequências numéricas

Sequência finita

Uma **sequência finita** é formada por um número limitado de n termos, em que $n \in \mathbb{N}^*$. Podemos representá-la assim:

$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \cdots, \quad a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n)$$

Em que:

- a_1 é o primeiro termo;
- a_2 é o segundo termo, e assim por diante;
- a_n é o último termo; e
- a_{n-1} é o penúltimo termo, e assim por diante.

Sequência infinita

Uma **sequência infinita** é formada por um número ilimitado de termos e pode ser representada da seguinte maneira:

$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \cdots)$$

Alguns exemplos de sequências infinitas são:

- O conjunto dos números naturais: (0, 1, 2, 3, 4, ...)
- O conjunto de números primos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...)

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Definição

Uma **Progressão Geométrica (PG)** é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número real constante chamado de **razão** (denotado por q).

Exemplo 1

A sequência $(5, \quad 10, \quad 20, \quad 40, \quad 80, \quad \cdots)$ é uma PG de **razão 2.** Podemos constatar isso verificando que a multiplicação de cada termo pela razão é igual ao termo subsequente:

$a_1 \cdot q = 5 \cdot 2 = 10 = a_2$

$a_2 \cdot q = 10 \cdot 2 = 20 = a_3$

$a_3 \cdot q = 20 \cdot 2 = 40 = a_4$, e assim por diante.

Exemplo 2

A sequência $\left(9, \quad -3, \quad 1, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \cdots\right)$ é uma PG de **razão** $-\frac{1}{3}$, pois:

$$a_1 \cdot q = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{3} = -3 = a_2$$

$$a_2 \cdot q = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1 = a_3$$

$a_3 \cdot q = 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} = a_4$, e assim por diante.

Exemplo 3

A sequência $(7, \quad 7, \quad 7, \quad 7, \quad 7, \quad \cdots)$ é uma PG de **razão** 1, pois:

$$a_1 \cdot q = 7 \cdot 1 = 7 = a_2$$

$a_2 \cdot q = 7 \cdot 1 = 7 = a_3$, e assim por diante.

Fórmulas da Progressão Geométrica

atenção

Professor (a),

A proposta da seção é apresentar um processo de desenvolvimento para obter a razão e o termo geral de uma PG e destacar que esses processos são sistematizados pelas fórmulas apresentadas. É importante que o aluno entenda que as fórmulas são resultantes desse processo.

Razão da PG

Vejamos a progressão geométrica do exemplo 1, dado na seção anterior:

$$(5, \quad 10, \quad 20, \quad 40, \quad 80, \quad \cdots)$$

Podemos obter a razão da PG por meio da divisão de a_2 por a_1 :

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{5} = 2$$

Mas também podemos obter o valor da razão pela divisão de a_3 por a_2, e assim obter o mesmo resultado, como demonstrado abaixo:

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{10} = 2$$

De forma geral, podemos calcular a razão de qualquer PG ao dividirmos um termo qualquer por outro **imediatamente anterior**, ou seja:

$$\boxed{q = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Termo Geral da PG

Seja uma PG com razão q e primeiro termo a_1. Como se trata de uma PG, por definição, o valor de a_2 é obtido multiplicando a_1 por q, ou seja:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

O valor de a_3 pode ser obtido de forma análoga:

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

Vamos substituir o valor de a_2 por $a_1 \cdot q$ para desenvolvermos um raciocínio:

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

Seguindo a mesma lógica, temos para a_4.

$$a_4 = a_3 \cdot q = \left(a_1 \cdot q^2\right) \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

Continuando apenas associando o termo ao seu resultado final, temos:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$
$$\vdots$$
$$a_{20} = a_1 \cdot q^{19}$$

Ou seja, de forma geral, temos a seguinte fórmula para cálculo do **Termo Geral da PG** (considerando $n \geq 1$):

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Na PG há uma relação entre o índice e o valor correspondente na posição indicada por esse índice. Essa correspondência pode ser expressa da seguinte maneira:

