GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES / AMA
EM13MAT105 Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	• Corresponder pontos do plano cartesiano a pares ordenados. • Identificar e representar transformações geométricas (translações, reflexões e rotações). • Reconhecer e utilizar o fato de que as imagens de uma figura construída por uma simetria são congruentes, identificando propriedades e/ou medidas que não se alteram. • Reconhecer e utilizar o fato de que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ ou medidas que se modificam ou não se alteram. • Utilizar os conceitos de simetria no plano, bem como os de transformações homotéticas, para interpretar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). • Reconhecer em padrões geométricos de diferentes etnias isometrias no plano (reflexão, translação e rotação) ou transformações homotéticas. • Identificar regularidades em coordenadas cartesianas de vértices de figuras obtidas por simetria (reflexão, translação e rotação) e por ampliação ou redução.	**D043_M** Identificar a localização de pontos no plano cartesiano. **D053_M** Reconhecer figuras obtidas por composições de transformações geométricas (reflexão e rotação) na malha quadriculada.

Contextualização

Na natureza, a simetria é uma constante. As flores, por exemplo, exibem uma beleza ímpar em suas formas perfeitamente balanceadas. As borboletas e mariposas, com suas asas adornadas por padrões simétricos, são exemplos clássicos da beleza que a simetria pode proporcionar.

Mas a simetria não se limita à natureza. Ela também marca presença em diversas formas de expressão artística, como a arquitetura e a pintura. Na arquitetura, edifícios icônicos como o Taj Mahal e a Catedral de Notre Dame são exemplos de como a simetria pode ser utilizada para criar obras de arte que inspiram beleza e imponência.

Na pintura, artistas como Leonardo da Vinci e Maurits Cornelis Escher exploraram a simetria em suas obras, criando pinturas que desafiam nossa percepção e nos convidam a questionar a realidade.

Mas, por que a simetria é tão importante? Uma das respostas está em nossa própria percepção. O cérebro humano é naturalmente atraído por padrões e formas simétricas, pois eles nos transmitem a sensação de ordem, equilíbrio e beleza.

A simetria também está relacionada à funcionalidade. Em animais, a simetria bilateral garante um melhor desempenho em atividades como a locomoção e a caça. Em objetos criados pelo homem, como ferramentas e máquinas, a simetria garante um melhor funcionamento e eficiência.

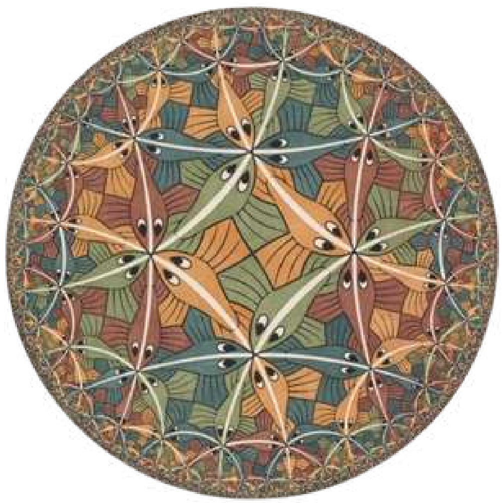
Bons estudos!

Canva

Mariposa

Canva

Taj Mahal



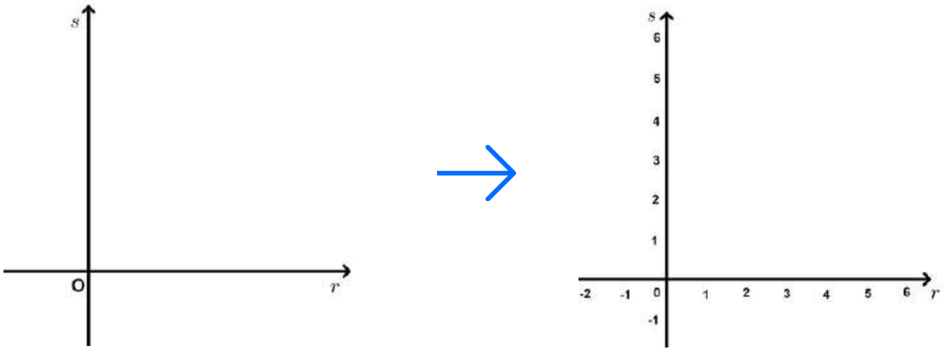
https://mcescher.com/

Obra de M. C. Escher

Conceitos e Conteúdos

O PLANO CARTESIANO

Considere duas retas perpendiculares r e s, concorrentes em um ponto O. Escolhemos uma unidade de medida de comprimento (por exemplo, o centímetro) para marcar os números em ambas as retas, de forma que o ponto O representa a origem e marca a posição 0.

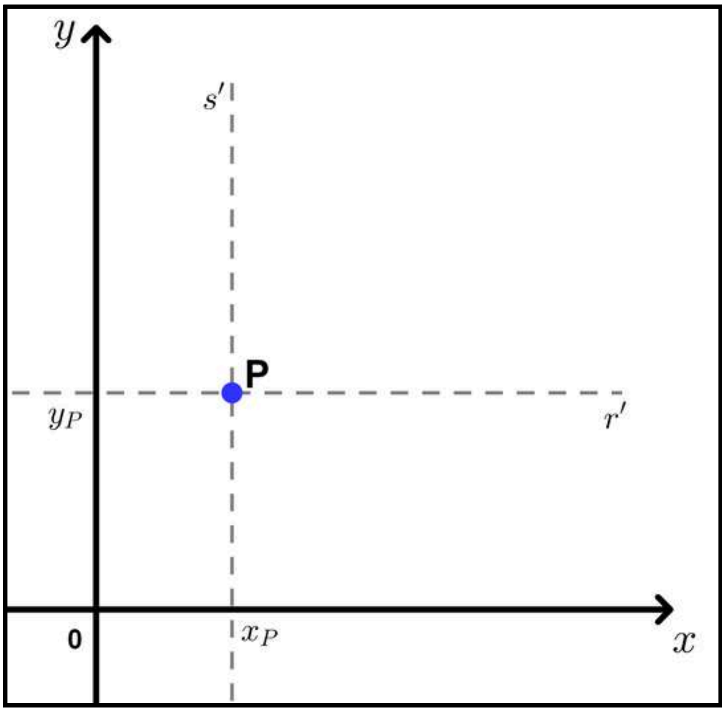


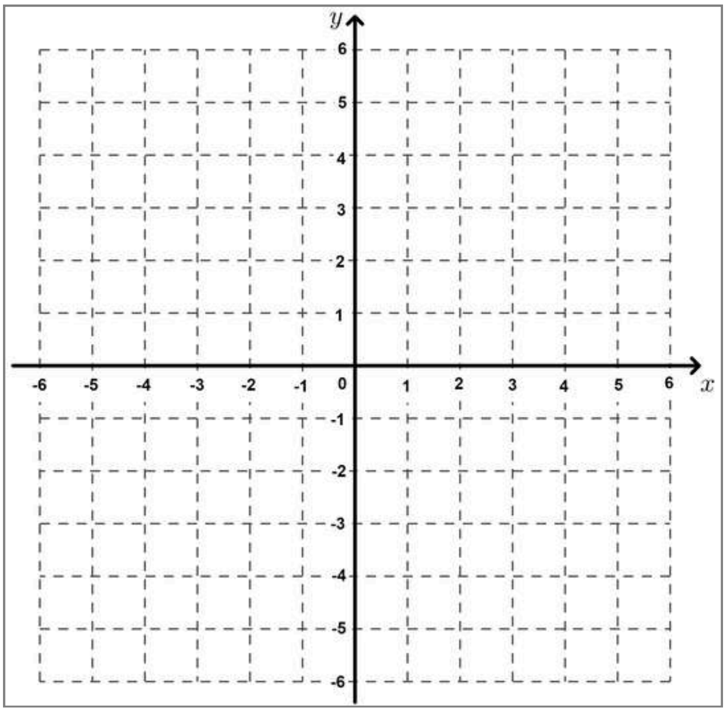
Este plano é então chamado de **plano cartesiano**. Chamamos o eixo horizontal de **eixo das abscissas**, indicado por *x*, e o eixo vertical de **eixo das ordenadas**, indicado por *y*.
Todo ponto escolhido no plano cartesiano possui um único par de números que o representa. Vejamos como obtê-lo:

1. Dado um ponto P no plano cartesiano consideramos duas retas r' e s' passando por P e paralelas aos eixos horizontal e vertical, respectivamente.
2. Tais retas determinam pontos nos eixos x e y, que podem ser associados a números reais x_P e y_P O **par ordenado** (x_P, y_P) é chamado de **coordenada de P**.

Observe na ilustração ao lado como obter tais números.

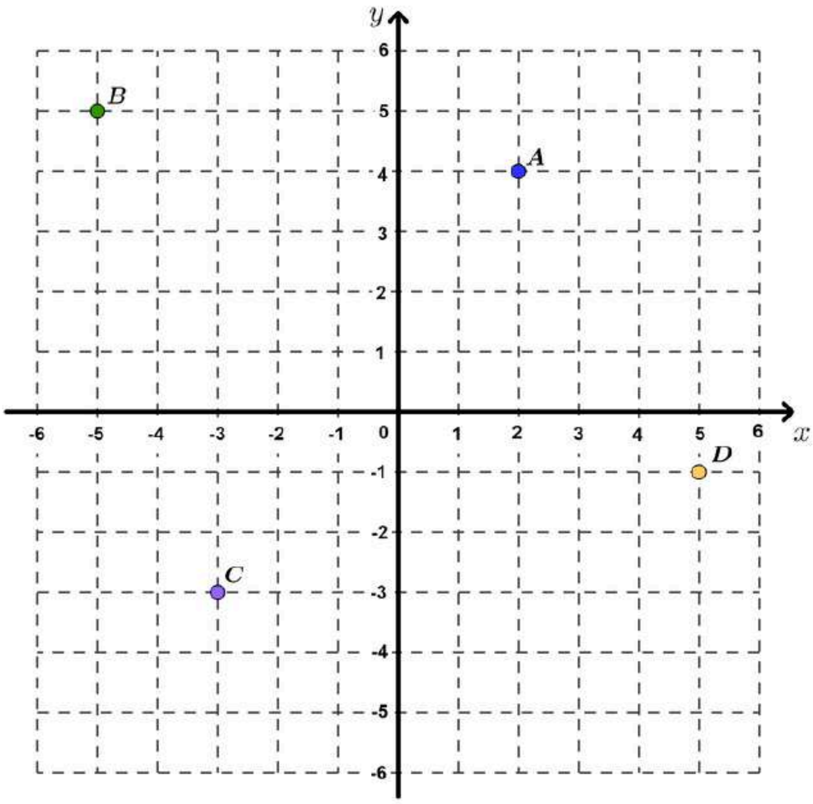
Podemos indicar $P = (x_P, y_P)$ ou então $P(x_P, y_P)$.





De forma a simplificar a localização no plano cartesiano podemos representá-lo como uma malha quadriculada, conforme a figura ao lado indica.

Agora observe no plano cartesiano abaixo os 4 pontos marcados: A, B, C e D. Vamos determinar suas coordenadas.



Iniciando pelo ponto A, vemos que o valor correspondente a ele no eixo horizontal é 2 e no eixo vertical é 4, portanto $A = (2,4)\ ou\ A(2,4)$. Seguindo o mesmo raciocínio, temos: $B\,(-5,5)\,, C(-3,-3)$ e $D(5,-1)$.

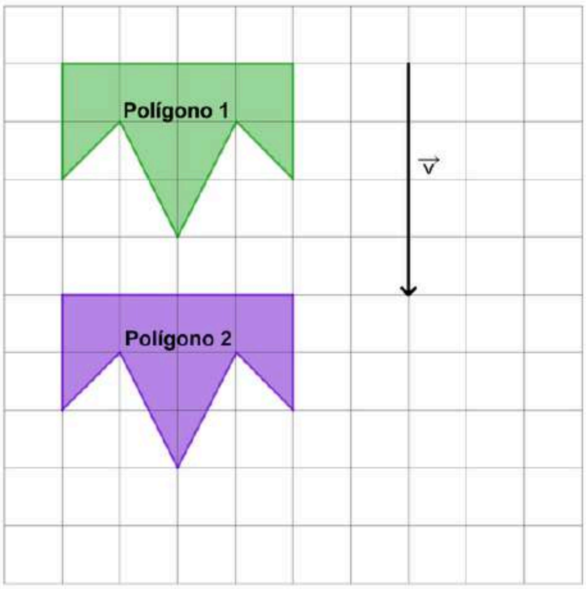
TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

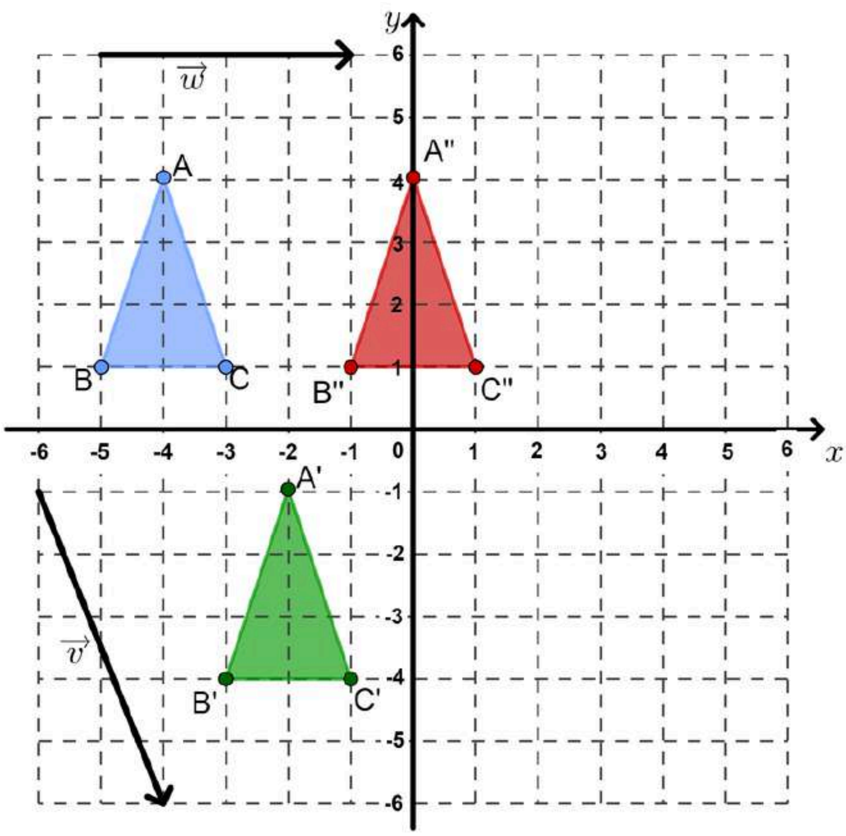
As transformações isométricas são aquelas que alteram a posição de uma figura, mantendo sua forma e tamanho. Podemos chamá-las de isometrias.
Nesta seção, veremos três tipos de isometrias: translação, reflexão e rotação.

Translação

Quando uma figura é obtida a partir de outra, fazendo um deslocamento de todos os pontos dela, na mesma direção, no mesmo sentido e na mesma medida de distância, temos um caso de simetria de translação.

Todos os pontos do polígono 1 foram deslocados na mesma direção, em 4 unidades para baixo, (tome o lado do quadradinho como unidade de medida), gerando, assim, o polígono 2.





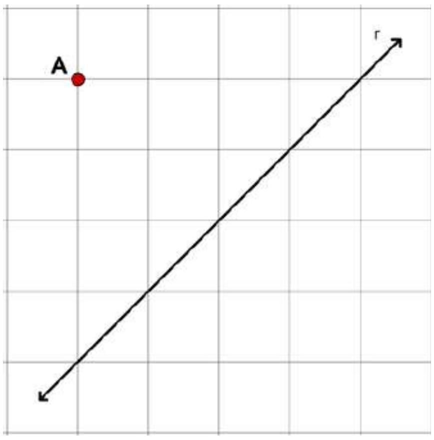
Após a translação do triângulo ABC no sentido de $\vec{v}$, obtemos o triângulo A'B'C', cujos vértices são: $A'(-2,-1)$, $B'(-3,-4)$ e $C'(-1,-4)$.

Após a translação do triângulo ABC no sentido de $\vec{w}$, obtemos o triângulo A"B"C", cujos vértices são: $A''(0,4)$, $B''(-1,1)$ e $C''(1,1)$.

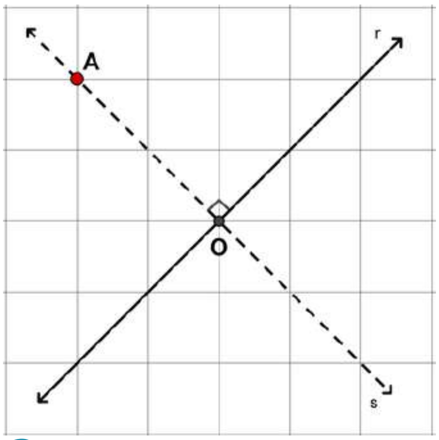
Reflexão

Quando fazemos a reflexão de uma figura em relação a uma reta obtemos uma figura congruente à figura original, porém numa posição diferente em relação à reta dada.

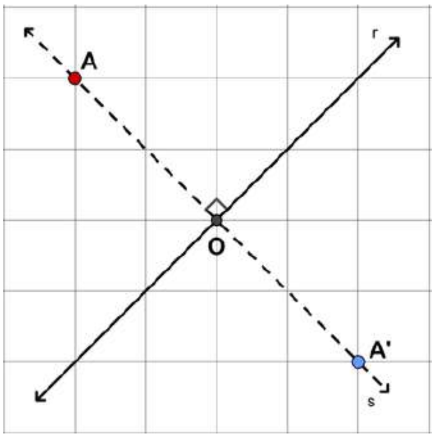
Vejamos o processo para obter o simétrico de um ponto A em torno de uma reta r:



1 Representar graficamente os objetos.

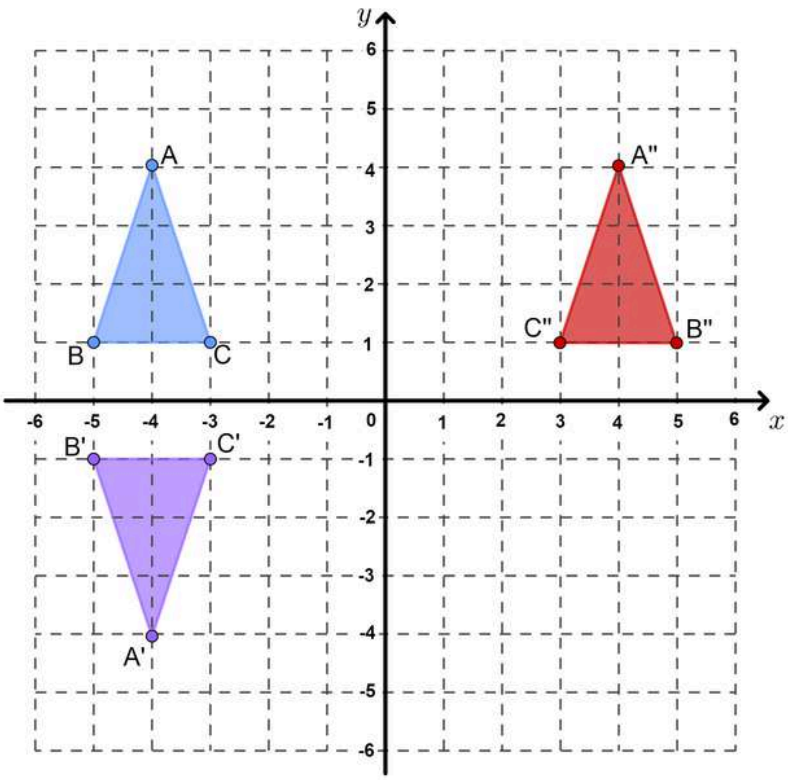


2 Traçar uma reta s perpendicular à reta r passando por A. Marcar o ponto O, interseção das retas r e s.



3 A partir de O, marcar, sobre a reta s um ponto A' , de modo que a distância de O a A seja igual à distância de O a A'.

A reflexão de uma figura em relação a uma reta dada é o mesmo que obter a figura formada pelos pontos simétricos dos pontos dessa figura em relação à reta dada. Observe na figura abaixo as reflexões em torno do **eixo x** e do **eixo y** do triângulo cujos vértices são os pontos : $A(-4,4), B(-5,1)$ e $C(-3,1)$.



