conexões matemáticas

QUINZENA 11 16/06 a 20/06

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

PRODUTOS NOTÁVEIS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EF09MA09 Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.	• Identificar fatores comuns em expressões algébricas e realizar a fatoração por evidência. • Realizar a fatoração de trinômios quadrados perfeitos com base nos produtos notáveis. • Fatorar expressões algébricas utilizando técnicas como agrupamento de termos ou aplicando a diferença de quadrados. • Compreender a relação entre a fatoração de um polinômio do 2º grau e a identificação de suas raízes. • Resolver equações polinomiais do 2º grau incompletas utilizando a fatoração. • Utilizar a forma fatorada de um trinômio do 2º grau para resolver equações polinomiais simples e contextualizadas.	**D087_M** Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.

Contextualização

A Matemática, ao longo da história, tem sido uma das mais importantes ferramentas de compreensão do mundo. Desde as antigas civilizações, como os egípcios e babilônios, até os dias de hoje, ela se desenvolveu de forma a atender necessidades práticas, como a construção de pirâmides, a contagem de safras e a realização de transações comerciais. Mas, além dessas aplicações práticas, a Matemática se expandiu para áreas cada vez mais abstratas, como a geometria, a ***álgebra*** e o cálculo, permitindo avanços significativos em diversos campos do conhecimento.

Entre os muitos conceitos que a Matemática desenvolveu, os ***produtos notáveis*** têm um papel especial. Eles surgem da multiplicação de expressões algébricas e ajudam a simplificar cálculos, tornando mais eficientes os processos algébricos. Esses produtos, como o ***quadrado da soma,*** o ***quadrado da diferença,*** o ***produto da soma pela diferença*** e os ***trinômios quadrados perfeitos***, têm uma longa história de uso desde os tempos antigos, mas foram formalizados e sistematizados ao longo do tempo, especialmente no período medieval e durante a Renascença, quando matemáticos começaram a construir e organizar as propriedades algébricas.

Hoje, os produtos notáveis são ferramentas fundamentais no estudo da álgebra e têm uma ampla aplicação em problemas envolvendo polinômios e equações. O estudo deles e entendimento não apenas facilita a resolução de equações, mas também ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico e na capacidade de pensar de forma abstrata e estruturada. Eles são um dos muitos exemplos de como a Matemática, ao longo da história, se transforma em um campo de estudo essencial para o avanço do conhecimento humano.

Neste material, iremos aprofundar nossos estudos sobre os polinômios e produtos notáveis.

BONS ESTUDOS!

Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

OBMEP. Equação do 2º Grau Parte I: Exemplos e Definição - Aula 46 [vídeo]. YouTube, 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HZopWn9_Naw. Acesso em: 19 fev. 2025..

PORTAL OBMEP MATEMÁTICA. Fórmula Resolutiva para Equação do Segundo Grau [vídeo]. YouTube, 2019. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=v1oU2smXg4M. Acesso em: 19 fev. 2025.

KHAN ACADEMY. Equações completas e incompletas do 2º grau. Khan Academy, 2025. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/pt-9-ano/algebra-expressoes-algebricas-9ano/xfd2c08e989fece13:introducao-a-equacoes-do-segundo-grau/a/equacoes-completas-e-incompletas-do-2-grau. Acesso em: 19 fev. 2025.

KHAN ACADEMY. Resolvendo equações do 2º grau incompletas. Khan Academy, 2025. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/pt-9-ano/algebra-expressoes-algebricas-9ano/xfd2c08e989fece13:introducao-a-equacoes-do-segundo-grau/e/resolvendo-equacoes-do-2-grau-incompletas. Acesso em: 19 fev. 2025.

Conceitos e Conteúdos

PRODUTOS NOTÁVEIS

São expressões algébricas que resultam de multiplicações de polinômios, e que seguem padrões bem definidos, facilitando o cálculo dessas multiplicações sem a necessidade de desenvolver a distributiva de forma completa. Os produtos notáveis são usados para simplificar expressões algébricas e resolver problemas de forma mais rápida. Vamos estudar alguns deles a seguir.

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

A expressão algébrica ***(a + b)²*** apresenta uma soma de dois termos, ***a + b***, elevada ao quadrado; é, portanto, o quadrado da soma de dois termos. Podemos calculá-la algebricamente, multiplicando a + b por a + b :

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Assim, podemos concluir que: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Chamamos o polinômio ***a² + 2ab + b²*** de ***trinômio quadrado perfeito.***

Ele é um produto notável porque existe um padrão no resultado e esse padrão pode ser utilizado sempre que aparecer uma soma de 2 termos elevada ao quadrado.

$$(\underbrace{a}_{\text{1º termo da soma}} + \underbrace{b}_{\text{2º termo da soma}})^2 = \underbrace{a^2}_{\text{quadrado do 1º termo}} + \underbrace{2ab}_{\text{o dobro do produto do 1º pelo 2º termo}} + \underbrace{b^2}_{\text{quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo mais duas vezes o produto do 1º termo pelo 2º termo mais o quadrado do 2º termo.

Veja alguns exemplos:

- $(3x + 4)^2 = \underbrace{9x^2}_{(3x)^2} + \underbrace{24x}_{2 \cdot (3x) \cdot 4} + \underbrace{16}_{4^2}$
- $(2x + 3y)^2 = \underbrace{4x^2}_{(2x)^2} + \underbrace{12xy}_{2 \cdot (2x) \cdot 3y} + \underbrace{9y^2}_{3y^2}$
- $(z + 3)^2 = z^2 + 6z + 9$
- $(ab + 2c)^2 = a^2b^2 + 4abc + 4c^2$

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

O quadrado da diferença entre dois termos a e b é indicado por $(a - b)^2$. Temos:

$$\mathbf{(a - b)^2} = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$$

Esse resultado também é um produto notável, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

O polinômio ***$a^2 - 2ab + b^2$*** também é chamado de ***trinômio quadrado perfeito***.

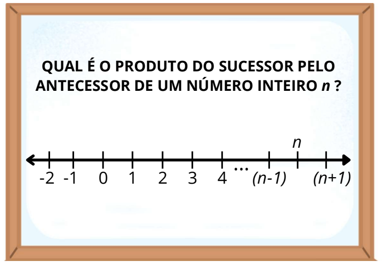
O quadrado da diferença entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Veja alguns exemplos:

- $(2x - 4)^2 = \underbrace{4x^2}_{(2x)^2} - \underbrace{16x}_{2 \cdot (2x) \cdot (-4)} + \underbrace{16}_{(-4)^2}$
- $(x - 5)^2 = \underbrace{x^2}_{x^2} - \underbrace{10x}_{2 \cdot x \cdot (-5)} + \underbrace{25}_{(-5)^2}$

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

O professor Marcos pediu que os alunos observassem os números inteiros marcados na reta e respondessem à questão:



Para responder à questão, vamos multiplicar (n + 1) por (n -1):

$$(n + 1) . (n - 1) = \mathbf{n^2 - \cancel{n} + \cancel{n} - 1 = n^2 - 1}$$

O resultado, ***$n^2 - 1$*** , é o antecessor de ***n^2***. Então, o produto do sucessor pelo antecessor de n é o antecessor de ***n^2***.

