Referências

Pobreza cai para 31,6% da população em 2022, após alcançar 36,7% em 2021. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/38545-pobreza-cai-para-31-6-da-populacao-em-2022-apos-alcancar-36-7-em-2021

QUINZENA **12** 30/06 a 04/07

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL
GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

8º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU - MÉTODO DA ADIÇÃO E DA SUBSTITUIÇÃO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EF08MA08 - Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	• Inferir um sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas que modela um problema. • Resolver um sistema de equações por meio do método da adição. • Resolver um sistema de equações por meio do método da substituição.	**D077_M -** Corresponder um sistema de equações polinomiais de 1º grau à uma situação problema descrita textualmente. **D089_M -** Utilizar sistemas de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas.

Contextualização

ECONOMIA DIVERSIFICADA

A economia do Espírito Santo é diversificada e movimenta negócios em diversas cadeias produtivas tais como, petróleo e gás, siderurgia e mineração, celulose, rochas ornamentais, entre outras.

Grande parte dessa produção é comercializada para outros países e transportada através de nossos portos. O ***Complexo Portuário de Tubarão*** reúne cinco terminais, com estrutura comparável aos melhores portos do mundo.

Em Matemática, os sistemas de equações do 1º grau são amplamente utilizados na economia para resolver problemas envolvendo custos, receitas e lucros.

Porto de Tubarão
Wikimedia Commons
Autor: Erik Sailor

Quando há mais de uma condição a ser atendida os sistemas de equações são uma ferramenta poderosa para encontrar as soluções ideais. Por exemplo: em um porto comercial, estão sendo transportados dois tipos de minérios: ferro e cobre. São 1 500 toneladas no total, divididas entre os dois tipos de minério. O preço de cada tonelada de ferro é R$ 2 000,00, e o preço de cada tonelada de cobre é R$ 3 500,00. Sabendo que foi gasto um total de R$ 4 350 000,00 na compra desses minérios, quantas toneladas de cada minério foram transportadas?

Neste material, vamos estudar sistemas de equações. Veremos:

- o que é um sistema de equações do 1º grau e como utilizar um sistema de equações para modelar um problema;
- resolver um sistema de equações por meio do método da adição; e
- resolver um sistema de equações por meio do método da substituição.

C) Represente graficamente esse sistema de equações do 1º grau em um plano cartesiano.

ATIVIDADE 10

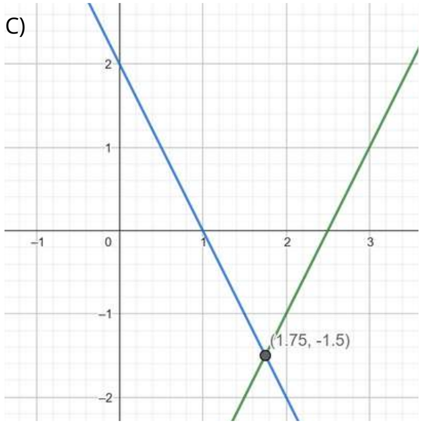
Analise cada sistema de equações do 1º grau e classifique as retas correspondentes em paralelas, concorrentes ou coincidentes.

A) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

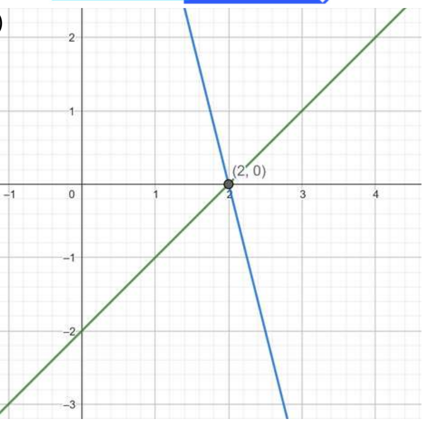
B) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

C)



D)



ATIVIDADE 9

Em uma lanchonete, o preço de 2 sanduíches mais 3 sucos é R$ 42,00.
O preço de 4 sanduíches e 1 suco é R$ 50,00 .
Sabendo disso, monte um sistema de equações do 1º grau e responda às questões a seguir:

A) Qual o preço de um sanduíche e de um suco?

B) As retas que representam as equações do sistema são paralelas, coincidentes ou concorrentes?

Conceitos e Conteúdos

O QUE É UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU?