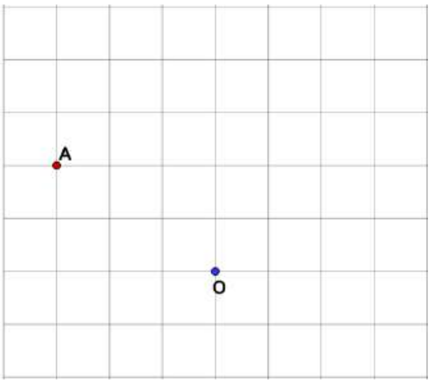
Após a reflexão em torno do eixo x, obtemos o triângulo A'B'C', cujos vértices são: $A'(-4,-4), B'(-5,-1)$ e $C'(-3,-1)$.

Após a reflexão em torno do eixo y, obtemos o triângulo A"B"C", cujos vértices são: $A"(4,4), B"(5,1)$ e $C"(3,1)$.

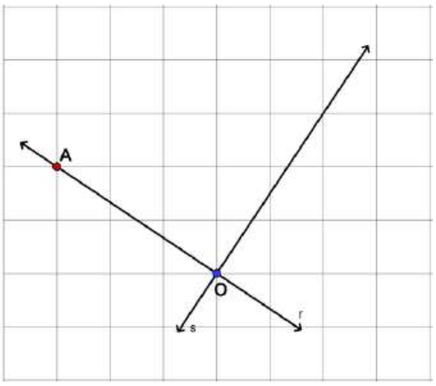
Rotação

A simetria de rotação ocorre quando uma figura plana é girada em torno de um ponto, de acordo com um ângulo (com medida de abertura entre 0° e 360°), em certo sentido (horário ou anti-horário).

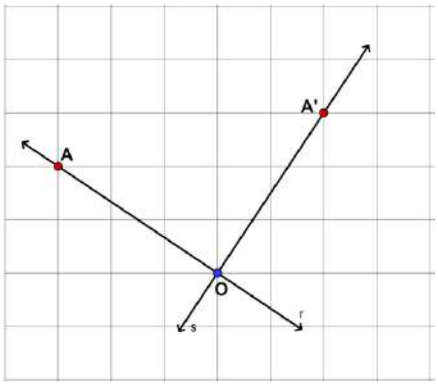
Vamos ver o processo para determinar a rotação de 90° no sentido horário de um ponto A em relação a um ponto fixo O:



1 Representar graficamente os objetos.

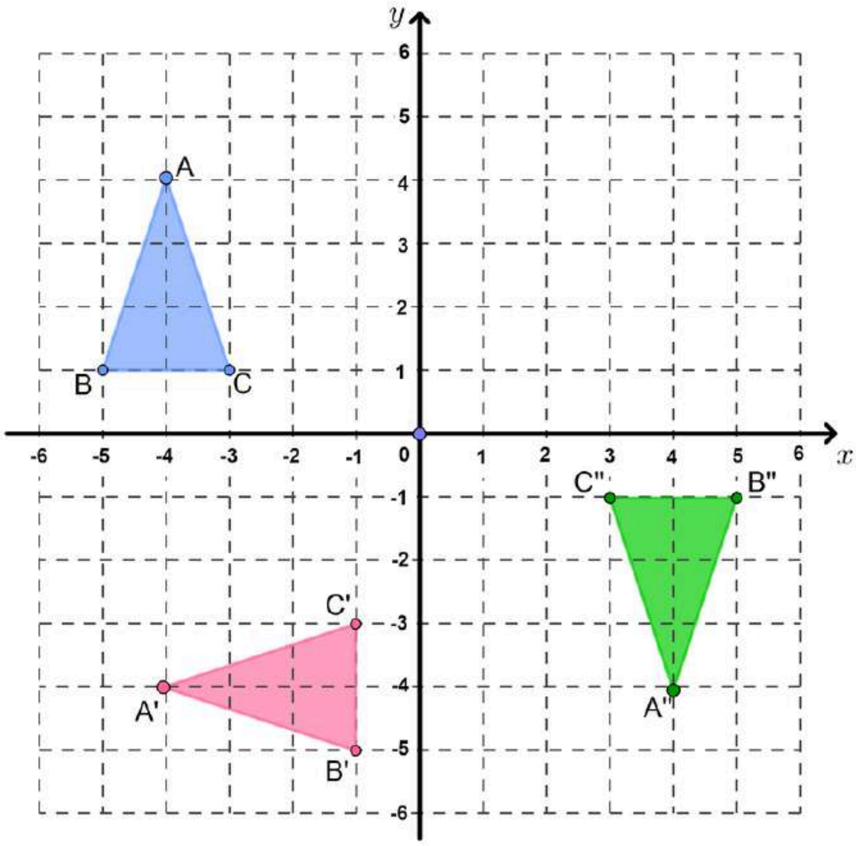


2 Traçar uma reta r passando por A e O. Após isso, traçar uma reta s passando por O formando o ângulo desejado com a reta r.



3 A partir de O, marcar, sobre a reta s um ponto A' , de modo que a distância de O a A seja igual à distância de O a A'.

Observe na figura abaixo as rotações de **90° no sentido anti-horário** e de **180° no sentido horário** em torno da origem do plano cartesiano, do triângulo cujos vértices são os pontos $A(-4,4), B(-5,1)$ e $C(-3,1)$:



Após a rotação de 90° no sentido anti-horário, obtemos o triângulo A'B'C', cujos vértices são: $A'(-4,-4), B'(-1,-5)$ e $C'(-3,-1)$.

Após a rotação de 180° no sentido horário, obtemos o triângulo A"B"C", cujos vértices são: $A"(4,-4), B"(5,-1)$ e $C"(3,-1)$.

FIGURAS SIMÉTRICAS

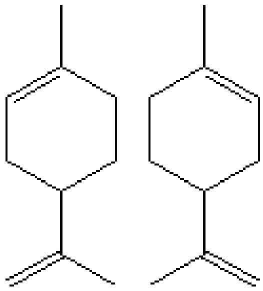
Algumas figuras são ditas simétricas, isto é, apresentam algum dos tipos de simetria já apresentadas em sua própria composição.

1 Uma figura apresenta **simetria axial** quando uma linha passa sobre a figura ou objeto de tal maneira que as duas partes ficam exatamente iguais, como se uma fosse o reflexo da outra. Chamamos essa linha de **eixo de simetria**.

Uma grande parte dos seres vivos apresentam simetrias axiais, como é o caso das mariposas Luna. Na química, a simetria é usada para classificar moléculas como quirais (simétricas) e aquirais (assimétricas). Muitos compostos extraídos de matérias-primas naturais são quirais, podendo aparecer isoladamente ou em pares, como por exemplo, o limoneno, enquanto um deles apresenta odor de laranja, o outro apresenta odor de limão.

Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Actias_luna. Acesso em 26 de janeiro de 2025.

Mariposa Luna



Disponível em: https://abrir.link/YRPRD. Acesso em 26 de janeiro de 2025.

Limoneno

2 Uma figura apresenta **simetria de rotação** quando é possível rotacionar essa figura em torno do seu próprio centro, a menos da volta completa, e, ainda assim, obter a mesma figura.

A simetria de rotação pode ser observada em diversas estruturas na natureza, como, por exemplo, nas flores de *Datura stramonium* e em cristais de gelo.

Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Datura_stramonium. Acesso em 26 de janeiro de 2025.

Flor de *Datura stramonium*

Disponível em: https://abre.ai/lXA3. Acesso em 26 de janeiro de 2025.

Cristal de gelo

3 Uma figura apresenta **simetria de translação** quando ela é obtida fazendo o descolamento, em apenas uma ou em diversas direções, de um de seus elementos.

A simetria de translação pode ser observada em obras de arte, como na obra Plano n° 128 de Escher, e em obras arquitetônicas, como o Palácio da Alvorada em Brasília.

Disponível em: https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/104. Acesso em 26 de janeiro de 2025.

Plano n° 128, M. C. Escher

Disponível em: https://abre.ai/lXBg. Acesso em 26 de janeiro de 2025.

Palácio da Alvorada, Brasília

Prezada Professora, Prezado Professor,

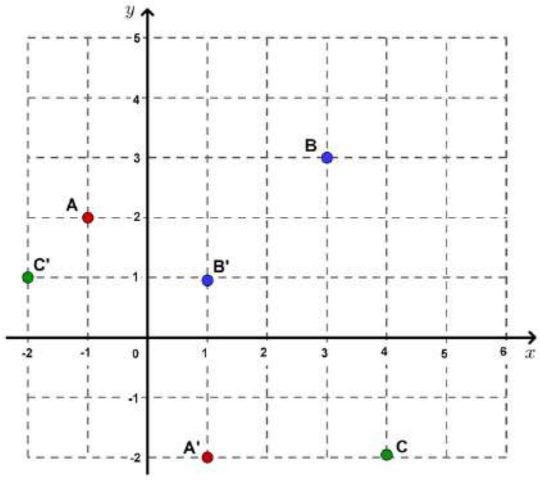
é importante discutir com os(as) estudantes que uma figura, objeto, ser vivo, obra de arte ou arquitetônica pode apresentar mais de um tipo de simetria. Pode ser uma proposta interessante sugerir que eles pesquisem e analisem algumas obras de arte buscando identificar a existência de alguns tipos de simetria.

TRASNFORMAÇÕES HOMOTÉTICAS

Nas transformações homotéticas, o tamanho das figuras é alterado, porém a nova figura é semelhante à figura original. As transformações homotéticas também são chamadas de homotetias e mantêm a proporcionalidade das medidas lineares.

Multiplicação de um ponto por um número real

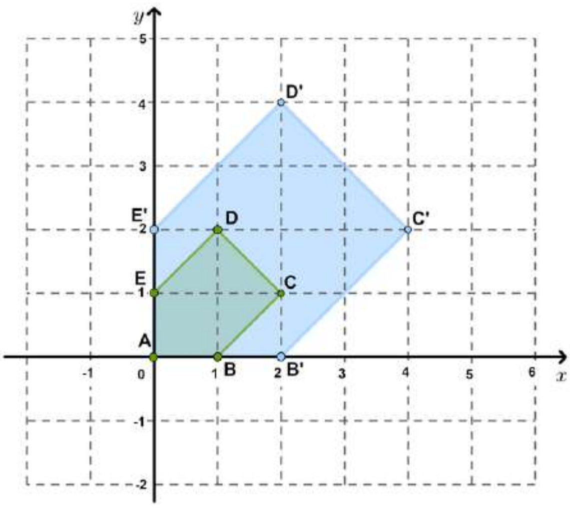
Para multiplicar um ponto por um número real devemos multiplicar todas as entradas desse ponto por este número real. Veja os exemplos ao lado:



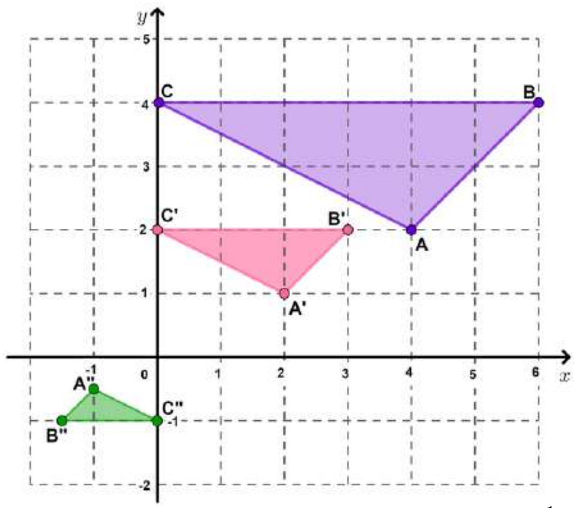
- $A(-1,2)$ multiplicado por -1, gera A':
  $-1 \times (-1,2) = (1,-2) \to A'(1,-2).$
- $B(3,3)$ multiplicado por $\frac{1}{3}$, gera B':
  $\frac{1}{3} \times (3,3) = (1,1) \to B'(1,1).$
- $C(4,-2)$ multiplicado por $-\frac{1}{2}$, gera C':
  $-\frac{1}{2} \times (4,-2) = (-2,1) \to C'(-2,1).$

Multiplicação de um polígono por um número real

Considerando os vértices de um polígono como pontos do plano cartesiano, para multiplicar um polígono por um número real k devemos obter seus vértices multiplicados por k e, então, ligá-los, obtendo, assim, o polígono multiplicado por k. Veja os exemplos abaixo:



Ao multiplicar o polígono ABCDE por 2, obtemos o polígono A'B'C'D'E'

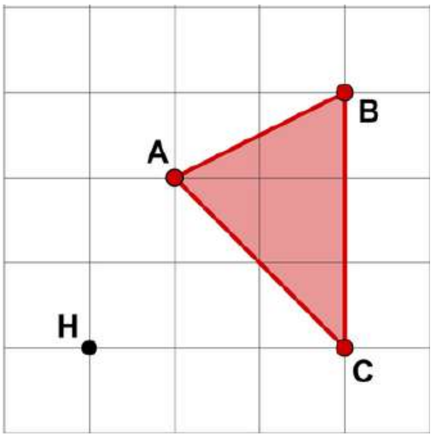


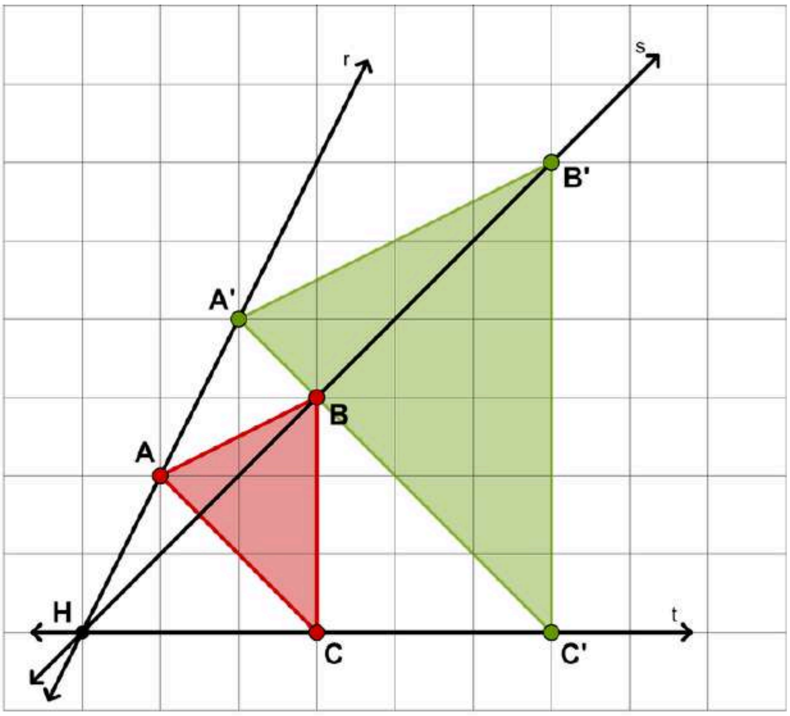
Ao multiplicar o triângulo ABC por $\frac{1}{2}$, obtemos o triângulo A'B'C'.
Ao multiplicar ABC por $-\frac{1}{4}$, obtemos o triângulo A''B''C''.

Se o valor de k for menor do que zero o polígono obtido é invertido em relação ao polígono original.

Homotetia

Para obter a ampliação ou redução, com ou sem inversão, de uma figura podemos usar a técnica de homotetia. Vamos ver como fazer a ampliação do triângulo ABC usando o centro de homotetia H e uma razão 2:





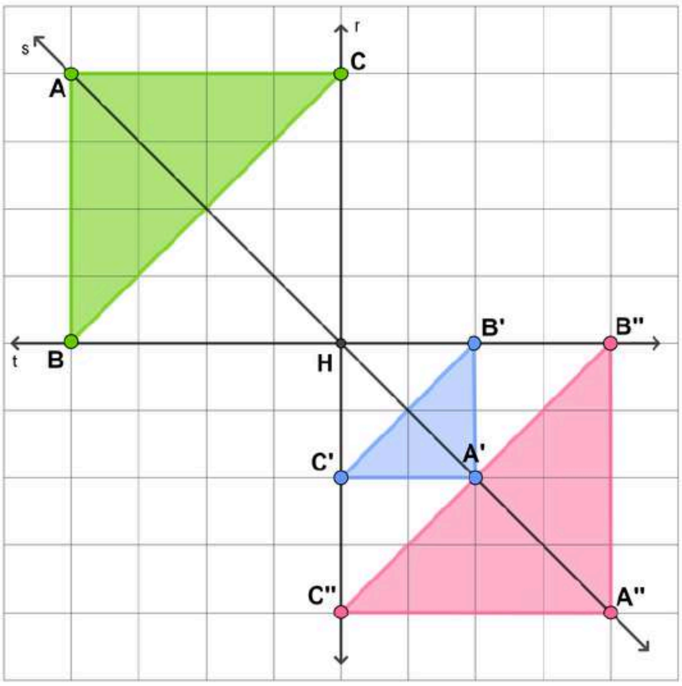
1 Representar graficamente os objetos.

2 A partir de H traçar 3 retas, r, s e t, passando por A, B e C, respectivamente.

3 Sob as retas traçadas, marcar os pontos A', B' e C' de modo que HA'=2HA, HB'=2HB e HC'=2HC. Após isso, construir o triângulo A'B'C'.

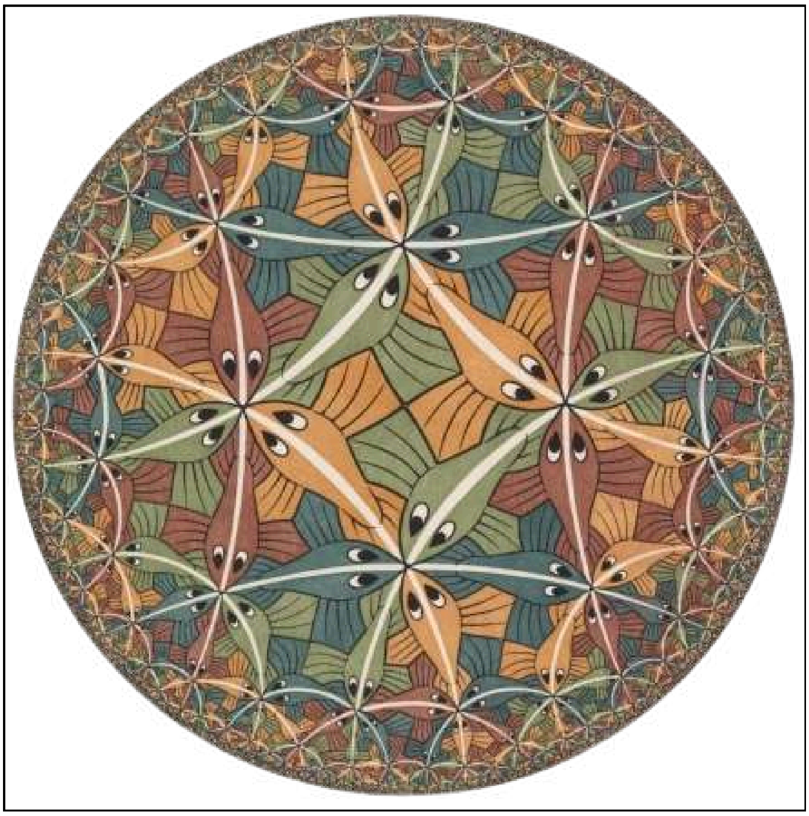
Caso a razão usada seja negativa a imagem formada aparece no lado oposto ao centro de homotetia H, portanto, a imagem formada se apresenta invertida em relação à imagem original. Nesse caso, dizemos ter uma homotetia inversa.

Observe ao lado a transformação do triângulo ABC por homotetia pelo ponto H usando a razão -0,5 e -1.



FIGURAS CONGRUENTES E SEMELHANTES

Observe a seguinte obra de M. C. Escher:



***Circle Limit III*, M. C. Escher**
Disponível em: https://mcescher.com/. acesso em 27 de janeiro de 2025.

É possível notar que os peixes do centro da imagem apresentam o mesmo tamanho e um pode ser obtido a partir do outro por uma simetria de rotação de 90°. Além disso, os peixes, à medida que nos aproximamos da circunferência vão reduzindo de tamanho, no entanto, mantém as mesmas características dos peixes presentes no centro na imagem.