Design: Sketchify Mexico/ Fonte: Canva

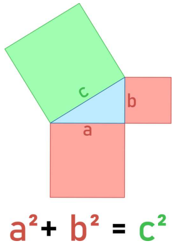
ATIVIDADE 9

Num **triângulo retângulo** as medidas de seus lados são dadas por três números pares consecutivos. O **cateto menor** mede **x**, o **cateto maior** mede **(x + 2)** e a **hipotenusa** mede **(x + 4)**. Segundo o **teorema de Pitágoras**, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, isto é,

$$x^2 + (x + 2)^2 = (x + 4)^2$$

Resolvendo essa equação você encontra a medida do menor lado desse triângulo. Quanto mede seu **maior** lado?

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

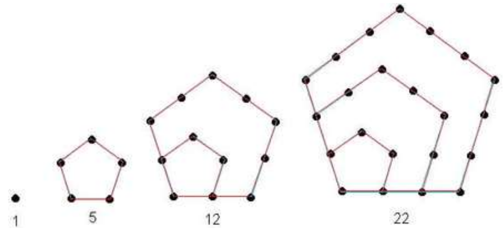


Teorema de Pitágoras
Design: mysticalriverdesigns Sarah. Fonte: Canva

ATIVIDADE 10

Investigação em grupo!

A quantidade de pontinhos em cada pentágono na figura abaixo forma uma sequência de números conhecidos como **números pentagonais** (1, 5, 12, 22, ...).



Forme um **grupo** com seus colegas e responda às seguintes perguntas:

A) Qual é o quinto número pentagonal?

B) Sendo P a quantidade de pontinhos no pentágono de posição n, qual é a expressão quadrática que calcula P em função de n?

C) O pentágono da posição k é desenhado com 210 pontinhos. Qual é o valor de k?

ATIVIDADE 6

Em um torneio de futebol, a quantidade **P** de **partidas** varia de acordo com a quantidade **n** de **equipes** que participam do torneio, pois cada uma das n equipes jogam (n - 1) partidas (há jogos em casa e fora). Logo, essa quantidade P é dada por

$$P = n \cdot (n - 1) = n^2 - n$$

Num torneio com **240 partidas**, qual é a quantidade **n** de **equipes**?

A) 15.
B) 16.
C) 17.
D) 18.
E) 19

ATIVIDADE 7

Imagine que você está em um parque de diversões e decide andar na montanha-russa. A **energia mecânica E** (em Joules) de um carrinho da montanha-russa em relação à **altura h** (em metros) pode ser descrita pela **expressão quadrática**

$$E = 2h^2 - 5h + 1$$

Para qual **altura h** a **energia** do carrinho é de **43 Joules**?

A) 2 metros
B) 3 metros
C) 4 metros
D) 5 metros
E) 6 metros

Design: Alexdndz/ Fonte: Canva

ATIVIDADE 8

Um grupo de jovens aluga, por **342 reais**, uma van para um passeio, sendo que **três** deles saíram **sem pagar**. Por isso, os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles, **19 reais a mais**. Sendo n o número de jovens do grupo então n pode ser encontrado resolvendo a seguinte equação

$$\frac{342}{n-3} = \frac{342}{n} + 19$$

Quantos são os jovens desse grupo?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

Agora, vamos calcular o produto da soma ***a* + *b*** pela diferença ***a* - *b*** de dois termos ***a*** e ***b*** :

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2$$

Esse produto notável pode ser enunciado da seguinte forma:

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Veja os exemplos:

- $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$
- $(2b + 4)(2b - 4) = (2b)^2 - 4^2 = 4b^2 - 16$
- $(y^2 - 3)(y^2 + 3) = (y^2)^2 - 3^2 = y^4 - 9$
- $(6 + w)(w - 6) = (w + 6)(w - 6) = w^2 - 36$

propriedade comutativa

FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS

Fazer a fatoração ou fatorar um polinômio é expressá-lo como o produto de dois ou mais polinômios.

Por exemplo:

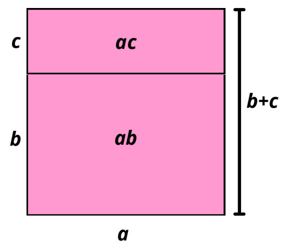
- O polinômio ***x² + 3x*** pode ser escrito como o produto ***x · (x + 3)***.
- Dizemos que ***x · (x + 3)*** é a forma ***fatorada*** de ***x² + 3x***.

Vejamos alguns casos de fatoração.

FATOR COMUM EM EVIDÊNCIA

O polinômio ***ab + ac*** representa a área total da figura ao lado, formada por dois retângulos. Esse polinômio é formado pelos termos ***ab*** e ***ac***, que têm em comum o fator ***a*** (lado comum dos retângulos). Pela propriedade distributiva, sabemos que:

$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$



área total: a(b + c)
ab + ac = a(b + c)

O produto ***a · (b + c)*** é a forma fatorada do polinômio ***ab + ac***.
Na forma fatorada, dizemos que o fator comum **a** está colocado em *evidência*.

Quando os termos de um polinômio apresentam um fator comum, podemos colocá-lo em evidência, obtendo uma forma fatorada do polinômio.

FATORAÇÃO POR AGRUPAMENTO

Observe os termos do polinômio:

ax - px + ay - py

Os dois primeiros termos apresentam o fator comum ***x***, enquanto os dois últimos apresentam o fator comum ***y***.
Vamos agrupar os termos e colocar em evidência os fatores comuns:

ax - px + ay - py
(ax - px) + (ay - py) =
x · (a - p) + y · (a - p)

A fatoração de dois grupos, separadamente, deve "gerar" um fator comum a esses grupos para uma nova fatoração.

Temos agora dois produtos em que ***(a - p)*** é fator comum. Colocando ***(a - p)*** em evidência, obtemos:

x · (a - p) + y · (a - p) =
(a - p) · (x + y)

Assim, transformamos o polinômio dado no produto ***(a - p) · (x + y)***, que é a sua forma fatorada.
Então: ***ax - px + ay - py = (a - p) · (x + y)***

Podemos fatorar certos polinômios agrupando os seus termos de tal maneira que:
- em cada grupo haja fator comum;
- fatorando cada grupo, observamos que eles apresentam um novo fator comum que, ao ser posto em evidência, completa a fatoração.

Vejamos outros exemplos:

ab + a - bx - x =
a(b + 1) - x(b + 1)
(a - x)(b + 1)

ax - a - 3x + 3 =
a(x - 1) - 3(x - 1)
(a - 3)(x - 1)

x³ - 2x² + x + x²y - 2xy + y=
x(x² - 2x + 1) + y · (x² - 2x +1)
(x² - 2x + 1)(x + y)

FATORAÇÃO DA DIFERENÇA ENTRE DOIS QUADRADOS

Vimos que o ***produto da soma pela diferença*** dos mesmos dois termos é um produto notável e que o resultado é igual à diferença entre o quadrado do 1º termo e o quadrado do 2º termo. Veja alguns exemplos.