Índice → $1 \to a_1$ ← Posição indicada pelo respectivo índice

$$2 \to a_2$$
$$\vdots$$
$$x \to a_x$$

Essa relação pode ser descrita por uma função $f : N^* \to R^*$, que associa a posição x ao valor correspondente a_x na PG. A fórmula que define essa função é dada pelo termo geral da PG.

$$\boxed{f(x) = a_1 \cdot q^{x-1}}$$

Dessa forma, algumas PG podem ser representadas por uma função do tipo exponencial de base q sendo $q > 0$ e $q \neq 1$

Exercícios Resolvidos

Exercício 1

Calcule a razão de cada PG:

a) $-3, -9, -81, \ldots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

c) $10, -10, 10, -10, \ldots$

d) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

Resolução

Para calcular a razão da PG basta dividirmos um de seus termos (e você pode selecionar o que achar mais fácil de calcular) pelo seu antecessor. É importante salientar que não podemos selecionar o primeiro termo já que este é o único que não tem antecessor.

a) $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-9}{-3} = 3$

b) $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

c) $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{-10}{10} = -1$

d) $q = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

Exercício 2

Calcule o 6º termo de cada PG do exercício anterior.

Resolução

Para calcularmos o 6º termo da PG, basta recorrermos à Fórmula do Termo Geral com n=6, ou seja

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5$$

a) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = (-3) \cdot (3)^5 = -3 \cdot 243 = -729$

b) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$

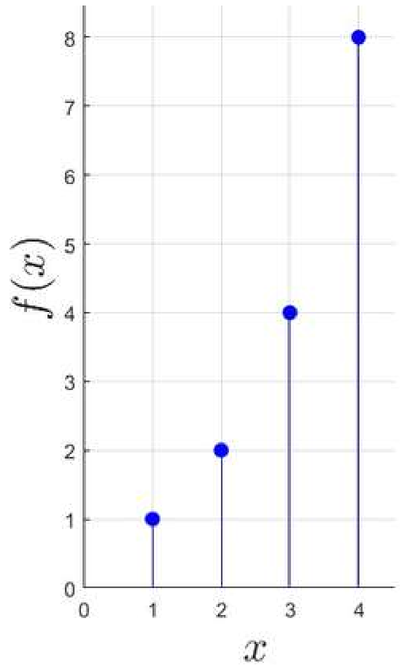
c) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 10 \cdot (-1)^5 = 10 \cdot (-1) = -10$

d) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{243}\right) = -\frac{1}{27}$

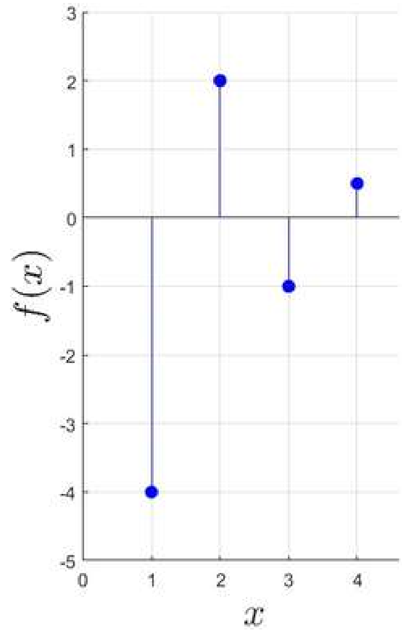
Exercício 3

Nos gráficos abaixo, os pontos representam os termos de uma PG, em que x é a posição do termo e $f(x)$ é o seu valor correspondente. Determine a fórmula do Termo Geral da PG de cada gráfico abaixo:

a)



b)



Resolução

Sabemos que:

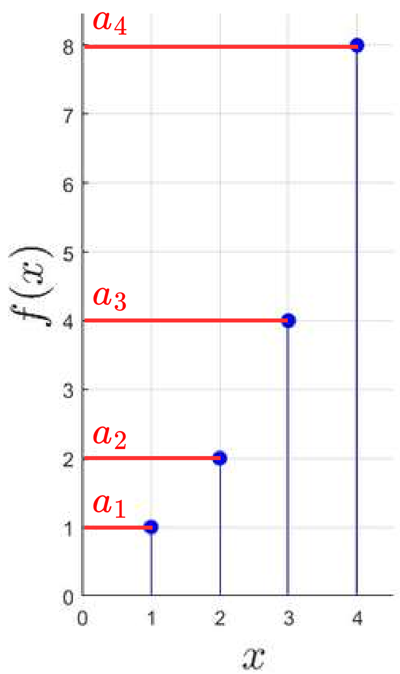
$$f(x) = a_1 \cdot q^{x-1} \qquad x \in \mathbb{N}^*$$

$$a_1 = f(1)$$

$$q = \frac{f(x)}{f(x-1)} \qquad x \in \mathbb{N}^*$$

Vamos aplicar aos itens da questão

a)



$a_1 = 1$	$a_3 = 4$
$a_2 = 2$	$a_4 = 8$

Temos que

$$a_1 = f(1) = 1 \quad \text{e}$$

$$q = \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{2}{1} = 2$$

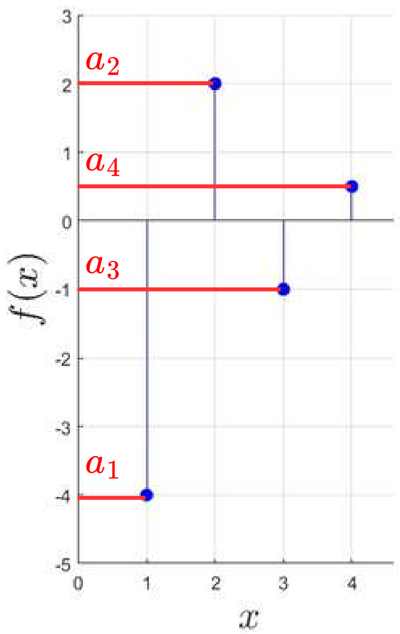
Então,

$$f(x) = a_1 \cdot q^{x-1} = 1 \cdot (2)^{x-1} = 2^{x-1}$$

$$\boxed{f(x) = 2^{x-1}}$$

Assim, temos os pares ordenados (1,1), (2,2), (3, 4) e (4,8) e a PG constituída é (1, 2, 4, 8).

b)



$a_1 = -4$	$a_3 = -1$
$a_2 = 2$	$a_4 = \frac{1}{2}$

Sabemos que

$$a_1 = f(1) = -4 \quad \text{e}$$

$$q = \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Então,

$$f(x) = a_1 \cdot q^{x-1} = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

$$\boxed{f(x) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1}}$$

Assim, temos os pares ordenados (1,-4), (2,2), (3, -1) e (4, $\frac{1}{2}$) e a PG constituída é (-4, 2, -1, $\frac{1}{2}$).

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 3: Sequências.
- Sequências. (p. 110 - 113)
- Progressão geométrica. (p. 133 - 141)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 4: progressões.
- Introdução. (p. 118 - 119);
- Sequências. (p. 119 - 122).
- Progressão geométrica (p. 132 - 134)

VIDEOAULAS

Portal da OBMEP
Progressões Geométricas

Professor(a),
nesse link você encontra três vídeos sobre Progressão Geométrica. Eles podem ser um suporte para o estudo do aluno, caso considere necessário.

Atividades

ATIVIDADE 1

Para cada PG a seguir, calcule a razão.

$a)(10, 50, 250)$

$b)(10, 5, ...)$

$c)(-30, -10, -\frac{10}{3}, ...)$

$d)\left(\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}, ...\right)$

$e)(-1, -4, -16, ...)$

$f)(-3, 18, -108, ...)$

$g)(2, 2^5, 2^9, ...)$

$h)(2^{-2}, 2^{-4}, 2^{-6}, ...)$

ATIVIDADE 2

Observe a sequência numérica a seguir:

$$\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, ...$$

Mantida a lei de formação, pode-se concluir que:

a) É uma PG, porque se considerarmos um termo qualquer e adicionarmos um valor chamado constante da PG, obtém-se o número seguinte.

b) É uma PG, pois existe uma constante multiplicativa, chamada de razão da PG, que é igual a $\frac{1}{3}$.

c) Não é uma PG, pois ela não é composta por números naturais.

d) Não é uma PG, pois ela possui duas razões para uma mesma sequência, ou seja, o racional $\frac{1}{3}$ e o natural 3.

e) É uma PG, pois existe uma constante multiplicativa, chamada de razão da PG, que é igual a 3.