Observando a figura podemos notar que, se forem sobrepostos, os desenhos dos peixes no centro coincidem exatamente. Nesse caso, dizemos que as **figuras são congruentes**.
Já nos peixes fora do centro, isto é, quando olhamos em direção à borda do círculo, temos que as as proporções são mantidas, no entanto, os peixes são reduzidos. Neste caso, dizemos que as **figuras são semelhantes**.

As transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) geram figuras congruentes enquanto as transformações homotéticas (com $k \neq \pm 1$) geram figuras semelhantes.

Uma polígono, ao sofrer uma transformação homotética, sofre alteração nas medidas de seus lados, portanto em seu perímetro e em sua área.
Quando $|k|>1$, a figura sofre uma ampliação, quando $|k|<1$ a figura sofre uma redução e se $|k|=1$, a figura não sofre modificação em relação ao comprimento de seus lados.
Em todos os casos o perímetro da nova figura é $|k|$ vezes o perímetro da figura original e a área da figura nova é k^2 vezes a área da figura original.

Para verificar esse fato e torná-lo mais tangível para os estudantes, o professor pode fazer uso desta aplicação no GeoGebra que pode ser obtida, também, pelo QR Code ao lado.

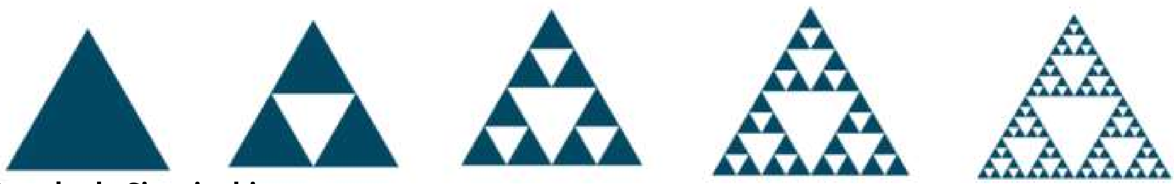
FRACTAIS

À primeira vista, o mundo natural parece aleatório, caótico. Mas na realidade existe todo um esquema desde as pétalas de uma flor, até o curso sinuoso de um rio. Observamos a presença de diferentes formas no mundo que nos rodeia e, uma delas, é o fractal.

O termo Fractal, foi denominado pelo matemático Benoit Mandelbrot, um dos precursores nos estudos desses objetos, baseando-se no latim, do adjetivo fractus, cujo significado é quebrar, criar fragmentos. Podemos definir um fractal como uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.

Ao tomar um trecho do fractal, percebe-se que tal trecho é semelhante ao fractal, apenas com uma redução na escala, do tamanho original. Essa característica permanece em qualquer nível de construção do fractal.

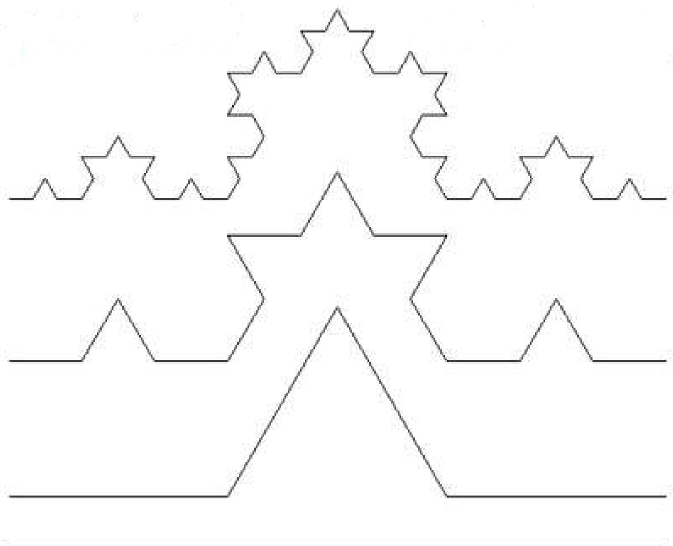
Um exemplo clássico de fractal é o Triângulo de Sierpinski. Ele recebe esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Sierpinski, que foi o primeiro a descrever essa estrutura.



Triângulo de Sierpinski
Disponível em: https://abrir.link/HirqN. Acesso em 27 de janeiro de 2025.

O Triângulo de Sierpinski é um fractal que parte, inicialmente, de um triângulo equilátero e que, em seguida, toma-se os pontos médios de cada lado do triângulo e, a partir deles, constrói-se quatro triângulos equiláteros, retirando o triângulo central, como na figura anterior.

Outro exemplo de fractal é a Curva de Koch, um fractal constituído a partir de um segmento de reta, no qual divide-se esse segmento em três parte iguais e retira-se a parte do meio, substituindo-a por um triângulo equilátero sem base, como na figura a seguir.

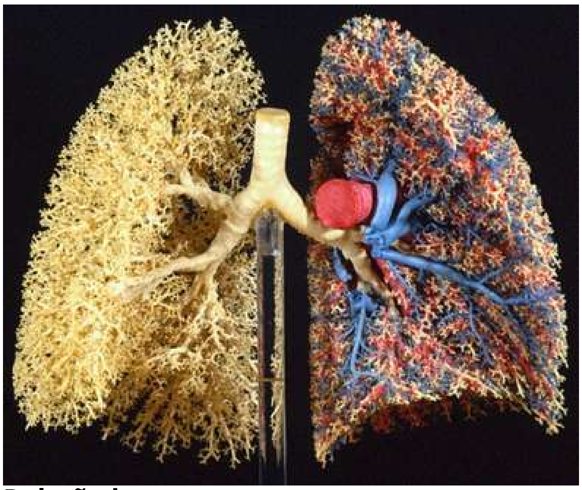


Professor(a), que tal explorar outros fractais com os(as) alunos? Sugerimos a árvore de Pythagoras e conjunto de Mandelbrot .

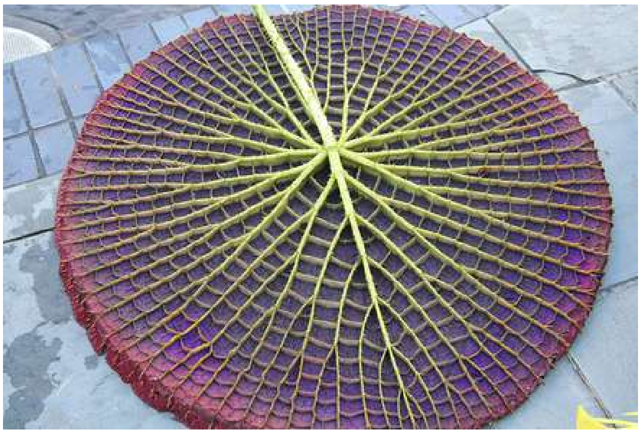
Curva de Koch
Disponível em: https://abrir.link/bqKtL. Acesso em 27 de janeiro de 2025.

Além dos objetos matemáticos como a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski, podemos observar fractais em diversos elementos da natureza, como, por exemplo, cristais, plantas e animais. Observe abaixo alguns exemplos:

Brocolis romanesco
Disponível em: https://abrir.link/QbGbO. Acesso em 01de fevereiro de 2025.

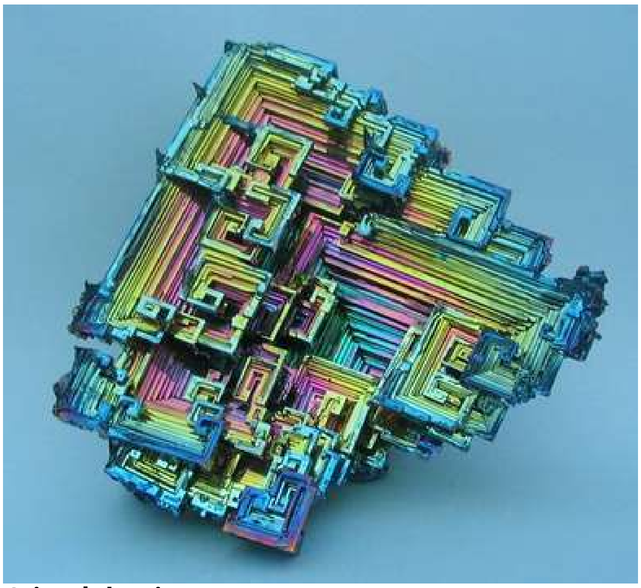


Pulmão humano
Disponível em: https://abrir.link/ElMdd. Acesso em 01 de fevereiro de 2025.



Vitória Régia
Disponível em: https://abrir.link/bwsjX. Acesso em 01de fevereiro de 2025.

Samambaia
Disponível em: https://abrir.link/LiqKk. Acesso em 01de fevereiro de 2025.



Cristal de Bismuto
Disponível em: https://abrir.link/bwsjX. Acesso em 01de fevereiro de 2025.

Leito de um rio no deserto
Disponível em: https://abrir.link/BCpJC. Acesso em 01de fevereiro de 2025.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1.

"Adinkra é um conjunto de símbolos ideográficos dos povos acã, da África Ocidental. Com mais de 90 símbolos, transmitindo significados filosóficos e socioculturais por meio de nomes e provérbios, esses ideogramas são referenciados em animais, plantas, corpos celestiais, no corpo humano e em formas abstratas. Esse sistema de escrita antigo africano desafia a ideia eurocentrista de que a África não possui história escrita.

No Brasil, esses símbolos se popularizam em diversos espaços e atualmente podem ser encontrados em portões, trabalhos com ferragem, estampas de vestimentas e até tatuagens. Os Adinkra, assim, transcenderam suas origens culturais, tornando-se uma forma de comunicação visual globalmente reconhecida, sendo adotados na diáspora para recuperar e valorizar tradições ancestrais africanas."

Disponível em: https://www.sescsp.org.br/editorial/com-que-adinkra-que-eu-vou-no-carnaval-do-sesc-consolacao/. Acesso em 1º de fevereiro de 2025.

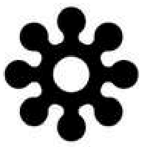
Observe abaixo alguns símbolos adinkra:


AKOKO NAN

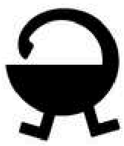
Os pés de galinha. A galinha pisa nos pintinhos, mas não os machuca.
Símbolo da proteção materna e paterna e da disciplina temperada com paciência e capricho.


AYA

Samambaia. A palavra também significa "Eu não tenho medo de você".
Símbolo da resistência, do desafio às dificuldades, da força física, da perseverança, da independência e da competência.


FOFOO

A planta fofoo sempre quer que as sementes da gyinatwi ressequem.
Símbolo da necessidade de evitar o ciúme e a inveja.


SANKOFA

Nunca é tarde para voltar e apanhar o que ficou atrás.
Símbolo de sabedoria de aprender com o passado para construir o futuro.

Sobre a simetria presente nos símbolos adinkra acima, julgue as afirmativas abaixo em verdadeiro ou falso.

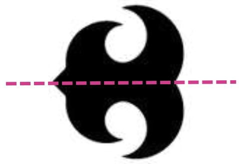
a) ( ) Fofoo apresenta apenas simetria de rotação de 45°.

b) ( ) Akoko Nan e Aya apresentam o mesmo tipo de simetria.

c) ( ) Sankofa não apresenta nenhum tipo de simetria.

d) ( ) Akoko Nan apresenta simetria de reflexão e de rotação.

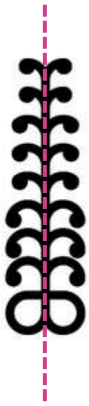
Solução: Vamos analisar cada uma das figuras individualmente.



1 **Akoko Nan** apresenta uma simetria de reflexão com um eixo de simetria horizontal, conforme indicado na figura ao lado, e não apresenta simetria de rotação. observe a sequência de rotações da figura abaixo.

0° 90° 180° 270° 360°

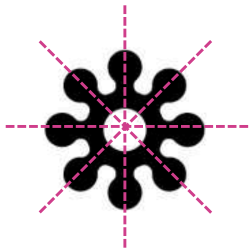
2 **Aya** apresenta apenas uma simetria de reflexão com eixo de simetria vertical, conforme indicado ao lado.

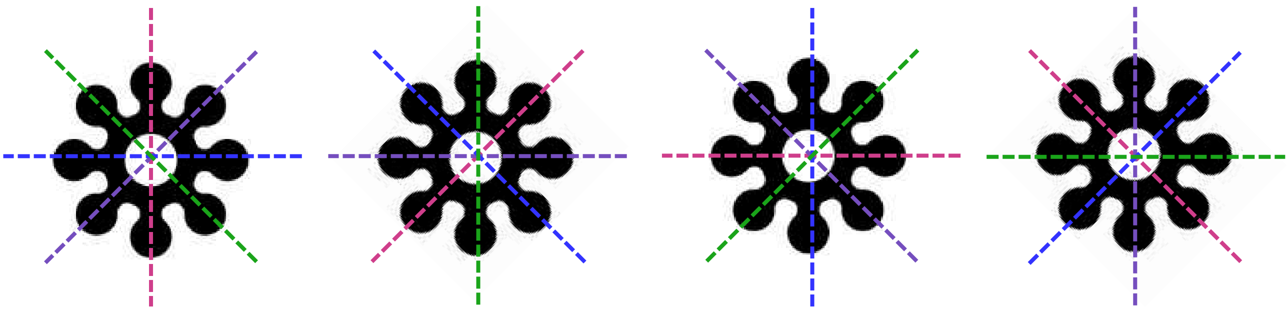


3 **Sankofa** não apresenta nenhum tipo de simetria em sua composição.

4 **Fofoo** apresenta simetrias de rotação e 4 eixos de simetria, conforma a figura ao lado.

Observe que os eixos de simetrias formam, entre dois eixos consecutivos, um ângulo de 45°, indicando que a rotação da figura de um ângulo múltiplo de 45° gera a mesma figura, observe alguns exemplos:





0° 45° 90° 135°

Assim, temos:

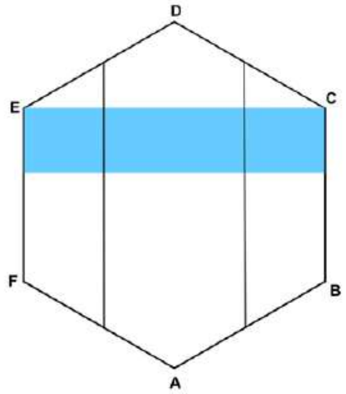
a) (F) Fofoo apresenta **apenas** simetria de rotação de 45°.

b) (V) Akoko Nan e Aya apresentam o mesmo tipo de simetria.

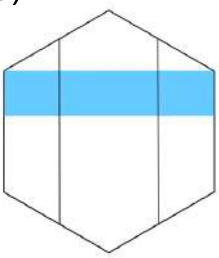
c) (V) Sankofa não apresenta nenhum tipo de simetria.

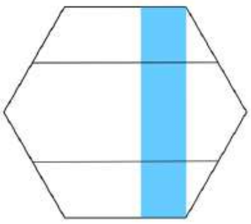
d) (F) Akoko Nan apresenta simetria de reflexão **e de rotação**.

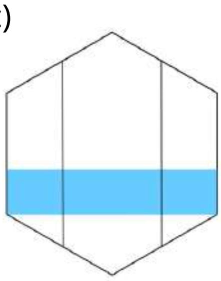
EXERCÍCIO 2. (OBRL 2017 - Adaptada) A imagem abaixo representa um azulejo decorado.

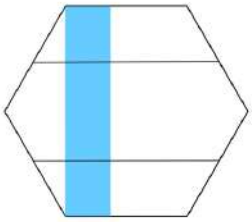


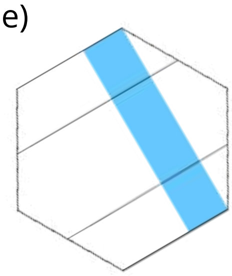
Efetuando, nessa figura, uma simetria de reflexão em torno do lado BC e, em seguida, uma rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto B, obtemos a figura indicada na alternativa

a)


b)


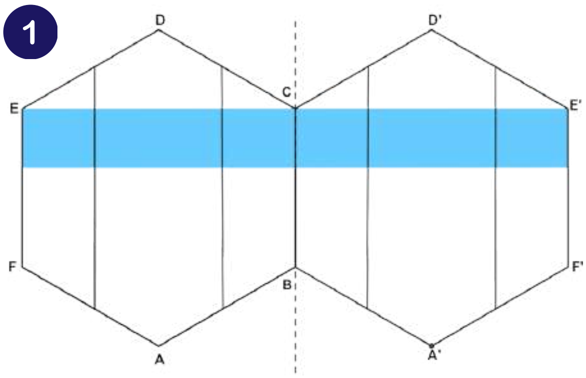
c)


d)


e)


Solução:

1

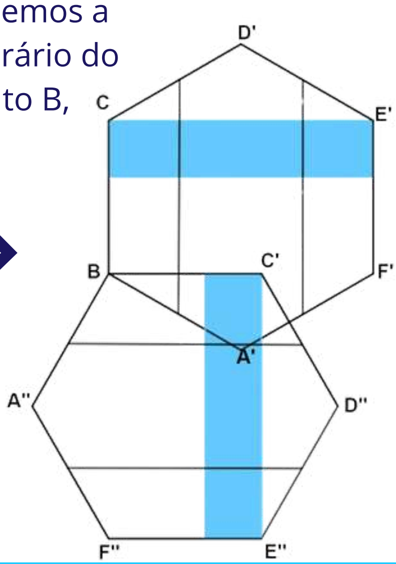


Considere o hexágono ABCDEF, fazendo a reflexão em torno do lado BC, obtermos A'BCD'E'F'.

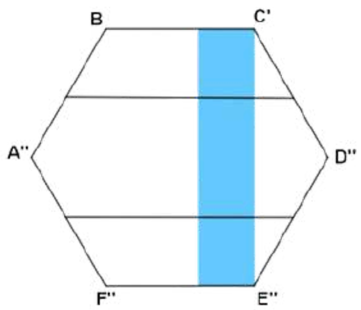
2 A partir de A'BCD'E'F', fazemos a rotação de 90° no sentido horário do hexágono em relação ao ponto B, portanto,

A'→A"
B→B
C→C'
D'→D"
E'→E"
F'→F"

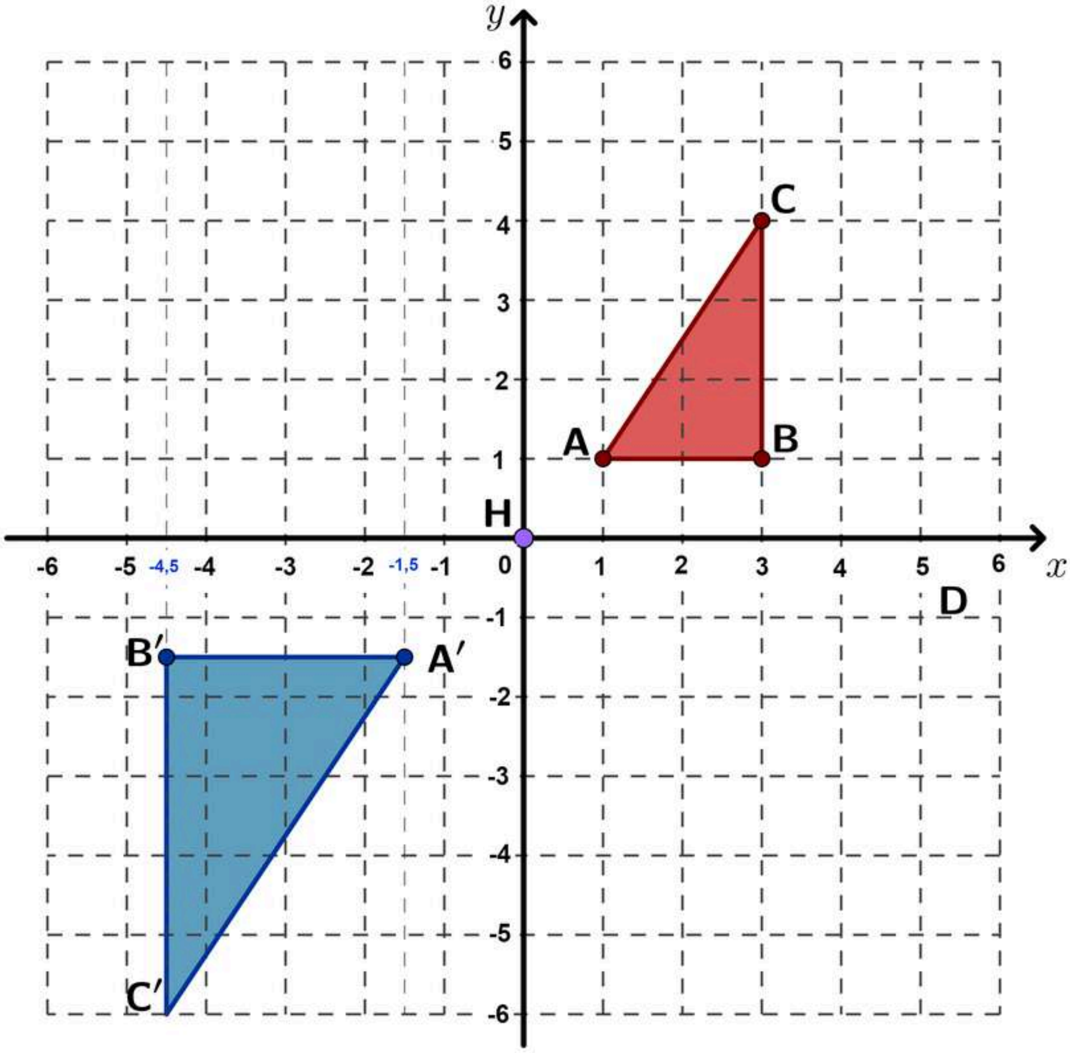
Assim, o hexágono final é A"BC'D"E"F".