- (x + 8)(x - 8) = x² - 64

x² - 64 = (x + 8)(x - 8)

quadrado de x ***quadrado de 8***

Dizemos que ***(x + 8)(x - 8)*** é a forma fatorada de ***x² - 64***.

O caminho inverso disso é a fatoração da diferença entre dois quadrados.

- (5x + 9)(5x - 9) = 25x² - 81

25x² - 81 = (5x + 9)(5x - 9)

quadrado de 5x ***quadrado de 9***

Dizemos que ***(5x + 9)(5x - 9)*** é a forma fatorada de ***25x² - 81***.

ATIVIDADE 3

(ENEM 2016 – Adaptado) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de Pedro Canário (Norte do ES) dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número **N** de infectados é dado pela **expressão quadrática**

$$N = 120t - 2t^2$$

em que **t** é expresso em dias e t = 0 é o dia anterior à primeira infecção.
Depois de **quantos dias** de dedetização o número de infectados era zero?

A) 19 dias
B) 20 dias
C) 29 dias
D) 30 dias
E) 60 dias

Design: Studio Best/ Fonte: Canva

ATIVIDADE 4

Uma bola é lançada do chão para cima com uma **velocidade inicial** $v = 20\ m/s$ em um campo de futebol. Durante seu movimento de subida e descida a bola está sujeita à aceleração devido à **gravidade**, que é $g = -10\ m/s^2$ (considerando o sentido para cima como positivo). A **altura** H que ela se encontra durante o movimento é dado pela **expressão quadrática**

$$H = vt + \frac{g}{2}t^2$$

Quanto **tempo** essa bola ficou no ar?

A) 2 segundos
B) 3 segundos
C) 4 segundos
D) 5 segundos
E) 6 segundos

Design: Duncan/ Fonte: Canva

ATIVIDADE 5

Problemas que recaem numa **equação do segundo grau** já apareciam em textos escritos pelos babilônios, nas tábuas cuneiformes.
Observe a equação

$$x^2 - 12x + p = 0$$

Determine o **valor de p**, para que uma das **raízes** seja o dobro da outra.

A) 25
B) 30
C) 32
D) 35
E) 40

Atividades

ATIVIDADE 1

Betão está tentando construir um pequeno jardim retangular em seu quintal. Ele quer que a **área** do jardim seja de exatamente **32** metros quadrados e que uma de suas dimensões seja o **dobro** da outra. Ele sabe que as **equações quadráticas incompletas** podem ajudá-lo a descobrir essas dimensões. Qual será o **perímetro** do jardim que Betão vai construir?

A) 32 metros
B) 28 metros
C) 24 metros
D) 20 metros
E) 16 metros

ATIVIDADE 2

(Enem 2013) A **temperatura T** de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão

$$T = \frac{-t^2}{4} + 400$$

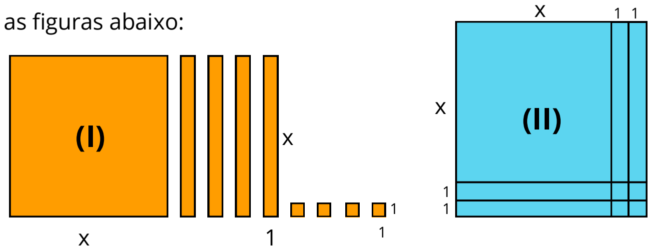
com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de **39°C**.

Qual o **tempo mínimo** de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

A) 19,0
B) 19,8
C) 20,0
D) 38,0
E) 39,0

FATORAÇÃO POR TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Observe as figuras abaixo:



Considerem que o quadrado laranja maior tem lados com medida de comprimento x e que as barras têm o lado maior com medida de comprimento x e o lado menor com medida de comprimento 1. Por sua vez, os quadrados menores têm lados com medida de comprimento 1.

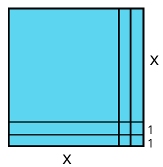
Vamos responder às seguintes questões:

a) Qual polinômio representa a medida de área total da ***figura azul (II)*** ?

O quadrado azul, como podemos ver é formado pelo quadrado maior laranja, os 4 retângulos e os quatro quadrados menores, assim temos:

Área azul (II) : $x^2 + 4x + 4$

b) Qual polinômio representa a medida de comprimento da altura da figura azul? E a medida de comprimento da largura?



Altura: x+2

Largura: x+2

c) Qual produto de polinômios representa a medida de área total da figura azul?

O produto da altura pela largura dará a área da figura azul. Ou seja:

Área azul (I) : $(x + 2) \cdot (x + 2)$

Temos dois polinômios que representam a medida de área total da região da figura azul. Uma delas é um ***trinômio conhecido como trinômio quadrado perfeito*** (item a) e a outra é a ***forma fatorada do trinômio*** (item c).

$$(x + 2) \cdot (x + 2) = x^2 + 4x + 4$$

O desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos e do quadrado da diferença entre dois termos resulta em trinômios quadrados perfeitos. Podemos fazer o caminho inverso, obtendo um quadrado (da soma ou da diferença) a partir de um trinômio quadrado perfeito. Veja alguns exemplos.

- $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
- $a^2 - 14a + 49 = (a - 7)^2$
- $9x^2 + 60x + 100 = (3x + 10)^2$

O caminho inverso disso é a fatoração do trinômio quadrado perfeito.

- $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

quadrado de x

dobro do produto de x e 5

quadrado de 5

FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS DO 2º GRAU E A IDENTIFICAÇÃO DE SUAS RAÍZES

A fatoração de um polinômio do 2º grau está diretamente ligada à determinação de suas ***raízes***. Ao escrever um polinômio na forma fatorada, conseguimos identificar os valores de ***x*** que tornam a equação igual a zero, ou seja, encontramos suas ***soluções.***

Um polinômio do 2º grau tem a forma geral:

Lembre-se: Raiz ou solução de uma equação é o valor que, atribuído à incógnita, torna a sentença matemática verdadeira.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são constantes, com a ≠ 0.

Já vimos que a fatoração consiste em reescrever essa expressão como um produto de fatores mais simples. ***Se*** um polinômio quadrático ***pode*** ser fatorado na forma:

$$P(x) = a(x - r')(x - r'')$$

então os valores ***r'*** e ***r''*** são as ***raízes*** da equação P(x) = 0, pois ao substituí-los no polinômio, obtemos 0 :

$$a\underbrace{(r' - r')}_{\text{zero}}(r' - r'') = 0 \quad \text{ou} \quad a(r'' - r')\underbrace{(r'' - r'')}_{\text{zero}} = 0$$

As equações do 2º grau que podem ser escritas no formato **a(x − r')(x − r'') = 0**, especificamente quando a = 1, podem ser organizadas no seguinte formato:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$r' + r''$ Soma das raízes

$r' \cdot r''$ Produto das raízes

Vejamos um exemplo:

- Vamos fatorar o polinômio ***x² − 7x + 10*** e determinar suas raízes. Comparando esse a equação com o formato:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$x^2 - Sx + P = 0$$

Concluímos que a soma das raízes é 7 e o produto é 10.