ATIVIDADE 3

O investimento em imóveis é uma das formas mais tradicionais de investimento no Brasil, especialmente devido à valorização constante das propriedades nos últimos anos. Aqueles que adquiriram imóveis nas cidades de Vitória, Vila Velha, Goiânia, Curitiba e Florianópolis obtiveram ganhos superiores à inflação nos últimos cinco anos.

Uma pessoa comprou um imóvel novo por R$ 100 000,00 em 2019, e o valor do imóvel aumentou 20% ao ano desde a sua compra. A seguir, veja a tabela com os dados da evolução do valor do imóvel nos 5 anos seguintes à aquisição.

Ano	Valor do Imóvel (R$)
2019	R$ 100 000,00
2020	R$ 120 000,00
2021	R$ 144 000,00
2022	R$ 172 800,00
2023	R$ 207 360,00
2024	R$ 248 832,00

a) O crescimento do valor do imóvel, ano a ano, segue uma Progressão Geométrica (PG). A razão da PG corresponde à base da função exponencial, representando a constante de multiplicação que, aplicada a cada termo anterior da PG, gera o próximo termo da sequência.
Determine o valor da razão dessa sequência.

b) Considerando os dados da tabela, indique qual seria o valor de (a_1) da PG e explique a importância do primeiro termo (a_1) na formulação de uma função do tipo exponencial que represente essa progressão.

c) Para prever o valor futuro de um imóvel, foram contratados profissionais para transformar os dados coletados em funções matemáticas. Assinale qual das funções abaixo representa corretamente o crescimento do valor *V(x)* dos imóveis, **considerando x a posição do valor na sequência** e (x ∈ ℕ*).

☐ $V(x) = 100\,000^x$

☐ $V(x) = 100\,000 + (1,2)^x$

☐ $V(x) = 100\,000 + (1,2)^{x-1}$

☐ $V(x) = 100\,000 \cdot (1,2)^x$

☐ $V(x) = 100\,000 \cdot (1,2)^{x-1}$

d) Se o expoente da função encontrada fosse apenas "x", em vez de "x - 1", os valores registrados na tabela de valor do imóvel estariam corretos? Explique sua resposta.

ATIVIDADE 4

Uma empresa de marketing digital investe em anúncios online para aumentar sua base de clientes. No primeiro mês, a empresa conquista 10 novos clientes. A partir do segundo mês, o número de novos clientes conquistados é o triplo do mês anterior. Ou seja, no segundo mês, a empresa conquista 30 clientes; no terceiro mês, 90 clientes, e assim por diante.
A sequência que representa o número de clientes conquistados a cada mês é:

(10, 30, 90, 270, 810, ...)

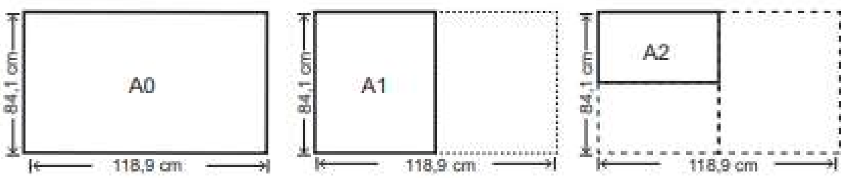
a) Identifique a razão da sequência.

b) Escreva a fórmula do termo geral a_n dessa sequência.

c) Utilizando a fórmula, calcule o número de clientes conquistados no 9º mês.

ATIVIDADE 5

(ENEM - PPL 2016) O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm x 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.