3 Logo, ao final do processo, obtemos a figura presente na alternativa **b)**:



EXERCÍCIO 3. A imagem abaixo representa a transformação homotética do triângulo ABC através do centro de homotetia H.



Sobre esta transformação faz-se as seguintes afirmativas:

I. A razão de homotetia é maior do que 1, pois as dimensões de A’B’C’ são maiores do que as dimensões de ABC.

II. O perímetro de A’B’C’ é 1,5 vezes o perímetro de ABC.

III. A área de A’B’C’ é 1,5 vezes a área de ABC.

Está(ão) correta(s) apenas a(s) afirmativa(s)

a) I.
b) I e II.
c) II.
d) II e III.
e) I e III.

Solução: Inicialmente, note que o segmento AB mede 2 u.c. e que o segmento A’C’ mede 3 u.c., portanto, a razão de homotetia, em módulo, é igual a 1,5:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

No entanto, a figura está invertida, assim, k=-1,5. Desse modo, o perímetro de A’B’C’ é 1,5 vezes o perímetro de ABC e a área de A’B’C’ é 1,5·1,5=2,25 vezes a área de ABC. Portanto, a alternativa correta é a **alternativa C**.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 3 (Geometria e Trigonometria) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - p. 18-27.
2. **Volume 4 (Trigonometria e Sistemas Lineares) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - p. 13-15.

M. C. ESCHER

As obras do artistas Maurits Cornelis Escher podem ser encontradas no site dedicado a manter seu acervo: https://mcescher.com/gallery/symmetry/#

FRACTAIS

Os QR Codes ao lado levam diretamente para construções interativas do Triângulo de Sierpinski e da Curva de Koch no geogebra. É interessante abrir os links e mostrar a construção iterativa desses objetos no momento da discussão em sala.

Triângulo de Sierpinski

Curva de Koch

ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR

A atividade proposta neste link pode ser utilizada sozinha ou em conjunto com os professores de filosofia e sociologia para discutir a presença de simetrias nas culturas africana e indígena e para discutir questões como a importância dessas obras para a valorização étnica.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

O **Produto Educacional** da pesquisa de mestrado de Sabrine Costa Oliveira, cujo título é “Transformações Geométricas: Bordando Conceitos e Divulgando Atividades” apresenta algumas propostas (páginas 30 a 47) que podem ser exploradas para o estudo das transformações geométricas.

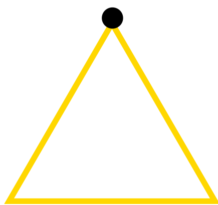
Atividades

Este documento disponibiliza, para estudantes e professores, uma malha quadriculada e um plano cartesiano ao final para otimizar o aprendizado e o ensino, oferecendo ferramentas práticas para a realização de tarefas, sempre que necessário.

ATIVIDADE 1

Uma figura geométrica em forma de triângulo equilátero está posicionada com um dos seus vértices apontando para cima, conforme representação abaixo. O triângulo será girado 90 graus no sentido horário em torno do seu centro. Após a rotação de 90 graus no sentido horário, qual será a nova posição do vértice que inicialmente estava apontando para cima?

A) O vértice ficará apontando para a direita.
B) O vértice ficará apontando para baixo.
C) O vértice ficará apontando para a esquerda.
D) O vértice permanecerá na mesma posição.
E) O vértice ficará apontando para o centro do triângulo.



ATIVIDADE 2

Considere um pentágono com os seguintes vértices no plano cartesiano:

- $A(1,2)$
- $B(3,4)$
- $C(5,2)$
- $D(4,0)$
- $E(2,1)$

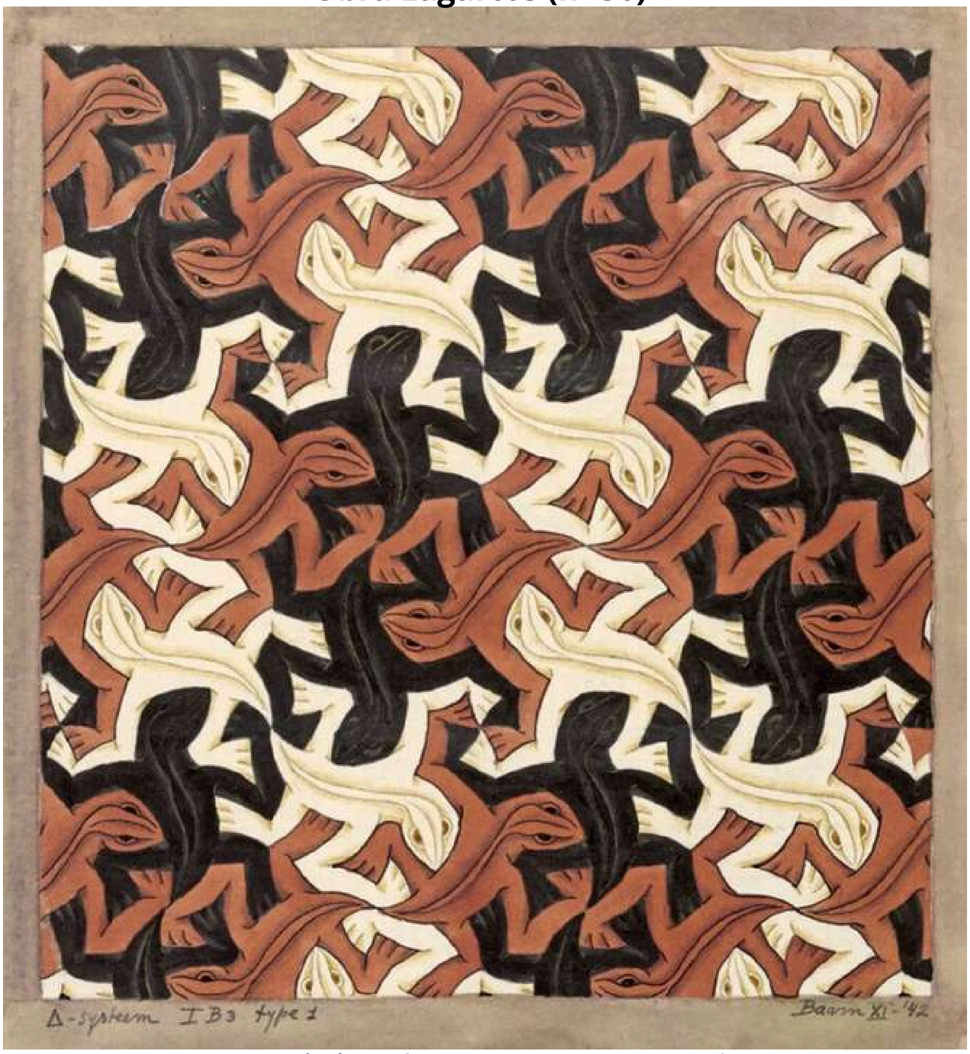
Esse pentágono será submetido a uma reflexão em relação ao eixo X. Quais serão as novas coordenadas dos vértices do pentágono após essa transformação?

$A) A'(1,-2), B'(3,-4), C'(5,-2), D'(-4,0), E'(-2,1)$
$B) A'(1,-2), B'(3,-4), C'(5,-2), D'(4,0), E'(2,1)$
$C) A'(-1,2), B'(-3,4), C'(-5,2), D'(-4,0), E'(-2,1)$
$D) A'(1,-2), B'(3,-4), C'(5,-2), D'(4,0), E'(2,-1)$
$E) A'(1,-2), B'(3,-4), C'(-5,2), D'(4,0), E'(2,1)$

ATIVIDADE 3

A obra **Lagartos nº 56** (*Lizards*), criada por Maurits Cornelis Escher em 1942, é um exemplo notável da habilidade do artista em combinar arte e matemática. Esta xilogravura representa uma série de lagartos que se entrelaçam em um padrão repetitivo, demonstrando a maestria de Escher em transformar formas poligonais em composições artísticas complexas.

Obra Lagartos (nº 56)



Disponível em: https://arteeartistas.com.br/

Dentre as características matemáticas abaixo, qual é mais evidente na obra "Lagartos nº 56" de Escher?

A) O uso de reflexão para formar imagens espelhadas entre os lagartos.

B) A aplicação de translação para criar o padrão repetitivo dos lagartos.

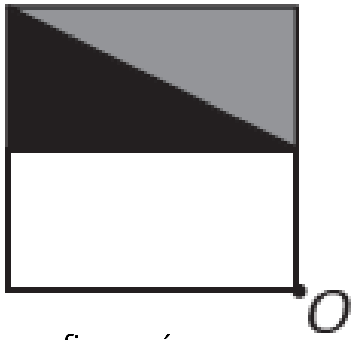
C) O uso de simetria por rotação para organizar os lagartos em torno de um ponto central.

D) A representação de fractais na composição das figuras.

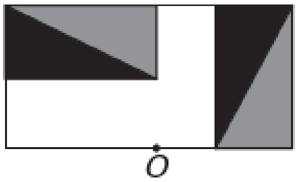
E) A utilização de proporções áureas no desenho dos lagartos.

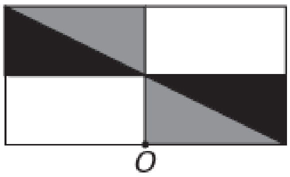
ATIVIDADE 4

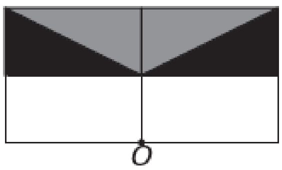
(Enem 2013) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto **O**.

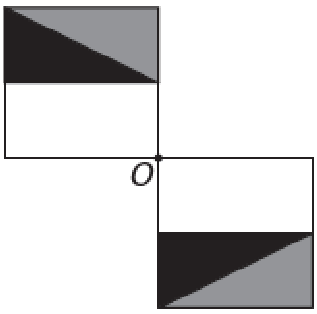


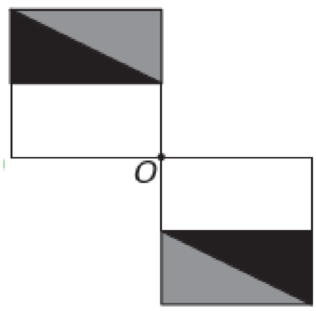
A imagem que representa a nova figura é:

A)


B)


C)


D)


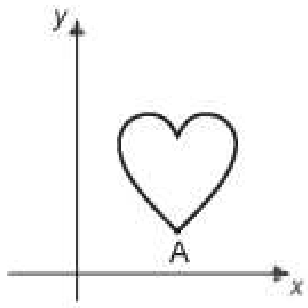
E)


ATIVIDADE 5

(Enem PPL 2018) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:

1ª - Reflexão no eixo x;
2ª - Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;
3ª - Reflexão no eixo y;
4ª - Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;
5ª - Reflexão no eixo x.

Posição inicial da figura:



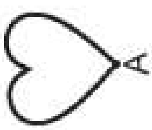
Qual a posição final da figura?

A) 

B) 

C) 

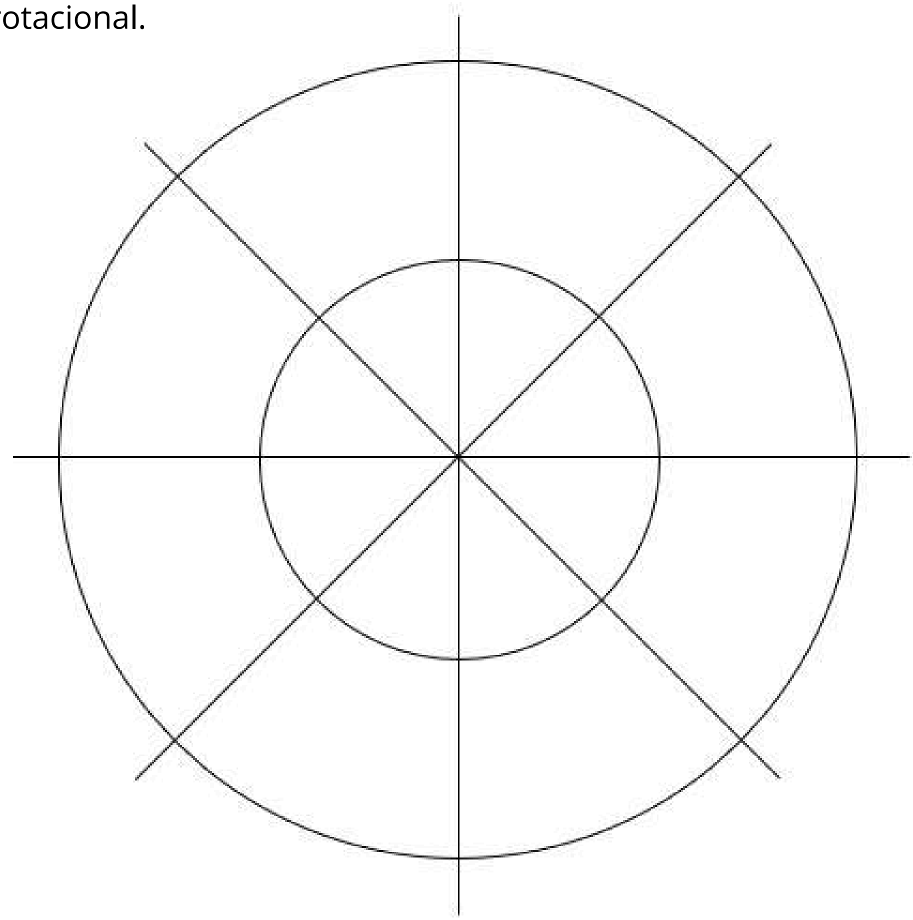
D) 

E) 

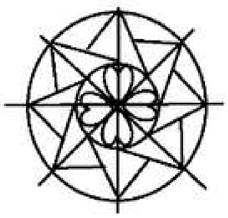
ATIVIDADE 6

As mandalas são representações artísticas que possuem uma rica história e significado em diversas culturas. Originárias de tradições espirituais, como o hinduísmo e o budismo, as mandalas são frequentemente utilizadas como ferramentas de meditação e autoconhecimento. Elas simbolizam a totalidade, a harmonia e a conexão entre o microcosmo e o macrocosmo. A palavra "mandala" origina-se do sânscrito e significa "círculo", representando a totalidade e a harmonia. Sua construção envolve a aplicação de conceitos matemáticos, especialmente a simetria rotacional (refere-se à propriedade de um objeto que pode ser girado em torno de um ponto central e ainda parecer idêntico após uma rotação em um ângulo específico), que é fundamental para criar padrões repetitivos e equilibrados.

Utilize o plano abaixo para construir uma mandala aplicando o conceito de simetria rotacional.



Exemplo:



Dica:

Pinte sua mandala com suas cores favoritas. Experimente combinações que te agradem e que tragam harmonia ao seu trabalho. Sinta-se livre para adicionar elementos únicos, como figuras geométricas ou desenhos que representem algo especial para você.

"Assim como as mandalas revelam a harmonia das formas e cores, a Matemática nos mostra a perfeição dos padrões e das conexões. Vamos criar juntos, unindo arte e ciência, para descobrir a beleza que existe em cada detalhe!"

ATIVIDADE 7

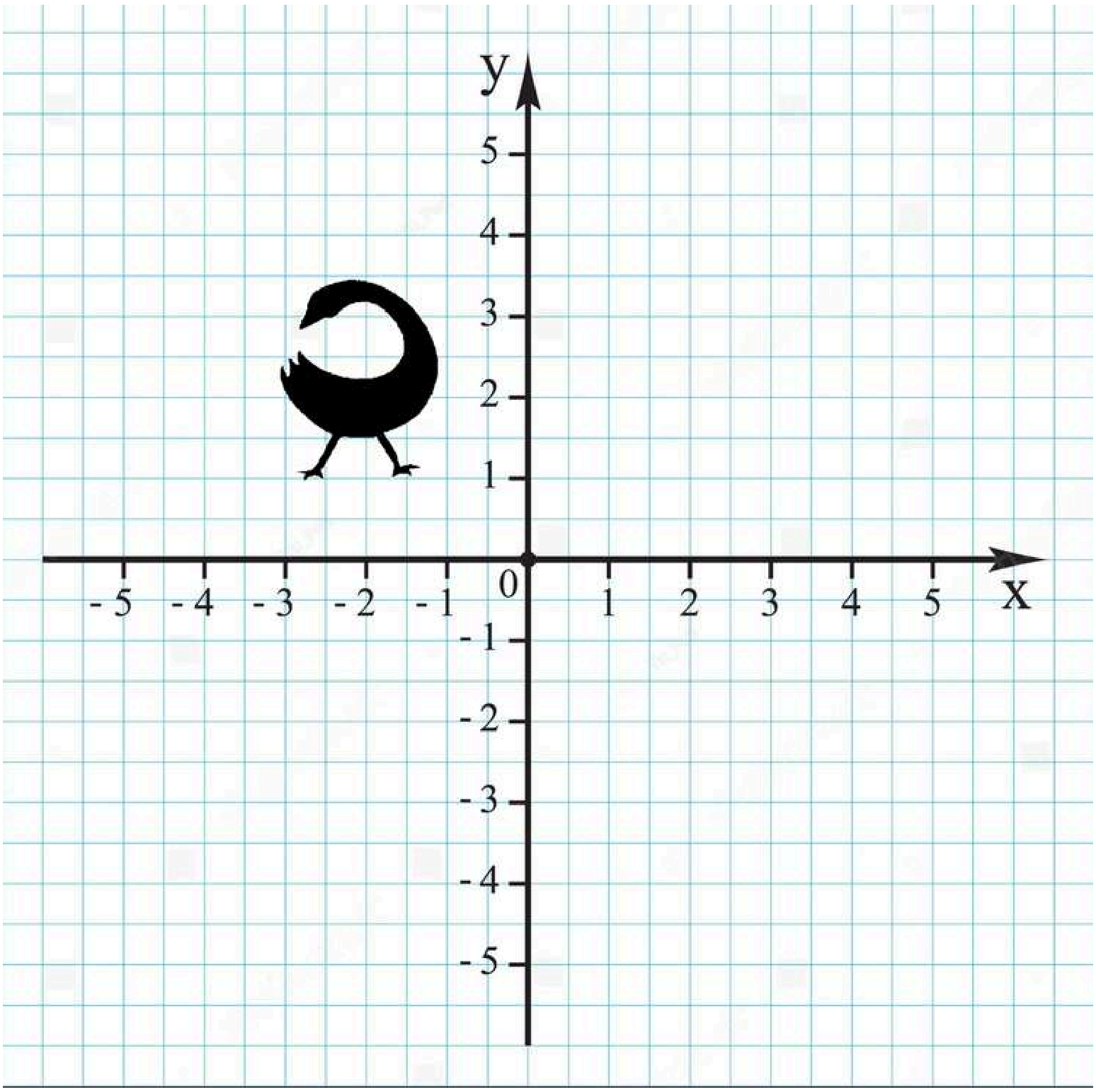
Crie na malha triangular a seguir o Triângulo de Sierpinski até a 3ª ordem, seguindo os passos descritos abaixo. Use lápis e régua para garantir precisão e observe como padrões geométricos se repetem em diferentes escalas.