- Precisamos encontrar dois números que somem ***7*** e cujo produto seja ***10***. Esses números são ***5*** e ***2*** , pois:

5 + 2 = 7
5 · 2 = 10

Material Extra

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.

Fórmula Resolutiva para Equação do Segundo Grau

Equação do 2º Grau Parte I: Exemplos e Definição - Aula 46

Equações completas e incompletas do 2º grau

Resolvendo equações do 2º grau incompletas

Exercícios Resolvidos

Professor, este exercício é para inspirar os(as) alunos(as) a criarem seus próprios exercícios e a desenvolver a habilidade EF09MA26/ES.

EXERCÍCIO 1

Elabore um problema no caderno envolvendo áreas de terrenos retangulares e dê para um colega resolver. Depois, confira a resposta do colega.

SOLUÇÃO

Como o exercício é para que você, aluno(a), elabore, deixamos um problema para se inspirar. Veja:
Carlos comprou um terreno retangular e deseja cercá-lo para construir um jardim. O comprimento do terreno é **2 metros a mais** do que o **dobro da largura**. Se a área total do terreno é de **480 m²**, qual é o comprimento e a largura do terreno?

Para auxiliar na resolução, lembre-se de usar o fluxograma.
Vamos resolver esse problema usando uma equação do 2º grau.

- ***Definir as variáveis:***
  Seja x a largura do terreno (em metros).
  O comprimento será 2x + 2, já que é 2 metros a mais do que o dobro da largura.
  Fórmula da área do terreno: A área de um retângulo é dada por: A = C × L
- ***Substituindo a área total*** (480 m²), o comprimento 2x + 2, e a largura x na fórmula da área: **(2x + 2) .x = 480**
- ***Expandir a equação:***
  $2x^2 + 2x = 480$
- ***Reorganizar a equação:***
  $2x^2 + 2x - 480 = 0$
- **Resolver a equação do 2º grau**:
  Para resolver, usamos a fórmula de Bhaskara: $2x^2 + 2x - 480 = 0$

a = 2
b = 2
c = -480

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-480)$$
$$\Delta = 4 + 3840 = 3844$$

$$x' = \frac{-2 - \sqrt{3844}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 - 62}{4} = \frac{-64}{4} = -16$$
$$x'' = \frac{-2 + \sqrt{3844}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + 62}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

Como x representa a ***largura do terreno***, a solução negativa não faz sentido.
Portanto, **x = 15 metros**.

Sabemos que o comprimento é 2x + 2. Substituindo x = 15 :
C = 2(15) + 2 = 30+2 = ***32 metros***.
Resposta: O comprimento do terreno é 32 metros e a largura 15 metros.

- Podemos reescrever o polinômio como o produto de dois binômios:

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$$

- Para encontrar as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, igualamos os fatores a zero:

$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

Isso gera duas equações simples:
$(x - 5) = 0 \implies x = 5$
$(x - 2) = 0 \implies x = 2$

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU INCOMPLETAS UTILIZANDO A FATORAÇÃO

Uma equação polinomial do 2º grau completa é uma equação da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \ sendo \ a \neq 0$$

No entanto, em alguns casos, um ou mais termos podem estar ausentes, resultando nos seguintes tipos de equações incompletas:

1- Equação sem termo independente (c = 0) : $ax^2 + bx = 0$

2- Equação sem termo linear (b = 0) : $ax^2 + c = 0$

Podemos resolver essas equações por ***fatoração*** , veja como fazer:

- **Equações do tipo** $ax^2 + bx = 0$

Nesse caso, vamos usar a ***fatoração por evidência***, ou seja, o fator comum pode ser destacado para resolver a equação.

$$ax^2 + bx = 0$$
$$x(ax + b) = 0$$

Aplicar a propriedade do produto nulo, ou seja, para que o resultado da multiplicação seja zero, um dos termos deve ser igual a zero:

$$x = 0$$
ou
$$ax + b = 0$$

Agora é só resolver a equação:

$$ax + b = 0$$
$$ax = 0 - b$$
$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Assim, as raízes da equação polinomial do 2º grau incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$ são:

$$x' = 0$$
$$x'' = -\frac{b}{a}$$

- **Equações do tipo *ax² + c = 0***

Nesse caso, isolamos x^2 e extraímos a raiz quadrada.

$$ax^2 + c = 0$$
$$ax^2 = 0 - c$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x' = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$
$$x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Lembre-se: só haverá raízes reais se o radicando for um número positivo.

Vamos ver os exemplos:

- Resolva ***x² − 4x = 0***

Passo 1: Colocar x em evidência

$$x(x - 4) = 0$$

Passo 2: Aplicar a propriedade do produto nulo. Assim, temos:

$$x = 0 \quad ou \quad x - 4 = 0$$

Passo 3: Resolver as equações

$x - 4 = 0$
$x = 0 + 4$
$x = 4$

Solução: As raízes da equação são $x' = 0$ e $x'' = 4$.

- Resolva ***4x² − 16 = 0***

Passo 1: Isolar x^2

$$4x^2 - 16 = 0$$
$$4x^2 = 16$$
$$x^2 = \frac{16}{4}$$
$$x^2 = 4$$

Passo 2: Aplicar a raiz quadrada, lembre-se que só haverá raiz real, se o radicando for positivo.

$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x' = \sqrt{4} = 2$$
$$x'' = -\sqrt{4} = -2$$

Solução: As raízes da equação são: $x' = 2$ e $x'' = -2$.

- Resolva ***7x² + 35x = 0***

Passo 1: Colocar 7x em evidência

$$7x(x + 5) = 0$$

Passo 2: Aplicar a propriedade do produto nulo. Assim, temos:

$$7x = 0 \quad ou \quad x + 5 = 0$$

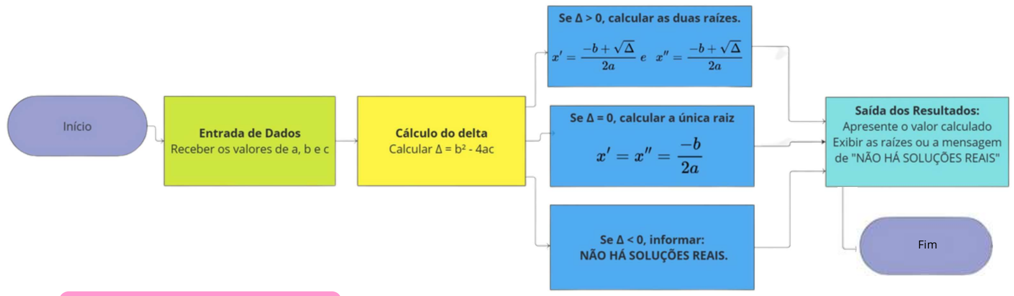
Passo 3: Resolver as equações

$x + 5 = 0$
$x = 0 - 5$
$x = -5$

Solução: As raízes da equação são: $x' = 0$ e $x'' = -5$.