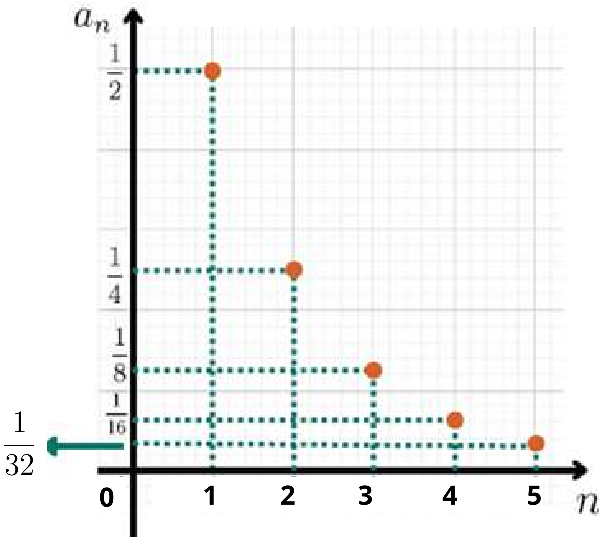


Disponível em: http://pt.wikipedia.org. Acesso em: 4 abr. 2012 (adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?
a) 8
b) 16
c) 64
d) 128
e) 256

ATIVIDADE 6

O gráfico a seguir representa uma progressão geométrica (PG) com *n* sendo um número natural não nulo, onde no eixo horizontal representamos a posição do termo e no eixo vertical o respectivo termo.



a) Escreva os termos dessa progressão geométrica apresentados no gráfico.

b) Determine a razão *q* dessa progressão geométrica.

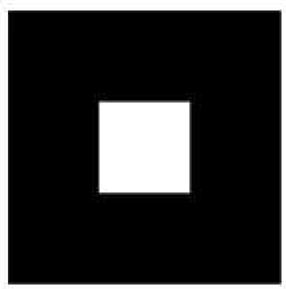
c) Determine o valor do sexto termo dessa PG.

ATIVIDADE 7

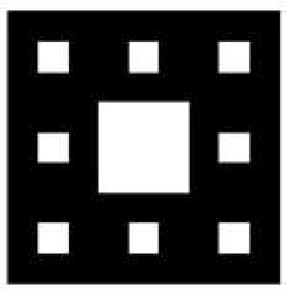
Considere um quadrado dividido em nove quadrados congruentes, em que se retira o quadrado central. Nos oito quadrados restantes esse mesmo processo é realizado, e assim sucessivamente.

O resultado obtido é conhecido como Tapete de Sierpinski.

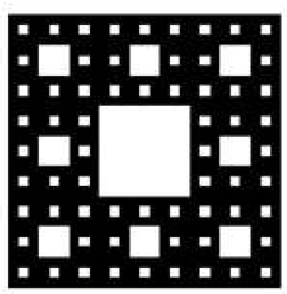
1 iteração



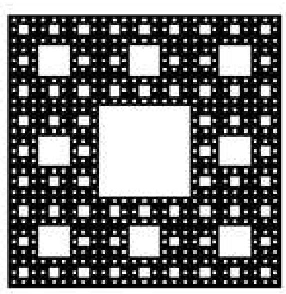
2 iterações



3 iterações



4 iterações



Com base nas informações fornecidas, é possível identificar a quantidade de quadrados retirados nas quatro primeiras iterações, que seguem a sequência: (1, 8, 64, 512, ...).

a) Escreva o Termo Geral da Progressão Geométrica (PG) relacionada à sequência formada pela quantidade de quadrados retirados em cada iteração.

b) Determine quantos quadrados foram retirados na 9ª iteração. Para isso, expresse o resultado como uma única potência (não é necessário calcular o valor dessa potência).

ATIVIDADE 8

No começo do desenvolvimento embrionário, todos os tipos de células que irão constituir os diferentes tecidos originam-se de uma única célula chamada de “zigoto” ou “ célula-ovo”. Por meio de um processo chamado de mitose, cada célula se divide em duas, ou seja, a célula–ovo origina duas novas células que, por sua vez, irão originar quatro outras e assim sucessivamente. Após observar 9 ciclos, um cientista registrou 8 192 células. Assinale a alternativa que mostra o número de células que existiam quando o cientista iniciou a observação.

a) 28
b) 30
c) 32
d) 34
e) 36

ATIVIDADE 9

Determine a razão de uma progressão geométrica, em que o $a_1 = 3$ e $a_6 = 9\,375$.