- Passo 1 (Triângulo Inicial, ordem 0): Identifique um triângulo equilátero grande na malha e destaque-o como o triângulo inicial.
- Passo 2 (Ordem 1): Localize os pontos médios dos lados do triângulo inicial e conecte-os para formar um triângulo menor central. Pinte ou marque o triângulo central para removê-lo visualmente.
- Passo 3 (Ordem 2): Repita o processo nos três triângulos restantes, localizando os pontos médios de cada lado e removendo os novos triângulos centrais.
- Passo 4 (Ordem 3): Continue o padrão nos nove triângulos resultantes, removendo os triângulos centrais de cada um.

ATIVIDADE 8

O símbolo Sankofa, originário da cultura Akan da África Ocidental, representa a importância de aprender com o passado para construir um futuro melhor. Ele é frequentemente ilustrado como um pássaro mítico que voa para frente, mas com a cabeça voltada para trás, segurando um ovo que simboliza o futuro. Esse símbolo também pode ser representado por um coração estilizado. A palavra Sankofa vem da língua Akan e significa "voltar e buscar" (san = voltar, ko = ir, fa = buscar).

A seguir está o símbolo Sankofa representado em um plano cartesiano. Desenhe essa figura no plano cartesiano, após a realização da reflexão da figura inicial em relação ao eixo y. Na sequência, explique as etapas que utilizou para realizar essa transformação isométrica.



ATIVIDADE 9

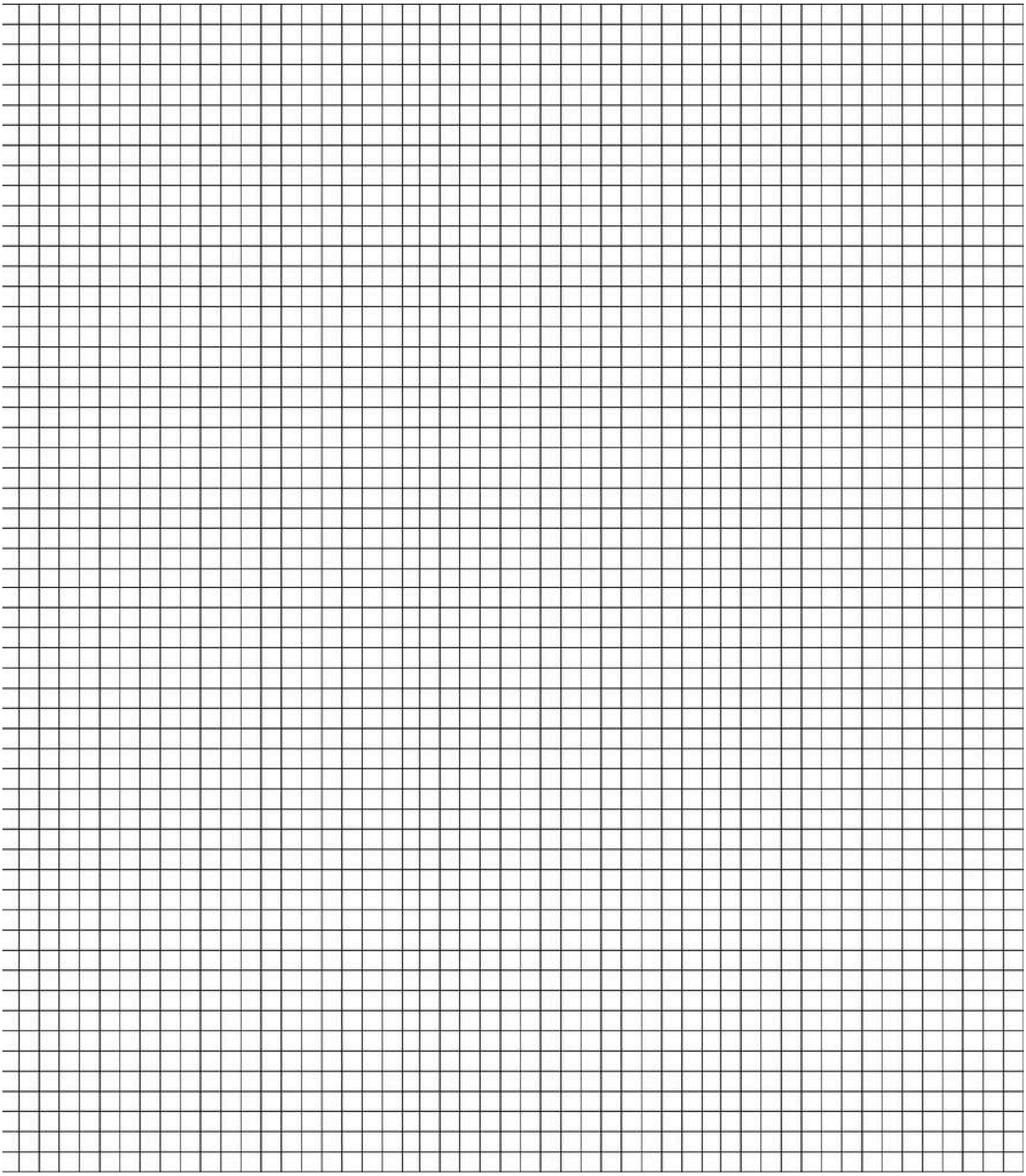
Em relação às transformações isométricas e homotéticas, leia cada afirmação abaixo e marque "V" para verdadeiro ou "F" para falso.

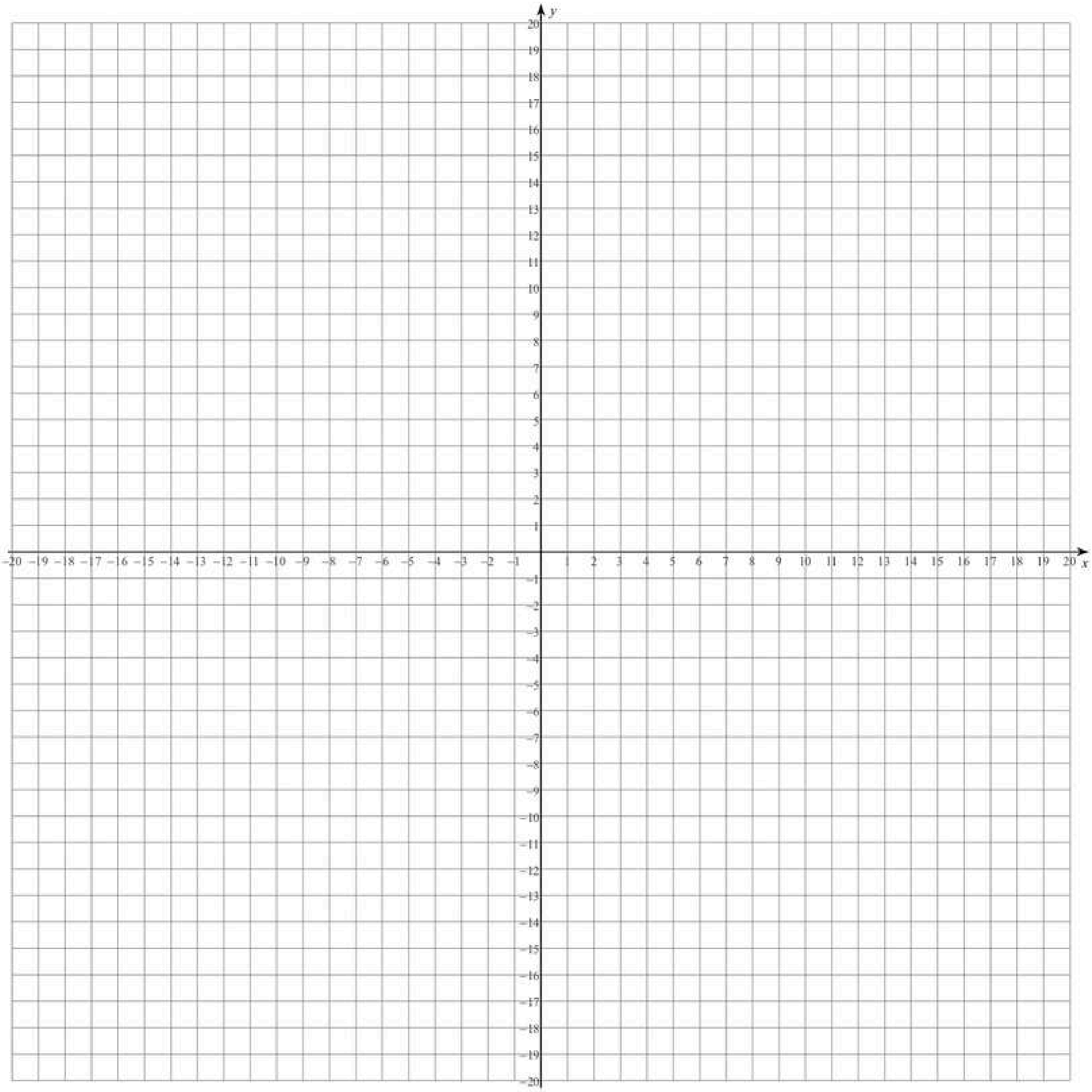
( ) Uma transformação isométrica preserva distâncias entre os pontos da figura.
( ) Em uma transformação homotética, as figuras resultantes são sempre congruentes.
( ) A translação é um exemplo de transformação isométrica.
( ) Na homotetia, todos os pontos da figura original são afastados ou aproximados de um ponto fixo chamado centro de homotetia.
( ) A rotação é uma transformação que altera a forma da figura, mas mantém suas dimensões.
( ) Em uma transformação homotética com razão k > 1, a figura resultante é maior que a original.
( ) Reflexão é uma forma de transformação isométrica que altera a orientação da figura.
( ) Uma transformação homotética é realizada sem alterar a proporção entre os lados da figura original.
( ) Todas as transformações isométricas são também homotéticas.

ATIVIDADE 10

Considere um triângulo ABC com vértices nos pontos $A(1, 2), B(3, 2)$ e $C(2, 4)$. Aplique uma transformação homotética com centro no ponto $O(0, 0)$ e razão de homotetia $k = 2$. Determine as coordenadas dos vértices do triângulo A’B’C’ após a homotetia.

As figuras seguintes são suporte para realização de algumas tarefas, caso considere necessário.




y
x

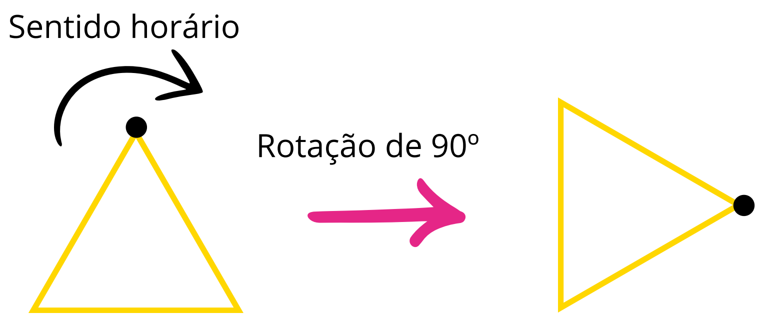
Gabarito

ATIVIDADE 1 - A
ATIVIDADE 2 - D
ATIVIDADE 3 - C
ATIVIDADE 4 - E
ATIVIDADE 5 - C

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Ao girar o triângulo equilátero 90 graus no sentido horário, o vértice que estava originalmente apontando para cima se moverá para a posição que estava à sua direita.

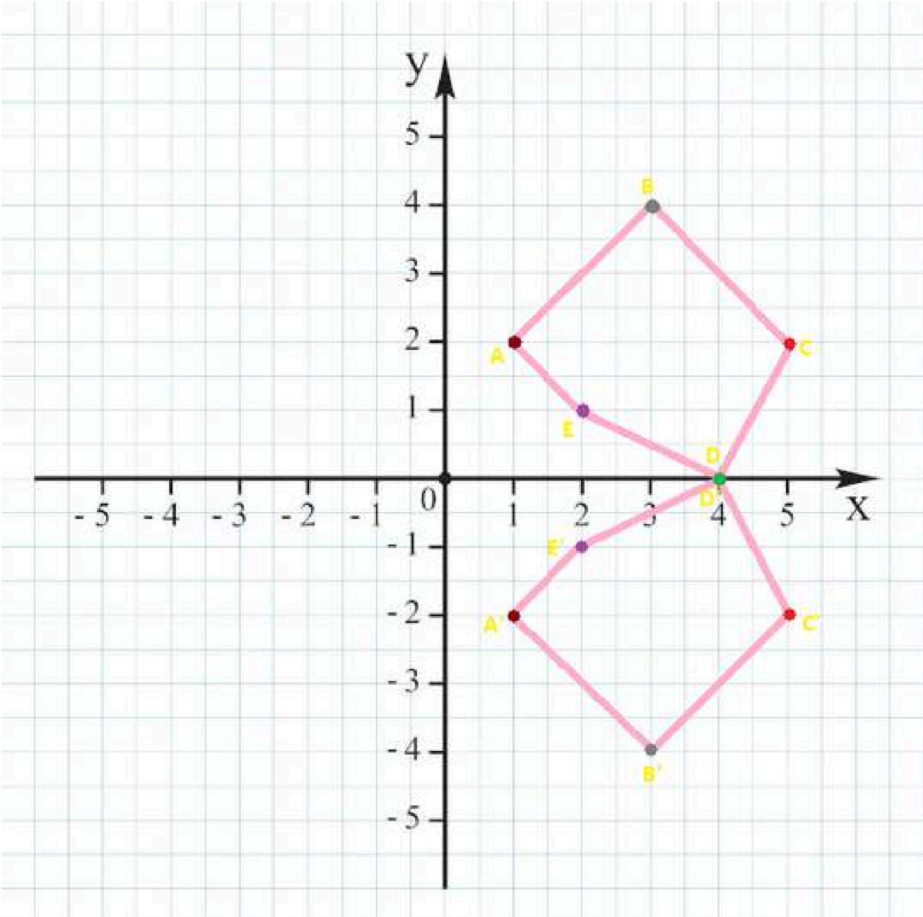


Logo, **alternativa A**.

ATIVIDADE 2

Ao refletir um ponto em relação ao eixo X, a coordenada Y do ponto muda de sinal. Portanto:

A (1, 2) se torna A' (1, −2).
B (3, 4) se torna B' (3, −4).
C (5, 2) se torna C' (5, −2).
D (4, 0) se torna D' (4, 0), ou seja, permanece inalterado.
E (2, 1) se torna E' (2, −1).



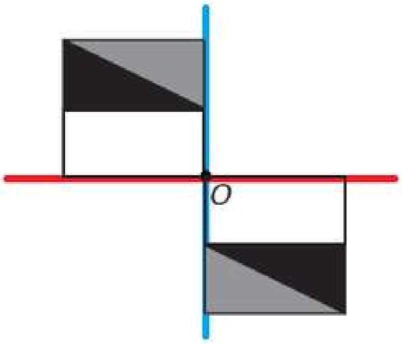
Logo, **alternativa D**.

ATIVIDADE 3

Os lagartos são dispostos de maneira a criar um efeito de simetria por rotação, onde cada lagarto parece girar em torno do ponto central, que é a boca de um deles. Logo, **alternativa C**.

ATIVIDADE 4

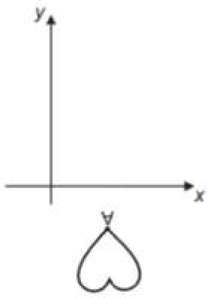
A nova figura deve exibir simetria em relação ao ponto O, ou seja, a distância de todos os pontos de uma parte da figura até o ponto O deve ser a mesma que a dos pontos simétricos da outra figura em relação a esse mesmo ponto O. Ao traçar um eixo vertical (em azul) e um eixo horizontal (em vermelho) que passam pelo ponto O e pelos lados da figura, observa-se que a figura original está localizada no segundo quadrante; portanto, a figura simétrica deve estar no quarto quadrante, refletida precisamente em relação ao ponto O, sem rotações ou inversões adicionais.



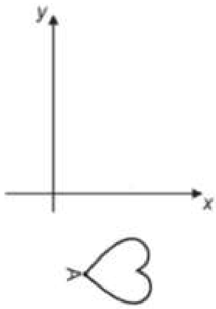
Logo, **alternativa E**.

ATIVIDADE 5

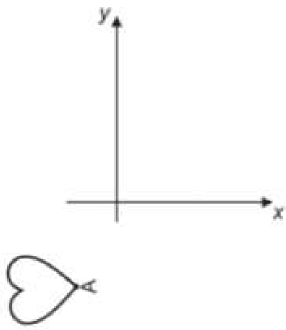
1ª - A reflexão em torno do eixo x inverte a posição do coração e do ponto A, deixando-os de cabeça para baixo:



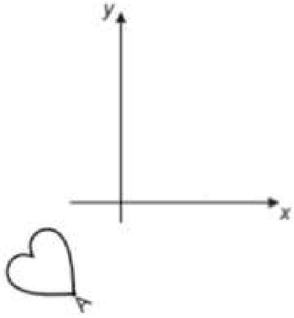
2ª - Ao girar 90 graus no sentido anti-horário, o coração ficará de lado, com o ponto A à sua esquerda:



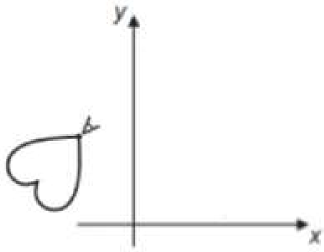
3ª - A reflexão em torno do eixo y faz com que o coração também fique de lado, mas com o ponto A à sua direita:



4ª - Uma rotação de 45 graus no sentido horário posiciona o coração na diagonal, voltado para cima, com o ponto A localizado na diagonal inferior direita em relação a ele:



5ª - Por fim, a reflexão em torno do eixo x faz com que o coração fique na diagonal, com o ponto A na diagonal superior direita:

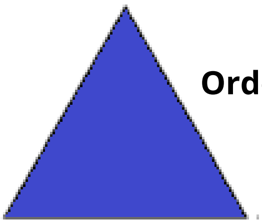


Logo, **alternativa C**.

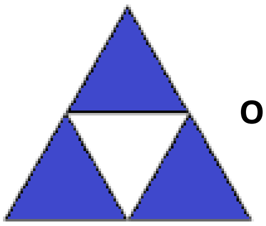
ATIVIDADE 6

Resposta pessoal.