FLUXOGRAMA PARA A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE 2º GRAU

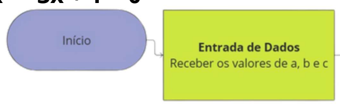
No material da quinzena 7, estudamos sobre o que é um fluxograma, agora iremos construir um fluxograma que represente o algoritmo para resolver a equação do 2º grau. Ele terá as seguintes etapas:



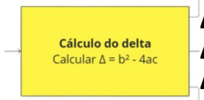
TESTE DO FLUXOGRAMA

Agora que temos nosso fluxograma, vamos testá-lo aplicando-o em diferentes equações do 2º grau. Isso nos permitirá verificar se o algoritmo está correto e se o fluxograma resolve as equações de maneira eficaz. Por exemplo:

- **5x ² - 3x + 1 = 0**

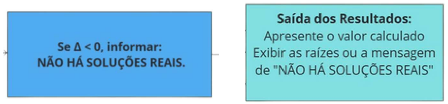


a = 5
b = -3
c = 1



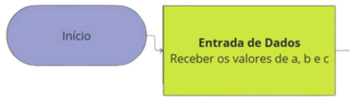
Δ = b² - 4ac
Δ = (-3)² - 4·5·1
Δ = 9 - 20 = -11

Δ = -11
Δ < 0

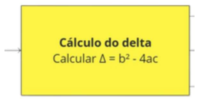


NÃO HÁ SOLUÇÕES REAIS.

- **3x ² - 2x - 1 = 0**

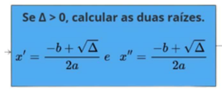


a = 3
b = -2
c = -1

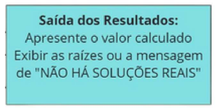


Δ = b² - 4ac
Δ = (-2)² - 4·3·(-1)
Δ = 4 + 12 = 16

Δ = 16
Δ > 0



$$x' = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$
$$x'' = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$



AS RAÍZES DA EQUAÇÃO SÃO:
$$x' = -\frac{1}{3} \quad x'' = 1$$

ALGORITMO PARA RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

ELEMENTOS BÁSICOS DE UM ALGORITMO

Um algoritmo é uma sequência de passos lógicos e bem definidos que têm como objetivo resolver um problema. Podemos dividi-lo nos seguintes elementos:

- ***Entrada:*** São os dados ou informações que o algoritmo precisa para funcionar. No caso de uma equação do 2º grau, as entradas seriam os valores de a, b e c.
- ***Processamento:*** O processamento envolve os cálculos ou operações que o algoritmo realiza para chegar à solução. Em uma equação do 2º grau, isso envolve calcular o Δ (delta) e as raízes da equação.
- ***Saída:*** São os resultados que o algoritmo retorna ao usuário. No nosso caso, a saída será a solução da equação, ou seja, ***as raízes***.
- ***Decisões Condicionais:*** São as etapas em que o algoritmo escolhe entre diferentes caminhos, dependendo de uma condição. Na equação do 2º grau, a decisão ocorre ao verificar o valor de Δ (delta):

  Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas.
  Se $\Delta = 0$, a equação tem uma raiz real (ou seja, as raízes são iguais).
  Se $\Delta < 0$, não há soluções reais.

RESOLVENDO UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Vamos agora aplicar o algoritmo para resolver uma equação do 2º grau:
A equação do 2º grau tem a forma: ***$ax^2 + bx + c = 0$***
As etapas para resolver são as seguintes:

1. ***Entrada de dados:*** O primeiro passo é coletar os coeficientes da equação. Ou seja, você deve fornecer os valores de a, b e c.
2. ***Cálculo de Δ (delta)***: A fórmula para calcular Δ é: $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependendo do valor de Δ, teremos que tomar decisões diferentes.
3. ***Decisão sobre o tipo de solução:***
   Se $\Delta > 0$, o algoritmo calculará as duas raízes reais e distintas usando as fórmulas:
   $$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
   Se $\Delta = 0$, o algoritmo calculará uma única raiz:
   $$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$
   Se $\Delta < 0$, o algoritmo indicará que não há soluções reais.
4. ***Saída:*** O algoritmo, então, apresentará as raízes da equação ou informará que não há solução real.

Exercícios Resolvidos

Este exercício tem como objetivo desenvolver a habilidade de utilizar a forma fatorada de um trinômio do 2º grau para solucionar equações polinomiais simples e contextualizadas.

EXERCÍCIO 1

Um agricultor está planejando um canteiro retangular cuja área total deve ser de 35 m². O comprimento é 2 metros maior que a largura. Qual deve ser a largura do canteiro?

SOLUÇÃO

Seja x a largura do canteiro (em metros). O comprimento será x + 2.
A área do retângulo é dada por:

Área = largura x comprimento
$x(x + 2) = 35$

Passo 1: Transformar a equação em um trinômio:

$$x(x + 2) = 35$$
$$x^2 + 2x = 35$$
$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

Passo 2: Fatorar o trinômio:
Procuramos dois números cuja soma seja -2 e o produto seja -35. Esses números são -7 e 5.

$$(x - (-7))\,(x - 5) = 0$$
$$(x + 7)(x - 5) = 0$$

Passo 3: Aplicar o produto nulo

$x + 7 = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x + 7 = 0$	$x - 5 = 0$
$x = 0 - 7$	$x = 0 + 5$
$x = -7$	$x = 5$

Como a largura não pode ser negativa, temos x = 5 metros.

Resposta: A largura do canteiro deve ser 5 metros.

Material Extra

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.

Produtos notáveis de polinômios: diferença de dois quadrados

Produtos notáveis de polinômios: trinômio do quadrado perfeito

Fatoração de Expressões Algébricas -Parte 1

Fatoração de Expressões Algébricas - Parte 2

Vamos resolver o trinômio encontrado (x + 3)² = 1:

$$
\begin{aligned}
&(x+3)^2 = 1\\
&\sqrt{(x+3)^2} = \pm\sqrt{1}\\
&x+3 = 1\\
&x = 1-3\\
&x = -2
\end{aligned}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{aligned}
&x+3 = -1\\
&x = -1-3\\
&x = -4
\end{aligned}
$$

Logo, os números reais - 4 e - 2 são as raízes da equação dada.

O processo algébrico de Bhaskara

Considere, novamente, a equação ***x² + 6x + 8 = 0*** que já resolvemos por meio do processo geométrico de al-Khwarizmi, completar quadrados.

Design: Marcelo Uva
Fonte: Wikimedia Commons

No século XII, o matemático indiano Bhaskara baseou-se nos estudos de Al-Khwarizmi para apresentar um processo algébrico que permitia resolver qualquer equação do 2º grau com uma incógnita.

Partindo de uma equação completa do 2º grau com uma incógnita e na forma reduzida, pode-se determinar, de modo mais simples, as raízes dessa equação pela chamada ***fórmula resolutiva***.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão ***b² - 4ac*** , que é um número real, é usualmente representada pela letra grega Δ (delta) e é chamada de ***discriminante da equação***. Desse modo, a fórmula resolutiva pode ser escrita assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

A fórmula resolutiva também recebeu o nome ***fórmula de Bhaskara***, em homenagem ao grande matemático indiano.