ATIVIDADE 10

Em uma progressão geométrica de razão 2, $a_1 = 7$ e $a_n = 3\,584$. Determine o número *n* de termos desta PG.

Gabarito

ATIVIDADE 02: E
ATIVIDADE 05: E
ATIVIDADE 08: C

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Calculando razão *q* em cada item, teremos:

$$a)\ q = \frac{50}{10} = 5$$

$$b)\ q = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$c)\ q = \frac{-10}{-30} = \frac{1}{3}$$

$$d)\ q = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{9}} = 1$$

$$e)\ q = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$f)\ q = \frac{18}{-3} = -6$$

$$g)\ q = \frac{2^5}{2} = 2^{5-1} = 2^4$$

$$h)\ q = \frac{2^{-4}}{2^{-2}} = 2^{-4-(-2)} = 2^{-4+2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

ATIVIDADE 2

Calculando a razão da PG, Temos:

$$q = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = \frac{27}{9} = 3\ \ OU\ \ \frac{3}{1} = 3$$

Portanto, temos uma PG de razão 3. Resposta correta **Letra E.**

ATIVIDADE 3

Analisando o enunciado e a tabela fornecida, podemos concluir que:

a) Como a sequência é uma PG, teremos: $q = \frac{120\,000}{100\,000} = 1,2$

b) O valor de a_1 (o primeiro termo da PG) é o valor inicial do imóvel, que foi de R$ 100 000,00 em 2019. Portanto, temos: $a_1 = 100\,000$

Importância do primeiro termo: O primeiro termo é importante, pois a_1 representa o valor inicial do imóvel. Além disso, é o valor que será multiplicado pela razão da PG, servindo como base para a formulação de uma função do tipo exponencial que descreve o crescimento do valor do imóvel ao longo do tempo.

c) Sabemos que o valor do imóvel inicial a_1 é de R$ 100 000,00 e que o crescimento é de 20% ao ano, formando uma sequência de razão *q = 1,2*. Desta forma a expressão que representa a função do tipo exponencial é: $V(x) = 100\,000 \cdot (1,2)^{x-1}$

d) Não, os valores estariam incorretos, pois, ao modelar a função exponencial, é necessário ajustar o expoente para que os valores discretos de x (x ∈ ℕ*) correspondam aos termos a_n da PG. Isso ocorre porque, ao substituir x = 1 na função $f(x) = 100\,000 \cdot (1,2)^x$, o resultado será a_2 em vez de a_1, o que não reflete corretamente os dados da tabela.

ATIVIDADE 4

Professor (a), o objetivo é que o aluno compreenda que a regularidade de uma sequência numérica diz respeito à existência de um padrão e que, com base na sua identificação, é possível determinar os termos subsequentes dessa sequência. Sugerimos explorar outras sequências numéricas com seus alunos, que sejam ou não Progressões Geométricas, e proponha discussões para que eles tentem identificar a regularidade. Uma sugestão para isso é a sequência de Fibonacci, comentada na página 3 deste material.

Considerando a sequência (10, 30, 90, 270, 810, ...), teremos:

a) Uma PG, de Razão: $q = \frac{30}{10} = 3$

b) Termo geral: $a_n = 10 \cdot 3^{n-1}$

c) $a_9 = 10 \cdot 3^{9-1} \Rightarrow a_9 = 10 \cdot 3^8 \Rightarrow a_9 = 10 \cdot 6\,561 = 65\,610$

ATIVIDADE 5

Cada dobradura do papel resulta em uma redução pela metade de uma das dimensões. Assim, o número de folhas aumenta a cada dobradura. A partir da folha A0, a sequência de número de folhas vai dobrando a cada formato: A1 = 2 folhas, A2 = 4 folhas, e assim por diante.