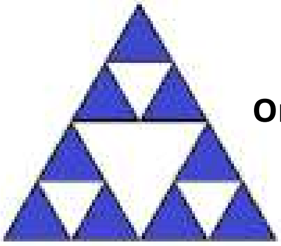
ATIVIADE 7



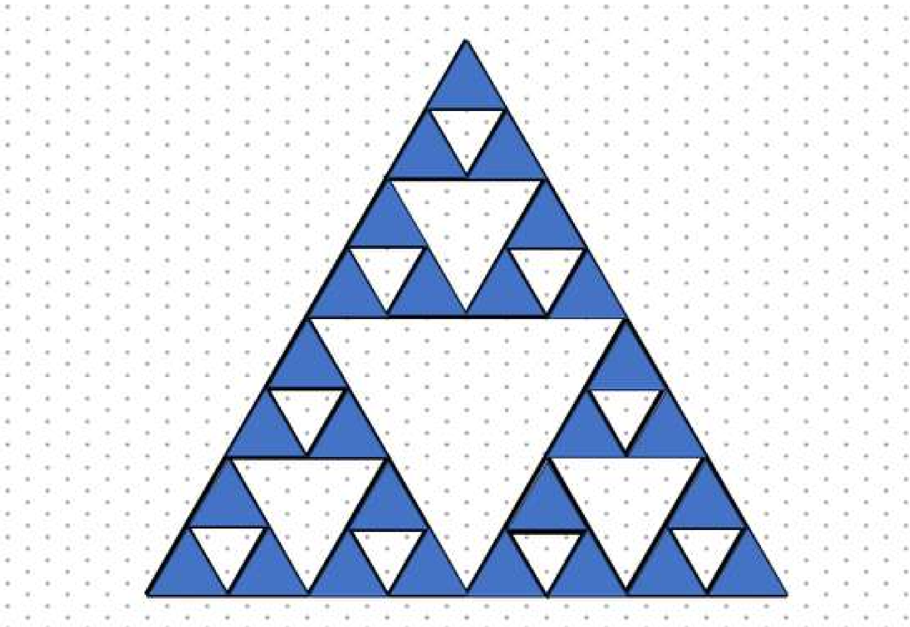
Ordem 0



Ordem 1



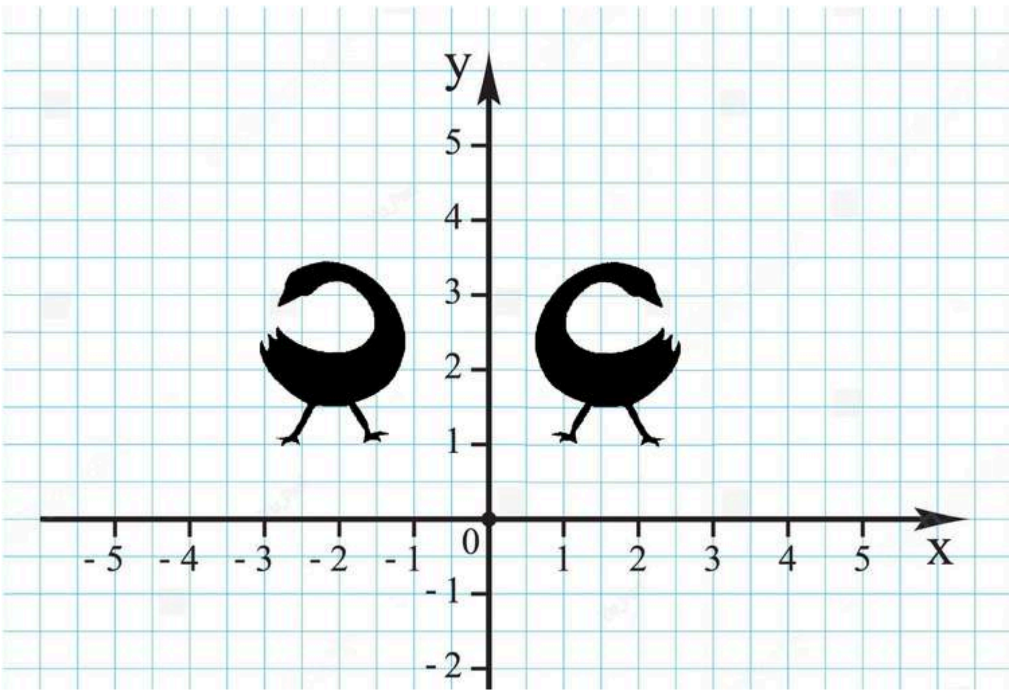
Ordem 2



Ordem 3

ATIVIDADE 8

Identifique os Pontos: Observe as coordenadas dos pontos principais que compõem o símbolo Sankofa no plano cartesiano.
Aplique a Reflexão: Realize a transformação de reflexão em relação ao eixo y. Para cada ponto original (x,y), determine sua nova posição após a reflexão: (− x, y).
Desenhe o Novo Símbolo: Usando as novas coordenadas obtidas, represente o símbolo Sankofa refletido no plano cartesiano.



ATIVIDADE 9

Analisando as afirmativas:

(**V**) Uma transformação isométrica preserva distâncias entre os pontos da figura.
→ *Transformações isométricas, como translações, rotações e reflexões, mantêm as distâncias e ângulos, resultando em figuras congruentes.*

(**F**) Em uma transformação homotética, as figuras resultantes são sempre congruentes.
→ *Embora a homotetia preserve a forma das figuras, ela altera suas dimensões. Portanto, as figuras resultantes não são congruentes, mas sim semelhantes.*

(**V**) A translação é um exemplo de transformação isométrica.
→ *A translação move todos os pontos de uma figura na mesma direção e distância, mantendo as distâncias e ângulos.*

(**V**) Na homotetia, todos os pontos da figura original são afastados ou aproximados de um ponto fixo chamado centro de homotetia.
→ *O centro de homotetia é o ponto em relação ao qual a figura é ampliada ou reduzida.*

(**F**) A rotação é uma transformação que altera a forma da figura, mas mantém suas dimensões.
→ *A rotação não altera a forma nem as dimensões da figura; ela apenas muda a orientação.*

(**V**) Em uma transformação homotética com razão $k > 1$, a figura resultante é maior que a original.
→ *Quando a razão k é maior que 1, todos os pontos da figura se afastam do centro de homotetia, resultando em uma figura ampliada.*

(**V**) Reflexão é uma forma de transformação isométrica que altera a orientação da figura.
→ *A reflexão inverte a orientação da figura, mas mantém as distâncias e ângulos.*

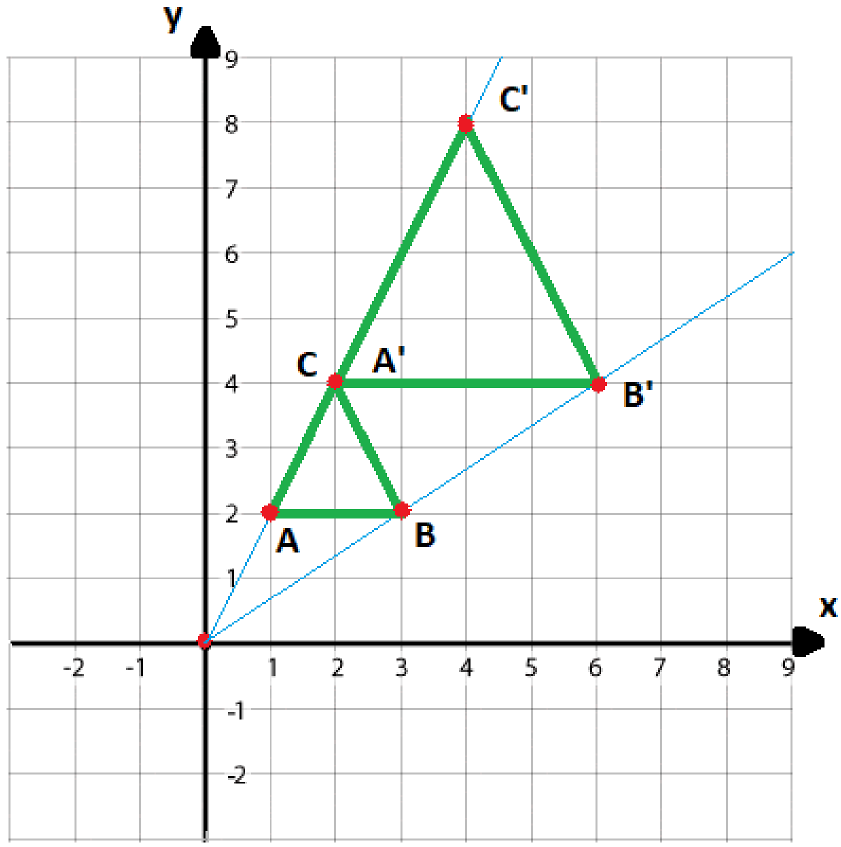
(**V**) Uma transformação homotética é realizada sem alterar a proporção entre os lados da figura original.
→ *A homotetia mantém as proporções entre os lados, mesmo que as dimensões totais mudem.*

(**F**) Todas as transformações isométricas são também homotéticas.
→ *Transformações isométricas mantêm distâncias e ângulos sem alterar a forma, enquanto homotetias alteram o tamanho das figuras. Portanto, nem todas as isometrias são homotéticas.*

ATIVIDADE 10

A) Como a razão é k = 2, podemos fazer:

- Vértice A′ = 2 · (1, 2) = (2, 4)
- Vértice B′ = 2 · (3, 2) = (6, 4)
- Vértice C′ = 2 · (2, 4) = (4, 8)



Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DE PAULA, C. E. S.; DE SOUZA, T. M. R. Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. vol. 10, 2017. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/130. Acesso em: 2 de fevereiro de 2025.

NETO, A. P.; NETO, A. C. M. **Coordenadas, Distâncias e Razões de Segmentos no Plano Cartesiano - parte 1**. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/t8bufhg76pmw.pdf. Acesso em 22 de janeiro de 2025.

OLIVEIRA, S.C.; SILVA, S.A.F. **Transformações Geométricas:** Bordando Conceitos e Divulgando Atividades. Vitória, Ifes, 2026.

PAIVA, A. P. **O fenômeno da quiralidade**. Disponível em: https://www.fcav.unesp.br/Home/departamentos/tecnologia/LUCIANAMARIASARAN/o-fenomeno-da-quiralidade-artigo.pdf. Acesso em 26 de janeiro de 2025.

UFJF. Fractalize: Modelagem Fractal nas Ciências e Engenharias. Disponível em: https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/22/triangulo-de-sierpinski/. Acesso em 27 de janeiro de 2025.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2013 - Exame Nacional do Ensino Médio 2013:** 2º dia. Brasília: INEP, 2013. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/dia1_caderno2_amarelo.pdf. Acesso em: 01 fev. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2018 (PPL) - Exame Nacional do Ensino Médio 2018:** 2º dia. Brasília: INEP, 2018. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2018_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD17.pdf. Acesso em: 01 fev. 2025.

SILVA, Maria Gabriela Costa da. **Ensino de simetria por meio dos símbolos africanos Adinkra:** um estudo com licenciandos em Matemática. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2021.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT308 Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	• Reconhecer relações de semelhança entre triângulos, usando critérios como a congruência de ângulos correspondentes nos dois triângulos ou a proporcionalidade entre medidas de lados correspondentes. • Deduzir experimentalmente as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) a partir de relações de semelhança de triângulos. • Utilizar as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) na resolução de problemas.	**D049_M** Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.

Contextualização

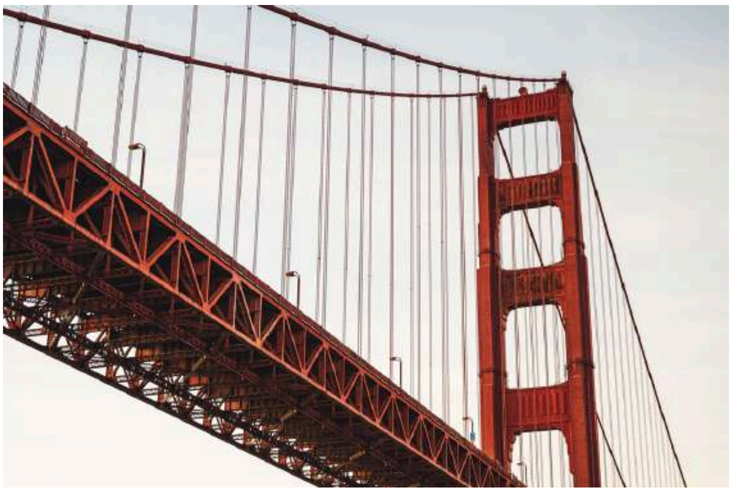
Na semana anterior, ao estudar as transformações geométricas, vimos que as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) não alteram as medidas de uma figura, ao contrário do que ocorre nas transformações homotéticas. Assim, dizemos que as transformações isométricas geram figuras congruentes e as transformações homotéticas geram figuras semelhantes.

O objetivo desta semana é definir e apresentar critérios mínimos para que se identifiquem **triângulos** congruentes e semelhantes. Mas você já parou para pensar por que vamos dar um enfoque tão grande nos triângulos?

O triângulo pode ser visto como a forma geométrica mais básica e versátil que existe. Por toda parte observamos formas triangulares como, por exemplo, nas placas de sinalização nas ruas, nas construções e nas artes, e são essenciais para diversas áreas do conhecimento.

Os triângulos são polígonos rígidos, isso significa que eles são fortes e não se deformam facilmente. Isso acontece porque os vértices dos triângulos definem um único plano, dando estabilidade a essas figuras planas. Por isso, sempre que se necessita de uma estrutura rígida, os triângulos são excelentes alternativas.

Bons estudos!



Canva

Ponte Golden Gate

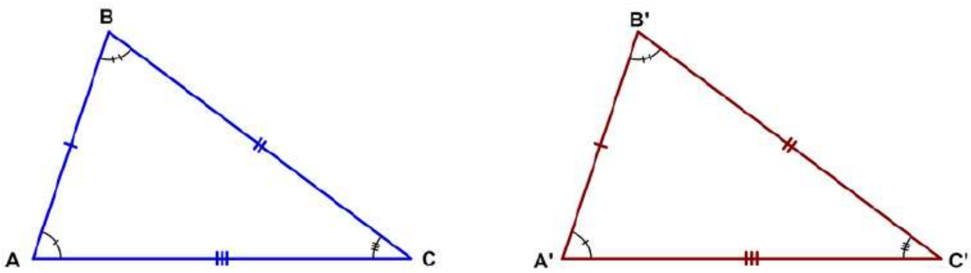
Disponível em: https://abrir.link/laIKe. Acesso em 02 de fevereiro de 2025.

Variegation in the Triangle - Bunt Im Dreieck
Wassily Kandinsky

Conceitos e Conteúdos

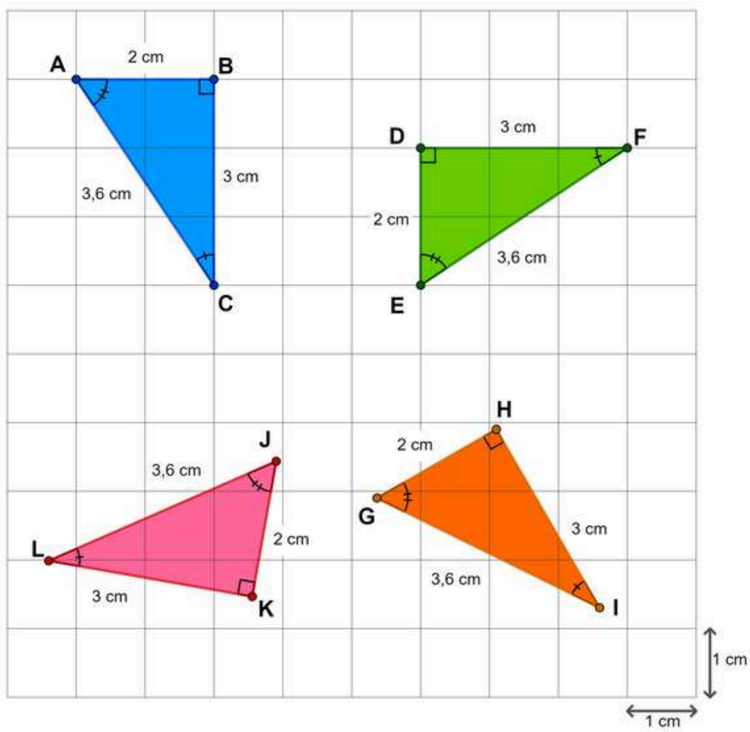
CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Vimos na semana anterior que figuras que podem ser sobrepostas, de modo que coincidem exatamente, são chamadas figuras congruentes.
Dessa maneira, dois triângulos são considerados congruentes quando possuem os três lados e os três ângulos correspondentes com as mesmas medidas.
Observe abaixo.



$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} & & \hat{A} \cong \hat{A'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} & e & \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} & & \hat{C} \cong \hat{C'} \end{pmatrix}.$$

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ lê-se: o triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C'.



Observe os triângulos ao lado. Note que os quatro triângulos possuem ângulos e lados correspondentes com as mesmas medidas, portanto dizemos que eles são congruentes:
$\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle GHI \cong \triangle JKL.$
A partir da escrita, podemos dizer que

$$\triangle ABC \cong \triangle GHI$$

bem como

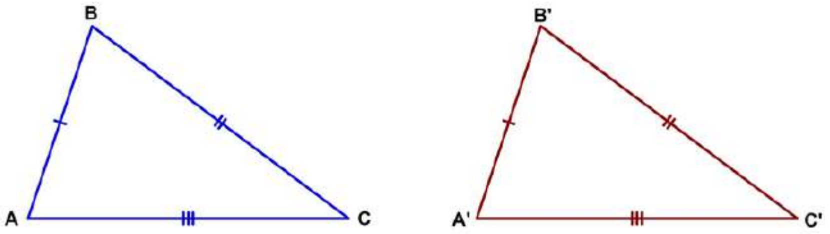
$$\triangle ABC \cong \triangle JKL.$$

Conforme vimos, para determinar se dois triângulos são congruentes devemos avaliar todos os ângulos e lados correspondentes. Mas nem sempre isso é necessário, existem algumas condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes, essas condições são chamadas de **casos de congruência**.

Casos de Congruência

1 Lado, Lado, Lado (LLL)

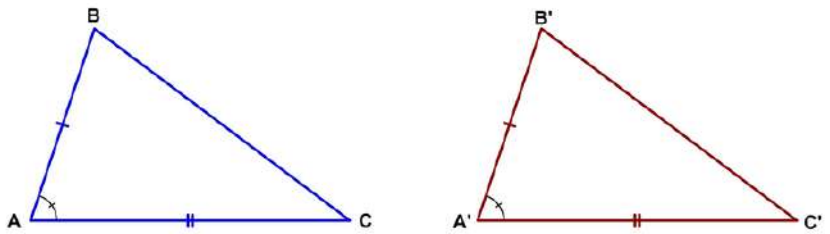
Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes.



$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}\\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

2 Lado, Ângulo, Lado (LAL)

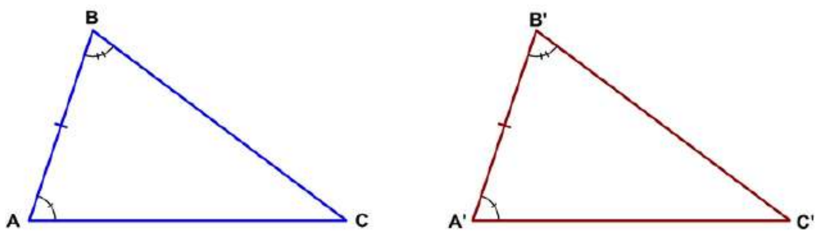
Dois triângulos são congruentes quando possuem dois lados e o ângulo interno compreendido entre esses lados correspondentes congruentes.



$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}\\ \hat{A} \cong \hat{A}'\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

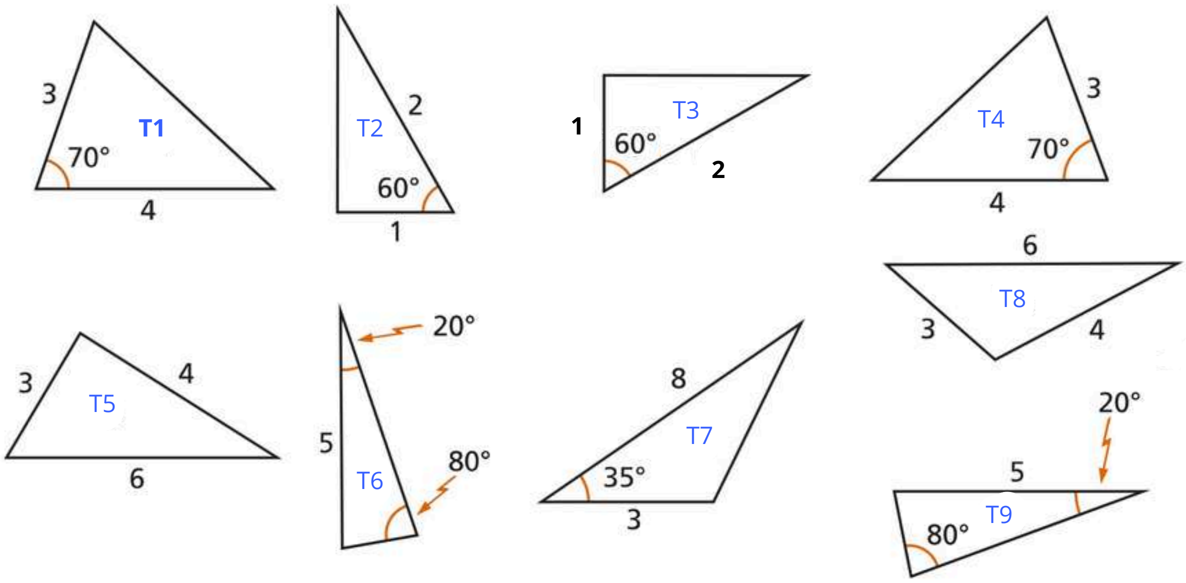
3 Ângulo, Lado, Ângulo (ALA)

Dois triângulos são congruentes quando possuem dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos correspondentes congruentes.



$$\left.\begin{array}{c}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \hat{A} \cong \hat{A}'\\ \hat{B} \cong \hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Considere os 9 triângulos abaixo. Vamos identificar os pares de triângulos congruentes e seus casos de congruências.