A existência ou não de raízes reais, bem como o fato de elas serem duas iguais ou diferentes, depende, exclusivamente, do valor do discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Quando Δ > 0, a equação tem duas raízes reais e diferentes.
- Quando Δ = 0, a equação tem uma raiz real.
- Quando Δ < 0, a equação não tem raízes reais.

Agora, vamos determinar as raízes de algumas equações do 2º grau com uma incógnita usando a fórmula resolutiva.

$$
\begin{aligned}
&4x^2 - 12x + 9 = 0\\
&a = 4 \quad b = -12 \quad c = 9\\
&\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = 144 - 144 = 0\\
&\Delta = 0\\
&x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2\cdot 4} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}\\
&x' = x'' = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

é a única raiz real dessa equação. Dizemos que a equação tem uma raiz ou que tem duas raízes iguais

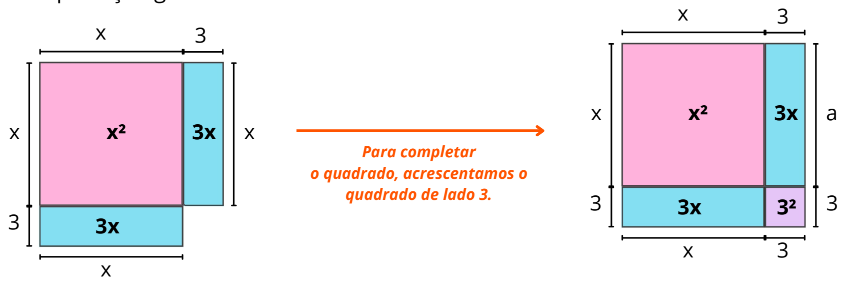
Utilizando a interpretação, da página anterior, vamos acompanhar o exemplo a seguir, que mostra como Al-Khwarizmi desenvolveu estudos sobre equações de 2º grau.

Vamos fazer uma interpretação geométrica da expressão $\mathbf{x^2 + 6x}$ e completar um quadrado a partir da figura representada.

Professor, se julgar pertinente, leve para a sala de aula cartolinas coloridas, réguas e canetas hidrográficas. Solicite aos estudantes que, organizados em duplas, construam a interpretação geométrica da expressão $x^2 + 6x$ e completem um quadrado. A manipulação dos materiais, associada ao apelo visual, contribui para que a compreensão do método seja compreendida e absorvida de maneira mais significativa. Na sequência, solicite que façam a construção para o caso $x^2 + 5x$.

$$x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$$

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada:



Pela figura, notamos que, para completar um quadrado, devemos acrescentar o quadrado de lado 3, ou seja, de área 3². Assim, se adicionarmos 3² à expressão $x^2 + 6x$, obteremos $x^2 + 6x + 3^2$, que é um trinômio quadrado perfeito. Daí, podemos escrever:

$$x^2 + 6x + 3^2 \;=\; x^2 + 6x + 9 \;=\; (x + 3)^2$$

expressão algébrica correspondente à área do quadrado formado — *trinômio quadrado perfeito* — *forma fatorada do trinômio*

Aplicando o processo de completar quadrados, vamos resolver as seguintes equações do 2º grau com uma incógnita no conjunto dos números reais.

Acompanhe a resolução da equação $\mathbf{x^2 + 6x + 8 = 0}$
Da expressão $x^2 + 6x$, podemos interpretar: $\mathbf{x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)}$
Pela figura, observamos que é necessário acrescentar o número $(3)^2$, ou seja, 9, à expressão $x^2 + 6x$ para obter um quadrado.

Depois de determinarmos, geometricamente, o valor que devemos acrescentar à expressão $\mathbf{x^2 + 6x}$, voltamos à equação que queremos resolver.

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$
$$x^2 + 6x = -8 \longrightarrow \text{princípio aditivo}$$
$$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9 \longrightarrow \text{princípio de equivalência das equações}$$

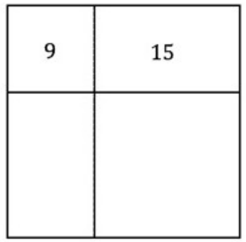
trinômio quadrado perfeito

Fatorando o trinômio quadrado perfeito obtido no 1º membro, obtemos a equação: $(x + 3)^2 = 1$

Atividades

ATIVIDADE 1

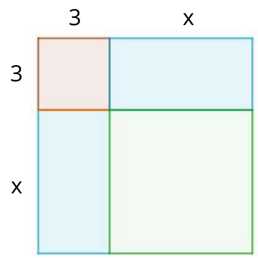
A figura abaixo representa um **quadrado** que foi repartido em 4 regiões menores (2 quadrados e 2 retângulos). As áreas do menor quadrado e de um dos retângulos estão indicadas na figura.
Qual a **área total** do quadrado maior?



A) 15
B) 25
C) 30
D) 39
E) 64

ATIVIDADE 2

Qual é o **polinômio** que expressa a **área total** do quadrado cujos lados medem (x + 3) unidades?



A) $x^2 + 6x + 9$
B) $x^2 - 6x + 9$
C) $x^2 + 6x - 9$
D) $x^2 - 6x + 9$
E) $x^2 + 9$

ATIVIDADE 3

Desenvolvendo o **produto notável** $(3x - 2)^2$ chegaremos num **polinômio**. Esse **polinômio** é:

A) $9x^2 - 12x + 4$
B) $6x^2 + 46x + 4$
C) $9x + 49x^2 - 4$
D) $9x - 6 + 49x^2$
E) $9x^2 - 4$

ATIVIDADE 4

O **polinômio** a seguir é um **quadrado perfeito** do tipo **$(ax + b)^2$**. Quais são os valores de **a** e de **b**?

$$x^2 - 10x + 25$$

A) a = 10 e b = 5
B) a = 5 e b = 10
C) a = 1 e b = 5
D) a = 1 e b = - 5
E) a = - 5 e b = 1

ATIVIDADE 5

Realizando a **simplificação** da **expressão algébrica** a seguir para $x \neq 5$ e $x \neq -5$, encontraremos:

$$\frac{(2x-10)\cdot(2x+10)}{x^2-25}$$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

ATIVIDADE 6

Já aprendemos que o produto notável **$(x + 4)^2$** pode ser "aberto" na forma polinomial como **$x^2 + 8x + 16$,** sendo assim, para resolver a equação **$x^2 + 8x + 16 = 0$** basta perceber que, o valor de x procurado é um número tal que **$(x + 4)^2 = 0$,** isto é, o valor procurado é aquele tal que **$x + 4 = 0$**, ou seja, **$x = - 4$**.