Logo: $A8 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot 2^{8-1} \Rightarrow a_8 = 2 \cdot 2^7 \Rightarrow a_8 = 2 \cdot 128 = 256$

Portanto, a quantidade de folhas A8 que podemos obter a partir de uma folha A0 é 256. Resposta correta é **LETRA E.**

ATIVIDADE 6

a) Analisando os valores de a_n , para cada *n* natural, temos:

- Para n = 1, temos: $a_1 = \frac{1}{2}$
- Para n = 2, temos: $a_2 = \frac{1}{4}$
- Para n = 3, temos: $a_3 = \frac{1}{8}$
- Para n = 4, temos: $a_4 = \frac{1}{16}$
- Para n = 5, temos: $a_5 = \frac{1}{32}$

b) Razão da PG: $q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{\cancel{2}^2}{\cancel{4}^2} = \frac{1}{2}$

c) Calculando o 6º termo da PG: $a_6 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{64}$

ATIVIDADE 7

Professor (a), o tapete de Sierpinski é um tipo de fractal.
Que tal conversar com os alunos sobre fractais e mostrar alguns outros exemplos? Sugerimos uma breve conversa no momento da discussão da atividade e, num momento oportuno, quem sabe trazer outras abordagens sobre fractais?

Considerando a PG, (1, 8, 64, 512, ...), teremos:

a) Razão da PG: $q = \frac{8}{1} = 8$ e $a_1 = 1$

Logo: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 8^{n-1} \Rightarrow a_n = 8^{n-1}$

b) $a_9 = 8^{9-1} \Rightarrow a_9 = 8^8$

ATIVIDADE 8

O problema descreve um processo de divisão celular por mitose, onde cada célula se divide em duas a cada ciclo. O cientista observou 8 192 células após 9 ciclos de mitose, ou seja, *n(9)* = 8 192. Portanto, temos uma PG de razão *q* = 2, onde $a_9 = 8\,192$.

Logo: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 8192 = a_1.2^{9-1} \Rightarrow 8192 = a_1 \cdot 2^8$

$$8192 = a_1 \cdot 256 \Rightarrow \frac{8192}{256} = a_1 \Rightarrow a_1 = 32$$

Portanto, o número de células iniciais era de 32 células. Resposta correta é **LETRA C.**

ATIVIDADE 9

Para resolver este problema, precisamos utilizar a fórmula geral da progressão geométrica (PG), que é:

$a_1 = 3$

$a_6 = 9\,375$

n = 6

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 9375 = 3 \cdot q^{6-1} \Rightarrow \frac{9375}{3} = q^5$$

$$q^5 = 3125 \Rightarrow q = \sqrt[5]{3125} \Rightarrow q = \sqrt[5]{5^5} \Rightarrow q = 5$$

Portanto, a razão da PG, é 5.

ATIVIDADE 10

Prezado professor, prezada professora, para a resolução apresentada, utilizamos equações exponenciais. No material da semana de 24 a 28/03 trouxemos sugestões de materiais sobre esse conteúdo.

Para resolver este problema, precisamos utilizar a fórmula geral da progressão geométrica (PG), que é:

$a_1 = 7$

$a_n = 3\,584$

Razão *q* = 2

n = ?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 3584 = 7 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{3584}{7} = 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 512 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^9$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes:

$$n - 1 = 9 \Rightarrow n = 9 + 1 = 10$$

Portanto, a PG, é composta de 10 termos.

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática: funções e progressões.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

______. **Matemática Completa 1º ano**. 4. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

Chavante, Eduardo. **Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio.** 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

______. **Matemática: contexto & aplicações. 3**. ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: matemática ciência e aplicações, 1.** 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Referências

ATIVIDADES

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: grandezas, sequências e matemática financeira**. Matemática e suas tecnologias - Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: funções e progressões.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

GOV.BR. **Ministério da Educação - INEP**. Provas e Gabaritos. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 29/11/2024.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

SÃO PAULO, Estado de. **AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO**. 1ª Série do Ensino Médio Matemática. 15ª Edição. Disponível em: <https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2019/06/aap-recomendaes-de-matemtica-1-srie-do-em_2017_1b.pdf>. Acessado em: 06/12/2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Sequências e Trigonometria**. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.