Adaptado de DOLCE & POMPEO, 2013.

Observe os triângulos T1 e T4. Podemos dizer que o triângulo T4 é obtido de T1 por uma rotação. Eles possuem dois lados congruentes e o ângulo entre esses lados também congruentes, portanto, pelo caso ***LAL*** $T1 \cong T4$.

Os triângulos T2 e T3, também seguem o mesmo padrão apresentado anteriormente, assim pelo caso **LAL**, temos que $T2 \cong T3$.

Já T5 e T8 apresentam os três lados congruentes, logo, pelo caso **LLL** $T5 \cong T8$.

Por fim, os triângulos T6 e T9, apresentam 2 ângulos correspondentes congruentes, portanto, seus três ângulos são congruentes, dado que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre vale 180°. Além disso, apresenta um lado congruente, dessa forma, pelo caso **ALA** $T6 \cong T9$.

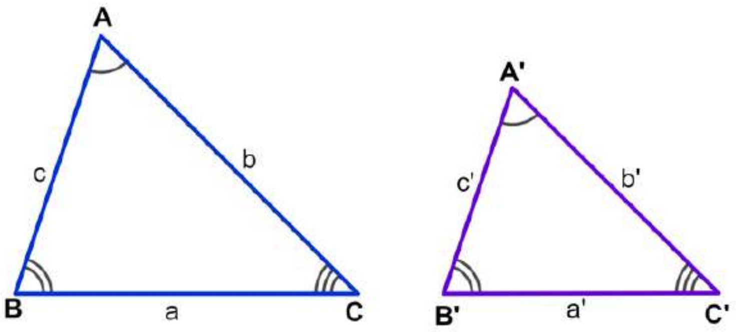
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Quando fizemos a transformação homotética na semana passada, falamos que ela gera figuras semelhantes, em especial quando trabalhamos com triângulos, dizemos que

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Dois lados homólogos (homo = mesmo, logos = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

Observe o esquema a seguir:



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{matrix} \;\; e \;\; \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \right)$$

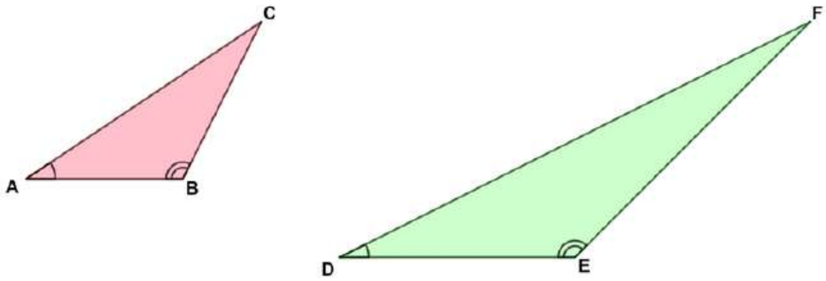
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ lê-se: o triângulo ABC é semelhante ao triângulo A'B'C'.

k é chamado de razão de semelhança.
Assim como para triângulos congruentes, podemos apresentar critérios mínimos para que dois triângulos sejam semelhantes.

Casos de Semelhança de Triângulos

1 Ângulo, Ângulo (*AA*)

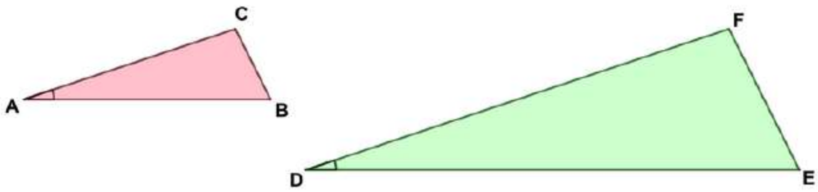
Se dois triângulos possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.



$$\left. \begin{matrix} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

2 Lado, Ângulo, Lado (*LAL*)

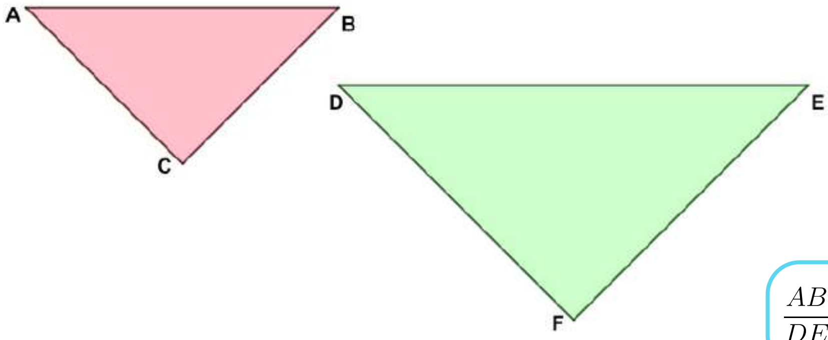
Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.



$$\left. \begin{matrix} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

3 Lado, Lado, Lado (*LLL*)

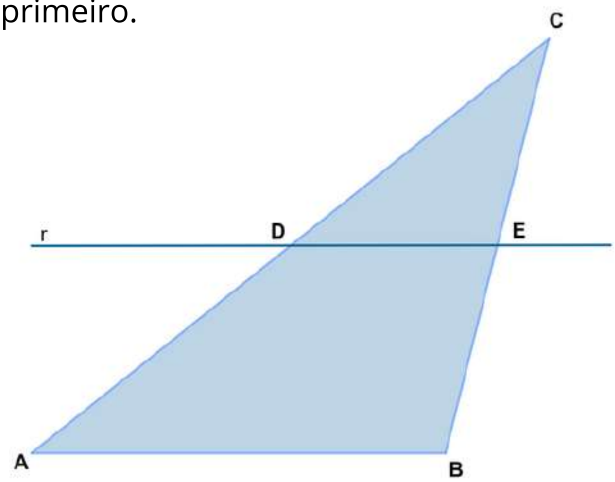
Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

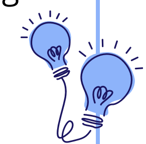
Teorema Fundamental da Semelhança

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.



A reta r é paralela ao lado AB, assim, temos os seguintes pares de ângulos congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{D}$$
$$\hat{B} \cong \hat{E}$$



Assim, pelo caso 1 de semelhança (AA), obtemos

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC.$$

Relação entre perímetro e área de triângulos semelhantes

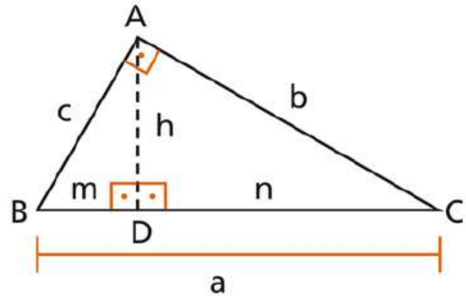
Se a razão de semelhança entre dois triângulos é k, então:

- a razão entre os perímetros também é k;
- a razão entre as áreas é k^2.

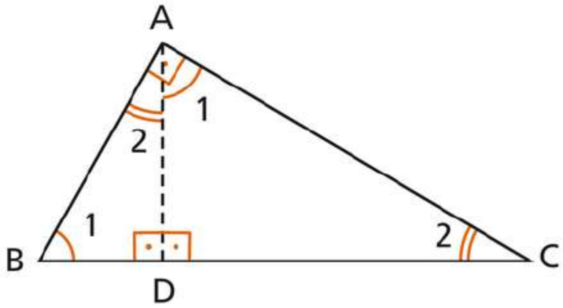
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo AD perpendicular a BC, com D em BC, vamos caracterizar os elementos seguintes:

BC=a: hipotenusa,
AC=b: cateto,
AB=c: cateto,
BD=m: projeção do cateto c sobre a hipotenusa,
CD=n: projeção do cateto b sobre a hipotenusa,
AD=h: altura relativa à hipotenusa.



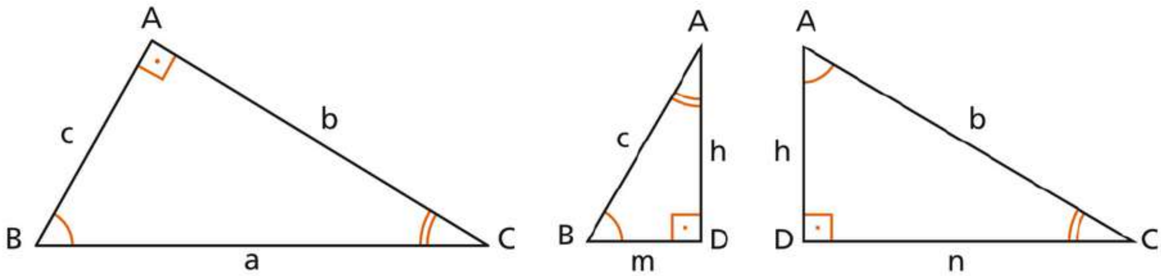
DOLCE & POMPEO, 2013.



DOLCE & POMPEO, 2013.

Conduzindo a altura AD relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois triângulos retângulos DBA e DAC, semelhantes ao triângulo ABC.

Portanto, os três triângulos abaixo são semelhantes:



DOLCE & POMPEO, 2013.

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC.$$

Como os triângulos são semelhantes, podemos obter os seguintes resultados:

1 $\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{DBA}.$

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} \Rightarrow m \cdot b = c \cdot h. \qquad \frac{c}{m} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot m. \qquad \frac{b}{h} = \frac{a}{c} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c.$$

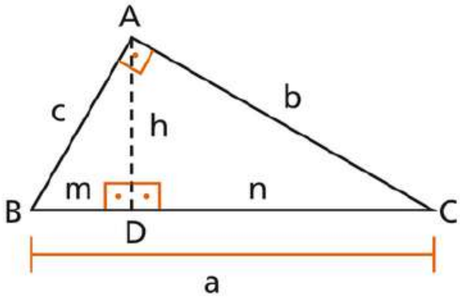
2 $\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{DAC}$

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n. \qquad \frac{c}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c. \qquad \frac{b}{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot n.$$

3 $\triangle \mathrm{DBA} \sim \triangle \mathrm{DAC}$

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n. \qquad \frac{m}{h} = \frac{c}{b} \Rightarrow b \cdot m = c \cdot h. \qquad \frac{h}{n} = \frac{c}{b} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n.$$

Algumas das relações obtidas acima acabam por se repetir. Assim, resultamos em seis relações fundamentais. Vamos retomar o triângulo inicial para que você possa analisar essas seis relações, listadas na sequência.



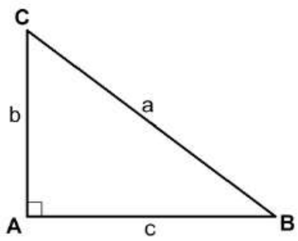
(1) $b^2 = a \cdot n$	**(3)** $h^2 = m \cdot n$	**(5)** $b \cdot h = c \cdot n$
(2) $c^2 = a \cdot m$	**(4)** $b \cdot c = a \cdot h$	**(6)** $c \cdot h = b \cdot m$

Agora tome as relações (1) e (2) e as some:

$$\mathbf{(1)+(2)} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m = a \cdot (\underbrace{m+n}_{a}) = a \cdot a = a^2.$$

Este resultado é chamado de **Teorema de Pitágoras** e é a sétima e última relação métrica do triângulo retângulo.

(7) $a^2 = b^2 + c^2$



Teorema de Pitágoras
Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma do quadrado das medidas dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

O vídeo "Teorema de Pitágoras: Diferentes Demonstrações" apresenta algumas possibilidades de demonstração visual do teorema de Pitágoras. O vídeo pode ser acessado pelo QR Code ao lado.

Professor (a), ao discutir essas relações com os alunos é importante destacar que eles precisam associar cada letra ao que ela representa no triângulo. Por exemplo: na relação **h^2 = m · n**, é essencial que ele entenda que o que está posto ali é que "o quadrado da medida da altura é igual ao produto das projeções dos catetos". Isso colabora quando, eventualmente, se deparar com a utilização de outras letras ou, principalmente, ao resolver problemas onde ele precisa identificar esses elementos.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Carlos, um menino curioso deseja saber a altura de um prédio e para determiná-la ele teve uma ideia: mediu o comprimento da sombra do prédio, obtendo 20 metros, e mediu a sombra de uma vara de ferro de 2 m de altura, posicionada perpendicularmente ao solo, chegando ao resultado de 1,5 m de comprimento da sombra. No momento da medição o ângulo de incidência do sol no topo do prédio e na vara era o mesmo. Considerando que Carlos efetuou todos os cálculos de forma correta, qual o resultado que ele encontrou para a altura do prédio?

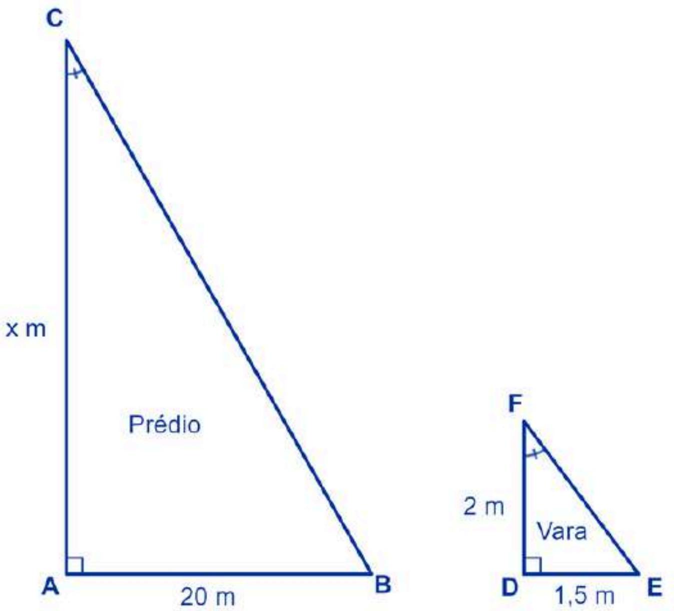
Solução: Para facilitar o processo, podemos fazer um esquema que representa a situação. Observe ao lado:

Pelo caso AA de semelhança de triângulos ABC~DEF, portanto,

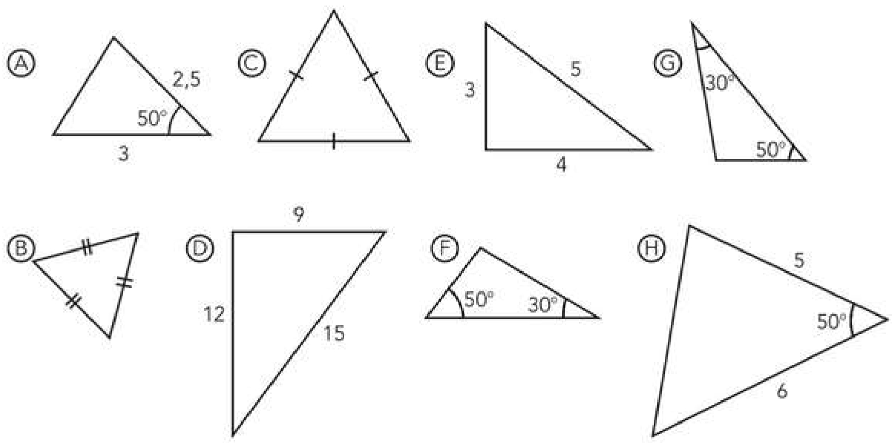
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{20}{1,5} = \frac{x}{2} \Rightarrow 1,5x = 40$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{1,5} \approx 26,67.$$

Logo, se Carlos efetuou todos os cálculos corretamente, ele chegou à altura de, aproximadamente, 26,67 m para o prédio.



EXERCÍCIO 2. (Adaptada de Iezzi et al., 2016) São dados oito triângulos. Indique os pares de triângulos semelhantes e o critério de semelhança correspondente:



Solução: De imediato pode-se identificar os seguintes pares:

- **B~C pois são dois triângulos equiláteros, caso LLL;**
- **F~G pois apresentam dois ângulos correspondentes congruentes, caso AA.**

Observando os triângulos A e H podemos notar que existe um ângulo congruente e a medida dos lados que formam esse ângulo são proporcionais:

$$\frac{6}{3} = \frac{5}{2,5} = 2.$$

Assim,

- **A~H, caso LAL.**

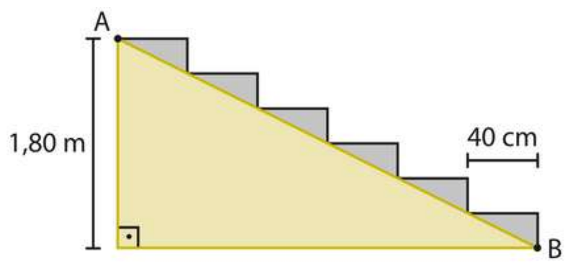
Tomando os triângulos D e E, temos que seus lados homólogos são proporcionais:

$$\frac{15}{5} = \frac{12}{4} = \frac{9}{3} = 3.$$

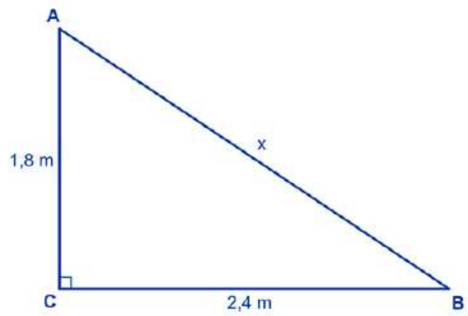
Logo,

- **D~E, caso LLL.**

EXERCÍCIO 3. (adaptada de Iezzi et al., 2016) A figura mostra o perfil de uma escada, formada por seis degraus idênticos, cada um com 40 cm de largura. A distância do ponto mais alto da escada ao solo é 1,80 m. Qual é a medida do segmento AB?



Solução: Inicialmente, note que a escada tem a forma de um triângulo retângulo cuja base tem medida igual igual a 6·40 cm=240 cm=2,4 m (6 degraus de de 40 cm de largura). Podemos representar a visão lateral da escada pelo triângulo abaixo:

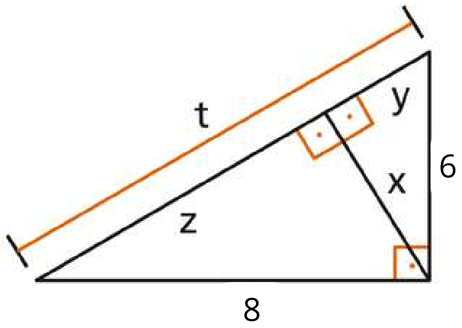


Agora, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, já que os dois lados que sabemos as medidas são os catetos e precisamos determinar a medida da hipotenusa:

$$x^2 = 1,8^2 + 2,4^2 = 3,24 + 5,76 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = 3.$$

Assim, a medida do segmento AB é igual a 3 m.

EXERCÍCIO 4. (Dolce e Pompeo, 2013) Na figura, determine os elementos x, y, z e t.



Solução: Inicialmente, vamos utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor de t:

$$t^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow t = \sqrt{100} = 10.$$

De posse do valor de t, vamos determinar z:

$$8^2 = 10 \cdot z \Rightarrow z = \frac{64}{10} = 6,4.$$

Como t=z+y, temos

$$10 = 6,4 + y \Rightarrow y = 10 - 6,4 = 3,6.$$

Por fim, determinaremos o valor de x:

$$x^2 = z \cdot y = 6,4 \cdot 3,6 = 23,04 \Rightarrow x = \sqrt{23,04} = 4,8.$$

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), indicamos alguns livros didáticos para trabalhar os conceitos apresentados neste material estruturado:

1. **Coleção Prisma Matemática - Volume: Geometria e Trigonometria (Editora FTD):**

- Semelhança de Triângulos: p. 38-4;
- Relações métricas no triângulo retângulo: p. 44-48.

1. **Volume 4 – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**

- Semelhança de Triângulos: p. 12-15.