Seguindo nesse mesmo raciocínio, encontraremos como solução da equação **$x^2 - 14x + 49 = 0$** o número:

A) x = 6
B) x = 7
C) x = 8
D) x = 9
E) x = 10

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COMPLETAS DO 2º GRAU CUJO PRIMEIRO MEMBRO É UM TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Na página 7 deste material, aprendemos sobre os trinômios quadrados perfeitos e como fatorá-los. Aqui, utilizaremos os conceitos desenvolvidos para resolver equações do 2º grau que podem ser fatoradas dessa forma. Vejamos os exemplos:

Acompanhe a resolução da equação **$9x^2 - 30x + 25 = 0$**

$$9x^2 - 30x + 25 = 0$$

$$(3x)^2 \quad (2 \cdot 3x \cdot (-5)) \quad (-5)^2$$

$$(3x - 5)^2 = 0$$
$$3x - 5 = 0$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}$$

- $x^2 + 8x + 16 = 0$
  $(x + 4)^2 = 0$
  $x + 4 = 0$
  $x = - 4$

- $x^2 + 14x + 49 = 0$
  $(x + 7)^2 = 0$
  $x + 7 = 0$
  $x = - 7$

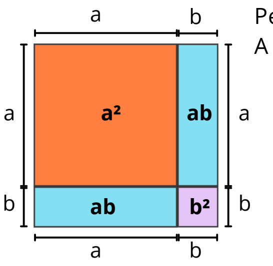
RESOLUÇÃO DE QUAISQUER EQUAÇÕES COMPLETAS DO 2º GRAU

Agora vamos aprender a resolver qualquer equação completa do 2º grau. Para isso, vamos estudar diferentes maneiras de resolvê-las.

Método de completar quadrados

A partir da interpretação geométrica dada pelos gregos à expressão ***$(a + b)^2$*** , o matemático Al-Khwarizmi estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita.

Observe a figura que é a representação geométrica da expressão ***$(a + b)^2$***.



Pela figura ao lado, percebemos que: ***$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$***.
A interpretação geométrica dessa expressão algébrica é:

$a^2 + 2ab + b^2$

b^2 → área do quadrado de lado b

$2ab$ → área de um dos retângulos de lados a e b

a^2 → área do quadrado de lado a

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Nas páginas 8 a 10, deste material aprendemos como encontrar as raízes de uma equação do 2º Grau incompletas utilizando a fatoração. Vamos revisar.

RESOLVENDO EQUAÇÕES DO TIPO $ax^2 + bx = 0$

Um número real é tal que seu quadrado é igual ao seu triplo. Qual é esse número? Representando por x o número procurado, podemos escrever a equação $x^2 = 3x$.

$x^2 - 3x = 0$ ⟶ *Equação reduzida*

$x(x - 3) = 0$ ⟶ Colocamos x em evidência.

Pela propriedade dos números reais, temos:

$x = 0$ ⟶ *uma raiz da equação*

ou

$x - 3 = 0$

$x = 3$ ⟶ *outra raiz da equação*

O número procurado é 0 ou 3.

RESOLVENDO EQUAÇÕES DO TIPO $ax^2 + c = 0$

Observe o exemplo a seguir.
A medida da área de uma praça, cujo formato lembra um quadrado, é 225 m². Quanto mede, em metro, o lado dessa praça?
Indicando por ***x*** a medida do lado dessa praça, podemos escrever a equação:

$$x^2 = 225$$
$$x = \pm\sqrt{225}$$
$$x' = 15 \quad x'' = -15$$

Como a medida do lado não pode ser um número negativo, a solução x = -15 não serve para o problema. Logo, a medida do lado da praça é 15 metros.

Veja outros exemplos:

$$x^2 - 81 = 0$$
$$x^2 = 81$$
$$x = \pm\sqrt{81}$$
$$x' = 9 \quad x'' = -9$$

$$9x^2 - 16 = 0$$
$$x^2 = \frac{16}{9}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{16}{9}}$$
$$x' = \frac{4}{3} \quad x'' = -\frac{4}{3}$$

$$x^2 + 25 = 0$$
$$x^2 = -25$$

Como não existe raiz quadrada de números negativos, não existe solução nos números reais.

ATIVIDADE 7

A **soma** de dois números naturais **x** e **y** é igual 30 e o **produto** deles é 221. Use o que você aprendeu sobre **produtos notáveis** para calcular o valor numérico da expressão algébrica **$(x^2 + y^2)$**.

A) 442
B) 458
C) 500
D) 679
E) 900

ATIVIDADE 8

Uma bola foi chutada para o alto, de forma que sua **altura H** (em metros), em função do **tempo t** (em segundos), pode ser calculada através da equação quadrática **$H = 30t - 5t^2$**.

Para saber **quanto tempo essa bola ficou no ar**, basta resolver a equação com **H = 0**, pois, a altura que essa bola está quando sai e quando chega ao chão, é zero.

Use **fatoração** para resolver essa equação com H = 0 e descubra quanto **tempo** essa bola ficou no ar.


Design: Getty Images/ Fonte: Canva

A) 5,0 segundos
B) 5,5 segundos
C) 6,0 segundos
D) 6,5 segundos
E) 7,0 segundos

ATIVIDADE 9

Seja **N** um número natural qualquer. Se o produto do **antecessor** pelo **sucessor** de N resulta em **399**, então quanto vale o **quadrado de N**?

A) 225
B) 289
C) 324
D) 361
E) 400

ATIVIDADE 10

Design: Firsova Kateryna / Fonte: Canva

Os estudantes de uma escola irão fretar um ônibus com **45 lugares** para um passeio ao jardim zoológico. Cada estudante deverá **pagar R$30,00, mais R$3,00 para cada lugar vago**, isto é, se faltarem **x** estudantes os demais (45 - x) pagarão cada um deles um valor, em reais, de (30 + 3x).

Deste modo, o valor **V** do fretamento do ônibus pode ser calculado em função da quantidade x de estudantes faltosos pela equação quadrática **$V = (45 - x) . (30 + 3x) = 1350 + 105x - 3x^2$.**

Sabemos que o valor do fretamento do ônibus foi de **R$ 2.178,00** e nosso desafio é descobrir quantos estudantes faltaram, para isso, basta resolver a equação **$1350 + 105x - 3x^2 = 2178$** que é equivalente à equação **$3x^2 - 105x + 828 = 0$** que, simplificada, pode ser escrita como **$x^2 - 35x + 276 = 0$**.


Design: Vectorfair S / Fonte: Canva

Use o **método de soma e produto** para resolver essa última equação e encontrar a quantidade x de estudantes que não foram ao zoológico sabendo que mais da metade dos lugares do ônibus foram ocupados. A quantidade x procurada é?

A) 12
B) 15
C) 19
D) 21
E) 23

EQUAÇÃO DO 2º GRAU COMPLETAS E INCOMPLETAS

Pela definição de equação de 2º grau, devemos ter sempre **$a \neq 0$**. Entretanto, podemos ter ***b = 0*** ou ***c = 0***.

Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau é chamada ***completa***.

Quando b = 0 e ou c = 0 , a equação do 2º grau é chamada ***incompleta***.

Exemplos:

- $5x^2 - 6x + 4 = 0$ **é uma equação completa** (a = 5 , b = - 6 e c = 4 **).**
- $y^2 + 4x - 3 = 0$ **é uma equação completa** (a = 1 , b = 4 e c = -3 **).**
- $x^2 - 64 = 0$ **é uma equação incompleta** (a = 1 , b = 0 e c = -64 **).**
- $-3t^2 + 9t = 0$ **é uma equação incompleta** (a = -3 , b = 9 e c = 0 **).**
- $4m^2 = 0$ **é uma equação incompleta** (a = 4 , b = 0 e c = 0 **).**

FORMA REDUZIDA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Observe as seguintes equações do 2º grau com uma incógnita.

$5x^2 - 6x + 4 = 0$ $\quad$ $y^2 + 4y - 3 = 0$ $\quad$ $-3t^2 + 9t = 0$ $\quad$ $4m^2 = 0$

Essas equações estão escritas na forma ***$ax^2 + bx + c = 0$***, que é denominada ***forma reduzida*** de uma equação do 2º grau com uma incógnita.

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, por exemplo:

$3x^2 - 6x = x - 3$ $\qquad$ $2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$

Por meio de transformações, nas quais aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade, tais equações podem passar a ser expressas na forma reduzida. Acompanhe a situação a seguir.

Escrever a equação $2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$ na forma reduzida.

$2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$ $\longrightarrow$ *Equação dada*

$2x^2 - 7x + 4 - 1 + x^2 = 0$ $\longrightarrow$ *Aplicamos o princípio aditivo.*

$3x^2 - 7x + 3 = 0$ $\longrightarrow$ *Forma reduzida da equação dada*

Conceitos e Conteúdos

A EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Entre os diversos documentos deixados pelos babilônios, encontra-se um antigo texto em que problemas matemáticos são registrados em argila. Nesse texto, há um problema que pode ser enunciado da seguinte forma:

Qual é a medida de comprimento do lado de uma região quadrada sabendo que a medida de área dela menos a medida de comprimento do lado é igual a 870?

Passando da linguagem usual para a linguagem algébrica, a solução desse problema equivale a resolver a equação $x^2 - x = 870$, que também pode ser escrita como:

$$x^2 - x - 870 = 0$$

que é uma equação do 2º grau com 1 incógnita.

Fonte:https://cienciadegaragem.blogspot.com/2018/05/a-algebra-dos-babilonios-e-dos-egipcios_11.html

Placa de argila de aproximadamente 2000 a.C.-1600 a.C. (19,4 cm 3 11,7 cm), guardada no Museu Britânico, em Londres (Inglaterra). O primeiro problema dessa placa, registrado em escrita cuneiforme, corresponde ao problema citado no texto.

Toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é chamada de equação do 2º grau com 1 incógnita.

COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Na equação do 2º grau, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, os números reais ***a***, ***b*** e ***c*** são chamados coeficientes da equação, com a sendo:

- ***a*** sendo o coeficiente do termo x^2
- ***b*** sendo o coeficiente do termo x
- ***c*** sendo o coeficiente sem incógnita ou termo independente de x.

Veja os exemplos:

- $2x^2 - 2x - 40 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita x , em que que a = 2, b = -2 e c = -40.
- $y^2 - 36 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita y , em que a = 1, b = 0 e c = -36.
- $5z^2 - 10z = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita z, em que a =5, b =-10 e c = 0.

Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

KHAN ACADEMY. Produtos notáveis de polinômios: diferença de dois quadrados. Khan Academy, 2024. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:poly-arithmetic/x2ec2f6f830c9fb89:special-products/e/poly-diff-of-sq. Acesso em: 17 fev. 2025.

KHAN ACADEMY. Produtos notáveis de polinômios: quadrado perfeito. Khan Academy, 2024. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:poly-arithmetic/x2ec2f6f830c9fb89:special-products/v/poly-perfect-square. Acesso em: 17 fev. 2025.

PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP. Fatoração de Expressões Algébricas - Parte 1 - Legendado. YouTube, 2024. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=gqiMb48VqUQ. Acesso em: 17 fev. 2025.

PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP. Fatoração de Expressões Algébricas - Parte 2 - Aula 37. YouTube, [ano de publicação]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=J4VTIB76u84. Acesso em: 17 fev. 2025.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série| Ensino Médio

MATEMÁTICA

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR DO PAEBES
(EF09MA26/ES) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$. **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	• Inferir uma equação polinomial de 2º grau que modela um problema. • Resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau, utilizando inclusive os produtos notáveis e os processos de fatoração. • Elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau, utilizando inclusive os produtos notáveis e os processos de fatoração. • Compreender os elementos básicos de um algoritmo, incluindo entrada, processamento, saída e decisões condicionais. • Identificar as etapas lógicas necessárias para resolver uma equação do 2º grau, como entrada de dados, cálculo de Δ, decisão sobre o tipo de solução e cálculo das raízes. • Testar o fluxograma criado, aplicando-o em diferentes equações do 2º grau e verificando sua eficácia.	D087_M Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.

Contextualização

A história das ***equações do segundo grau*** remonta a tempos muito antigos, sendo a busca por soluções para esse tipo de problema um dos marcos iniciais na evolução da álgebra. Embora os babilônios não tivessem a noção formal de "equações quadráticas" como entendemos hoje, eles já lidavam com problemas que envolviam a resolução de relações quadráticas muito antes de termos uma linguagem algébrica. Esses problemas eram frequentemente aplicados a questões práticas, como a medição de áreas e o cálculo de distâncias, especialmente no contexto da geometria e da construção.

Foto do tablete Plimpton 322. Apesar de atualmente sabermos traduzir os números expressos nesse tablete, que estão dispostos como em uma tabela, ainda há várias teorias sobre o propósito desses valores.

Fonte: https://francis.naukas.com/2017/09/07/el-significado-matematico-de-la-tablilla-babilonica-plimpton-322/

Um dos maiores marcos dessa história é o famoso ***Plimpton 322***, uma tábua de argila babilônica que data de cerca de 1900 a.C. a 1600 a.C e foi descoberta em 1922. Esse artefato contém uma tabela de números que representa soluções de equações quadráticas e é especialmente importante porque mostra que os babilônios já conheciam métodos para resolver problemas envolvendo números que satisfazem a equação quadrática $ax^2+bx+c = 0$, mas de maneira prática, sem a formalização algébrica que surgiria muitos séculos depois.

Embora os babilônios não usassem a terminologia e os métodos algébricos modernos, sua abordagem prática para resolver problemas envolvendo ***quadrados e raízes quadradas*** pavimentou o caminho para o desenvolvimento das equações do segundo grau e para o entendimento mais formal das propriedades das raízes dessas equações.

Assim, a partir de Plimpton 322, podemos traçar uma linha que conecta a antiga Matemática babilônica com os conceitos modernos de álgebra, mostrando que as equações quadráticas, longe de serem uma invenção recente, têm raízes que remontam a milênios, refletindo uma busca antiga e contínua por compreender e resolver problemas numéricos.

BONS ESTUDOS!