PORTAL DA MATEMÁTICA

A seção 'Semelhança entre Figuras e Polígonos' apresenta vídeos sobre semelhança de triângulos e pode ser utilizada para aprofundamento do tema.

HISTÓRIA EM QUADRINHO

O produto educacional da dissertação de Mestrado de Higor Soares Majone propõe uma história em quadrinhos sobre o Teorema de Pitágoras que pode ser utilizada em sala de aula para discutir sobre o tema.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Além do vídeo apresentado na discussão do Teorema de Pitágoras sugerimos outras opções de demonstração visual: um vídeo e o uma aplicação no GeoGebra.

vídeo

GeoGebra

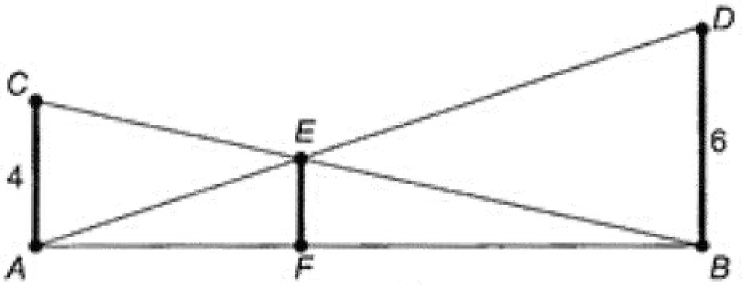
LEITURAS

Na sala de leitura do portal da OBMEP você encontra alguns textos sobre semelhança de triângulos, sobre congruência de triângulos e sobre triângulo retângulo. Explore esses espaços com os alunos.

Atividades

ATIVIDADE 1

(Enem 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

A) 1 m
B) 2 m
C) 2,4 m
D) 3 m
E) $2\sqrt{6}$ m

ATIVIDADE 2

Um agricultor deseja construir um cercado retangular para suas ovelhas, utilizando uma cerca de arame. Ele planeja que um dos lados do cercado tenha 12 metros e o outro lado tenha 16 metros. Para garantir que o cercado seja retangular, ele quer verificar se as medidas formam um triângulo retângulo ao usar a diagonal como a hipotenusa. Qual deverá ser o valor da diagonal do cercado para que ele seja retangular?

A) 18 metros
B) 20 metros
C) 22 metros
D) 24 metros
E) 25 metros

ATIVIDADE 3

Em relação à semelhança de triângulos, assinale a alternativa correta:

A) Triângulos com ângulos correspondentes iguais são sempre congruentes.
B) A semelhança de triângulos pode ser estabelecida apenas pela comparação de dois lados.
C) Dois triângulos são semelhantes se os comprimentos de seus lados são iguais, independente dos seus ângulos correspondentes serem congruentes.
D) Dois triângulos são semelhantes se têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes iguais.
E) A semelhança de triângulos não pode ser determinada por meio da razão entre os lados.

ATIVIDADE 4

Em uma expedição, um grupo de pesquisadores pretende determinar a altura de uma árvore em uma floresta. Para isso, utilizam um bastão de 2 metros, posicionado verticalmente em relação ao solo, e medem sua sombra, que possui 1 metro de comprimento. Simultaneamente, observam que a sombra da árvore mede 5 metros. Qual é a altura da árvore?

A) 6 metros
B) 8 metros
C) 10 metros
D) 12 metros
E) 15 metros

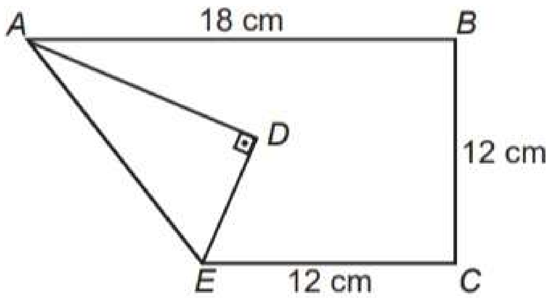
ATIVIDADE 5

Maria está planejando construir uma rampa para facilitar o acesso ao seu jardim, que está a 3 metros de altura em relação à calçada. Para isso, ela quer que a visão lateral da rampa forme um triângulo retângulo, onde um dos catetos está representado pela altura da rampa em relação à calçada e, a rampa representa a hipotenusa. Se Maria deseja que a rampa tenha um comprimento total de 5 metros, qual será a medida da base da rampa?

A) 2 metros
B) 4 metros
C) 5 metros
D) 6 metros
E) 7 metros

ATIVIDADE 6

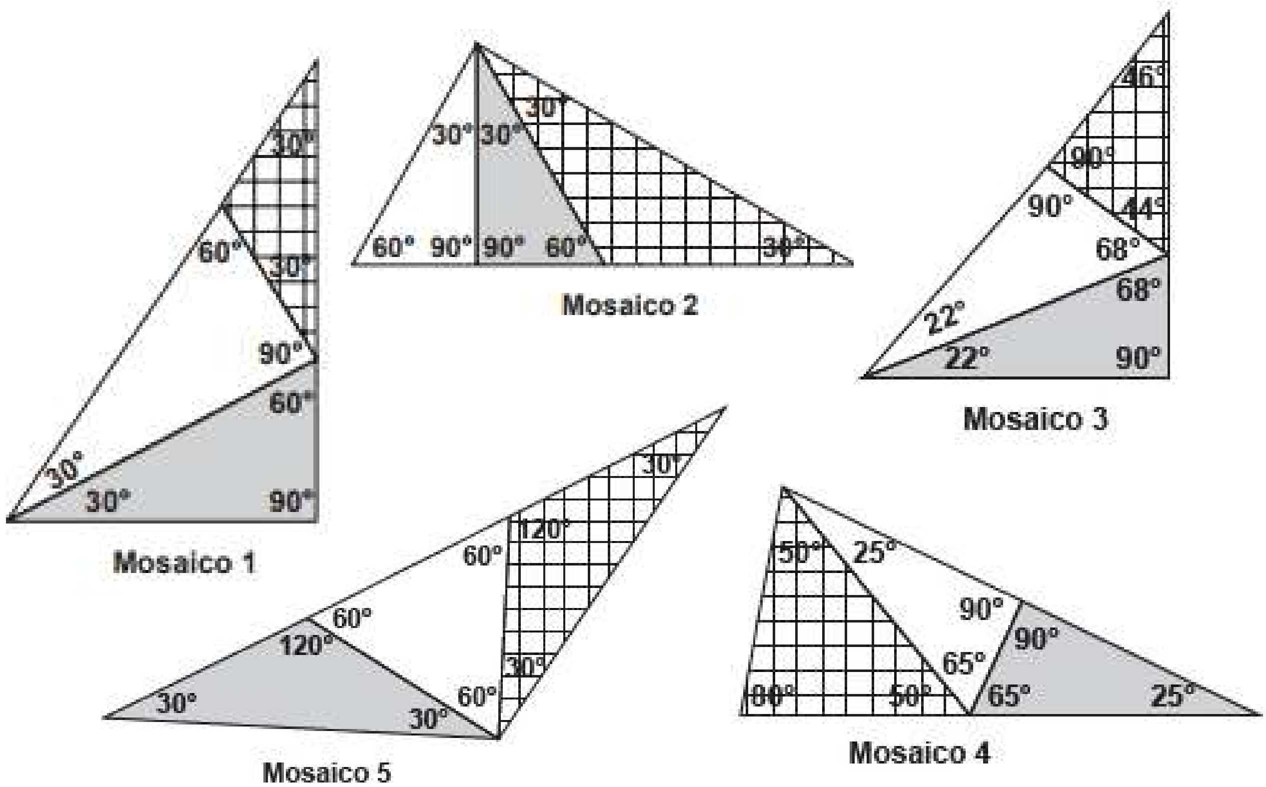
(Enem 2019 - adaptada) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Determine a medida do segmento AE após essa primeira dobradura.

ATIVIDADE 7

(Enem 2016 - adaptada) Um artista plástico deseja criar um mosaico com a forma de um triângulo retângulo, utilizando três peças: duas delas são triângulos retângulos congruentes e a terceira é um triângulo isósceles. Os cinco mosaicos a seguir foram construídos por ele, cada um formado por três peças. Entre os cinco mosaicos, identifique aquele que atende às especificações desejadas.

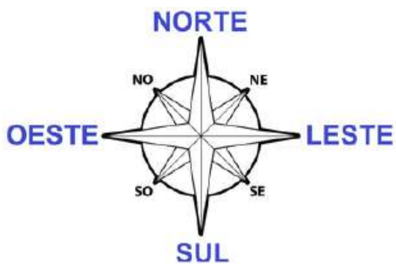


ATIVIDADE 8

Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é de 6 cm. Uma das projeções mede o dobro da outra. Determine o comprimento da hipotenusa.

ATIVIDADE 9

Dois motoboys partem de Cariacica e seguem em direções retilíneas: um em direção ao leste e o outro em direção ao norte. A velocidade do motoboy que vai para o leste é de 60 km/h, e a do motoboy que vai para o norte é de 80 km/h. Determine a distância, em linha reta, que os separa após 30 minutos.



ATIVIDADE 10

Embora o Teorema de Pitágoras seja tradicionalmente associado ao matemático grego Pitágoras de Samos, há evidências de que os babilônios já utilizavam esse conhecimento muito antes, por volta de 1800 a.C. Tabletes (tabuletas) como o famoso Plimpton 322 mostram que eles empregavam trios de números inteiros, conhecidos como ternos (como 3, 4 e 5), para formar triângulos retângulos. Esses ternos eram usados na prática para construir ângulos retos, essenciais em projetos arquitetônicos.

Demonstre que o terno 97 - 65 - 72, encontrado no tablete *Plimpton 322* pode ser escrito como os lados de um triângulo retângulo.

Gabarito

ATIVIDADE 1 - C
ATIVIDADE 2 - B
ATIVIDADE 3 - D
ATIVIDADE 4 - C
ATIVIDADE 5 - B

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Estabelecendo a razão de semelhança de AEF e ADB:

$$\frac{EF}{6} = \frac{AF}{AB}$$

Estabelecendo a razão de semelhança de BEF e BCA:

$$\frac{EF}{4} = \frac{FB}{AB}$$

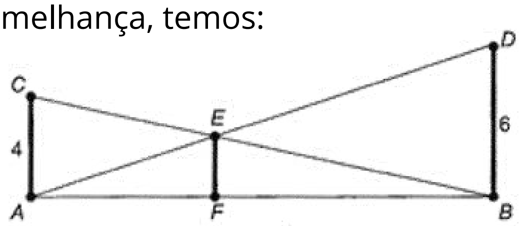
Somando as igualdades das duas razões de semelhança, temos:

$$\frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB}$$

$$\frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = 1$$

$$\frac{4EF}{24} + \frac{6EF}{24} = \frac{24}{24}$$

$$4EF + 6EF = 24$$



Observe que AF + FB = AB.
Então, o segundo membro da equação pode ser escrito como uma fração onde numerador e denominador são AB, o que resulta em 1.

$$10EF = 24$$

$$EF = \frac{24}{10}$$

$$EF = 2{,}4\ m$$

Portanto, **alternativa C**.

ATIVIDADE 2

Para que o cercado seja um retângulo, o valor da diagonal deverá representar a hipotenusa de um triângulo retâgulo, e para descobrir esse valor, basta fazermos:

$$h^2 = c^2 + c^2$$
$$h^2 = 12^2 + 16^2$$
$$h^2 = 144 + 256$$
$$h^2 = 400$$
$$h = \sqrt[2]{400}$$
$$h = 20\ m$$

Logo, **alternativa B**.

ATIVIDADE 3

Analisando as alternativas:

A) Triângulos com ângulos correspondentes iguais são sempre congruentes.
Incorreta *→ Triângulos com ângulos correspondentes iguais são semelhantes, mas não necessariamente congruentes. Para serem congruentes, além dos ângulos iguais, os lados correspondentes também precisam ter o mesmo comprimento.*

B) A semelhança de triângulos pode ser estabelecida apenas pela comparação de dois lados.
Incorreta *→ A semelhança de triângulos não pode ser determinada apenas pela comparação de dois lados. É necessário verificar a proporcionalidade dos três lados ou usar critérios como AA (dois ângulos iguais), LAL (dois lados proporcionais e o ângulo entre eles igual) ou LLL (três lados proporcionais).*

C) Dois triângulos são semelhantes se os comprimentos de seus lados são iguais, independente dos seus ângulos correspondentes serem congruentes.
Incorreta *→ A semelhança exige tanto ângulos congruentes quanto lados proporcionais, não apenas a igualdade dos lados, que por si só leva à congruência.*

D) Dois triângulos são semelhantes se têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes iguais.
Correta **→** *Essa é a definição de semelhança de triângulos: dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são iguais e os lados correspondentes estão em proporção.*

E) A semelhança de triângulos não pode ser determinada por meio da razão entre os lados.
Incorreta **→** *A semelhança pode sim ser determinada pela razão entre os lados, desde que a proporcionalidade seja verificada para todos os três pares de lados correspondentes.*

ATIVIDADE 4

Os triângulos formados pela altura do bastão e sua sombra e pela altura da árvore e sua sombra são semelhantes devido à condição AA (ângulos correspondentes iguais). Assim, podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{Altura\ do\ bastão}{Comprimento\ da\ sombra\ do\ bastão} = \frac{Altura\ da\ árvore}{Comprimento\ da\ sombra\ da\ árvore}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{x}{5}$$

$$2 \cdot 5 = 1 \cdot x$$

$$10 = x$$

Logo, a altura da árvore é de 10 metros. Portanto, **alternativa C**.

ATIVIDADE 5

Para resolver essa questão, utilizamos o Teorema de Pitágoras, onde:

- AB é o comprimento da rampa (hipotenusa) = 5 m
- AC é a altura da rampa (cateto) = 3 m
- BC é a base da rampa (cateto), que queremos encontrar

$$hip^2 = cat^2 + cat^2$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$5^2 = 3^2 + BC^2$$

$$25 = 9 + BC^2$$

$$25 - 9 = BC^2$$

$$16 = BC^2$$

$$\sqrt[2]{16} = BC$$

$$4 = BC$$

Logo, **alternativa B**.

ATIVIDADE 6

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos afirmar que

$$AE^2 = AD^2 + DE^2$$

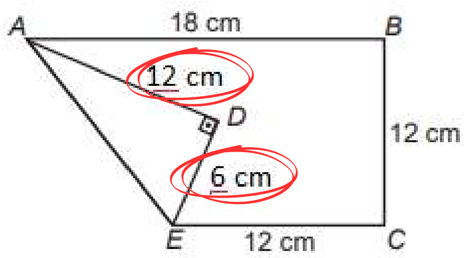
$$AE^2 = 12^2 + 6^2$$

$$AE^2 = 144 + 36$$

$$AE^2 = 180$$

$$AE = \sqrt[2]{180}$$

$$AE = 6\sqrt[2]{5}\ cm$$



ATIVIDADE 7

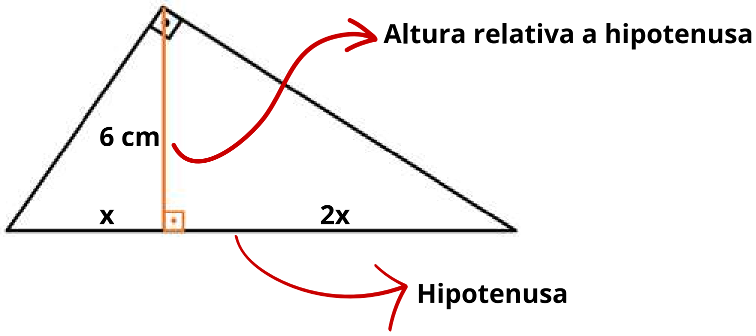
Analisando cada um dos cinco mosaico, podemos afirmar que:

- **Mosaico 1:** Temos que os dois triângulos retângulos não são congruentes pois percebemos que as medidas dos catetos do triângulo de baixo são menores do que as do de cima.
- **Mosaico 2:** Temos dois triângulos retângulos congruentes e um isósceles.
- **Mosaico 3:** O terceiro triângulo não é isósceles.
- **Mosaico 4:** A terceira figura não é um triângulo isósceles.
- **Mosaico 5:** Não possui triângulo retângulo.

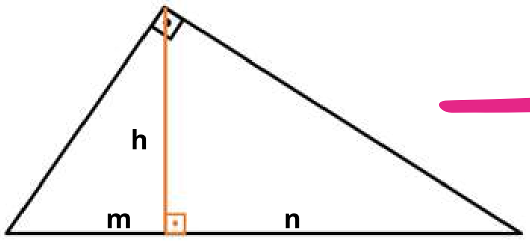
Logo o mosaico que se adequa é o 2.

ATIVIDADE 8

Esboçando o triângulo retângulo conforme a situação apresentada:



Para resolver esse problema, podemos usar as relações métricas no triângulo retângulo. Especificamente, usaremos a seguinte relação:



$$h^2 = m \cdot n$$

Dessa forma:

$$h^2 = m \cdot n$$
$$6^2 = x \cdot 2x$$
$$36 = 2x^2$$
$$\frac{36}{2} = x^2$$
$$18 = x^2$$
$$\sqrt[2]{18} = x$$
$$3\sqrt[2]{2} = x$$

Se a menor projeção é x e igual a $3\sqrt[2]{2}$, a maior projeção 2x será igual a:

$$2 \cdot 3\sqrt[2]{2} = 6\sqrt[2]{2}$$

Como a hipotenusa é a soma das duas projeções **m** e **n**, temos que:

$$hipotenusa = 3\sqrt[2]{2} + 6\sqrt[2]{2}$$
$$hipotenusa = (3 + 6)\sqrt[2]{2}$$
$$hipotenusa = 9\sqrt[2]{2} \text{ cm}$$

ATIVIDADE 9

Motoboy 1 (em direção ao leste)
Velocidade: 60 km/h
Tempo: 30 minutos (0,5 horas)
Distância = 60 · 0,5 = 30 km

Motoboy 2 (em direção ao norte)
Velocidade: 80 km/h
Tempo: 30 minutos (0,5 horas)
Distância = 80 · 0,5 = 40 km

Como as direções Norte e Leste formam um ângulo de 90º, podemos afirmar que a distância (d) entre os motoboys é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 30 e 40. Dessa forma, temos que:

$$hip^2 = cat^2 + cat^2$$
$$d^2 = 30^2 + 40^2$$
$$d^2 = 900 + 1\,600$$
$$d^2 = 2\,500$$
$$d = \sqrt[2]{2\,500}$$
$$d = 50\ km$$

ATIVIDADE 10

Como os ternos encontrados no tablete *Plimpton 322* eram utilizados para a construção de ângulos retos, ao aplicar o teorema de Pitágoras no terno 97 - 65 - 72, consideramos o maior lado como a hipotenusa e verificamos que "o quadrado da medida da hipotensa corresponde a soma das medidas dos quadrados dos catetos". Assim, fazemos:

$$hip^2 = cat^2 + cat^2$$
$$97^2 = 65^2 + 72^2$$
$$9\,409 = 4\,225 + 5\,184$$
$$9\,409 = 9\,409$$

Dessa forma, o terno 97 - 65 - 72 pode representar as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DOLCE, O.; POMPEO, J; N. **Fundamentos de matemática elementar**: Geometria Plana. 9. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática**: Ciência e aplicações. 9. ed. vol. 1. São Paulo: Editora Saraiva, 2016.

MAJONI, H. S. **Uma história em quadrinhos para contribuição na produção de significados acerca do teorema de pitágoras sob princípios do modelo dos campos semânticos**. 2021. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória - Espírito Santo, 2021. 170 p. Disponível em: https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/1880. Acesso em: 01 fev. 2025.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2013 - Exame Nacional do Ensino Médio 2013:** 2º dia. Brasília: INEP, 2013. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/dia2_caderno5_amarelo.pdf. Acesso em: 01 fev. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2016 - Exame Nacional do Ensino Médio 2016:** 2º dia. Brasília: INEP, 2016. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 01 fev. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2019 - Exame Nacional do Ensino Médio 2019:** 2º dia. Brasília: INEP, 2019. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2019/2019_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 01 fev. 2025.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 9:** geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MAJONI, Higor Soares. **Uma história em quadrinhos para contribuição na produção de significados acerca do teorema de pitágoras sob princípios do modelo dos campos semânticos.** 2021. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória - Espírito Santo, 2021. 170 p. Disponível em: https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/1880. Acesso em: 01 fev. 2025.