Um sistema de equações do 1º grau é composto por duas ou mais equações que possuem as mesmas incógnitas, e o objetivo é encontrar o valor dessas incógnitas. Por exemplo, no sistema:

$$\begin{cases} 2x + y &= 9 \\ x - y &= 12 \end{cases}$$

Temos duas equações e duas incógnitas: ***x*** e ***y***. O objetivo é encontrar o valor de ***x*** e o valor de ***y*** que satisfaçam ambas as equações, ou seja, encontrar os valores de ***x*** e ***y*** que, ao serem substituídos na primeira equação resultem em 9 e na segunda equação resultem em 12.

COMO CONSTRUIR UM SISTEMA DE EQUAÇÕES?

Vamos ver como elaborar um sistema de equações que sirva como um modelo para um problema. Acompanhe a situação a seguir.
Maria e João estão comprando frutas. Maria comprou 3 maçãs e 2 bananas, e gastou R$ 10,00. João comprou 4 maçãs e 1 banana, e gastou R$ 9,00. Quanto custa uma maçã e quanto custa uma banana?
Para encontrar a solução vamos seguir alguns passos.

Passo 1: Definir as incógnitas.

- Vamos chamar o preço da maçã de ***x*** e o preço da banana de ***y***.

Passo 2: Traduzir o problema em equações.

- Maria comprou 3 maçãs e 2 bananas, então o total gasto por Maria foi:

$$3x + 2y = 10$$

- João comprou 4 maçãs e 1 banana, então o total gasto por João foi:

$$4x + y = 9$$

Pronto! Criamos o sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y &= 10 \\ 4x + y &= 9 \end{cases}$$

E agora, como resolvê-lo? Como encontrar os valores de x e y que satisfaçam as duas equações ao mesmo tempo?

MÉTODO DA ADIÇÃO

O método da adição (ou eliminação) é uma técnica para resolver sistemas de equações em que somamos ou subtraímos as equações, com o objetivo de eliminar uma das incógnitas. Vamos seguir 3 passos:

Passo 1: Alinhar as equações.
Temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y & = 10 \longrightarrow \text{primeira equação} \\ 4x + y & = 9 \longrightarrow \text{segunda equação} \end{cases}$$

Passo 2: Multiplicar as equações, se necessário.
Neste caso, vamos multiplicar a segunda equação por 2 para que os *coeficientes* de ***y*** nas duas equações sejam iguais. E vamos multiplicar a primeira por -1 para obtermos valores opostos:

$$\begin{cases} (3x + 2y)\cdot(-1) & = 10\cdot(-1) \\ (4x + y)\cdot 2 & = 9\cdot 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -3x - 2y & = -10 \\ 8x + 2y & = 18 \end{cases}$$

Você se lembra?

Coeficiente é um número que multiplica uma variável em uma expressão matemática. Por exemplo, na expressão ***2a + 3b***,

- ***2*** é coeficiente de ***a***.
- ***3*** é coeficiente de ***b***.

Passo 3: Somar as equações membro a membro.
Agora, somamos a primeira equação com a segunda para eliminar ***y***:

$$\begin{array}{rr} & -3x - \cancel{2}y = -10 \\ + & 8x + \cancel{2}y = 18 \\ \hline & 5x \quad\quad = 8 \end{array}$$

Isso resulta em:

$$5x = 8$$

Passo 4: Resolver para ***x***.
Agora, basta dividir ambos os lados por 5:

$$5x = 8$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{8}{5}$$
$$x = 1,6$$

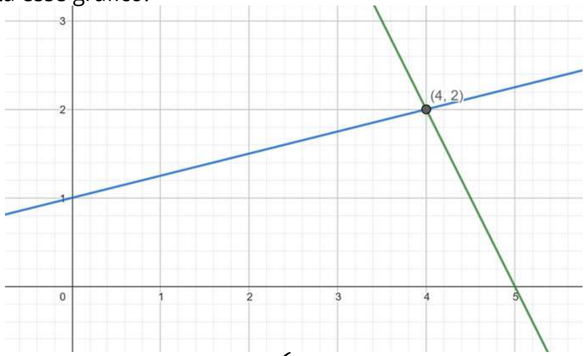
Você se lembra?

A propriedade distributiva é uma propriedade da multiplicação que permite multiplicar um número por uma soma ou subtração de dois ou mais termos.

$$\begin{aligned} 4\cdot(8+3) &= 4\cdot 8 + 4\cdot 3 \\ &= 32 + 12 \\ &= 44 \end{aligned}$$

ATIVIDADE 7

Observe o gráfico abaixo e marque o sistema de equações de 1º grau que representa esse gráfico.



A) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -4 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - 4y = -4 \end{cases}$

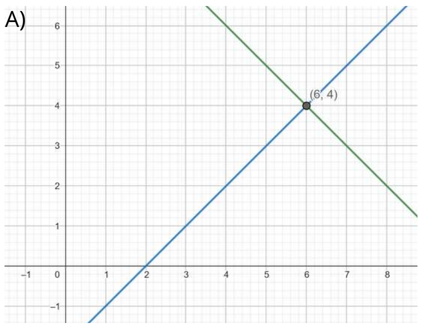
C) $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 6x - 7y = -3 \end{cases}$

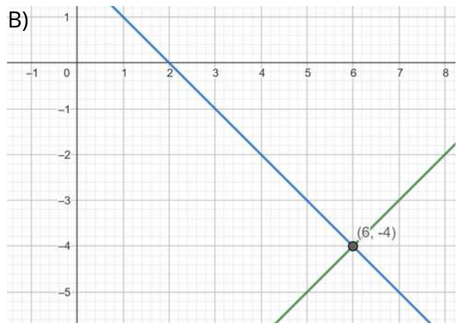
D) $\begin{cases} -2x - 2y = 4 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$

ATIVIDADE 8

Observe o sistema de equações: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Marque a opção que é a representação gráfica desse sistema.

A)


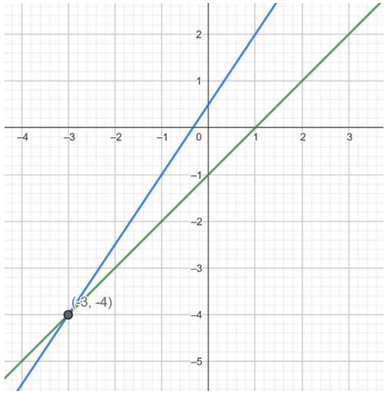
B)


ATIVIDADE 6

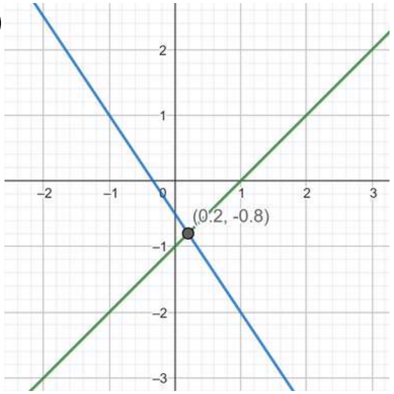
Observe o sistema de equações: $\begin{cases} x + y = -1 \\ -3x - 2y = -1 \end{cases}$

Marque a opção que é a representação gráfica desse sistema.

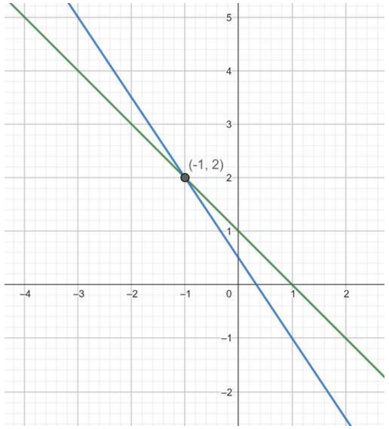
A)



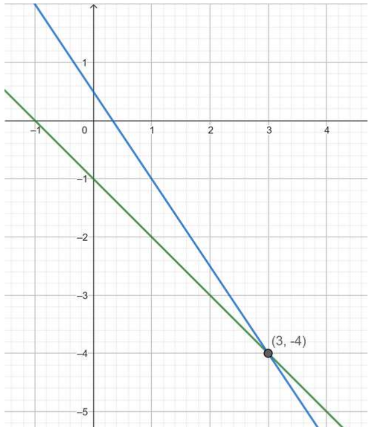
B)



C)



D)



Passo 5: Substituir x na equação original.
Substituímos ***x*** = 1,60 em uma das equações originais. Vamos usar a segunda equação:

$$4x + y = 9$$

Substituindo ***x***:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (1,60) + y &= 9 \\ 6,4 + y &= 9 \\ y &= 9 - 6,4 \\ y &= 2,6 \end{aligned}$$

Portanto, o preço da maçã é R$ 1,60 e o preço da banana é R$ 2,60.

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

O método da substituição é outro jeito de resolver sistemas de equações. Nesse método, isolamos uma das incógnitas em uma das equações e substituímos a equivalência encontrada na outra equação. Vamos aplicar o método da substituição no problema das bananas e maçãs seguindo alguns passos.

Passo 1: Escolher uma equação e isolar uma incógnita.
Vamos isolar ***y*** na segunda equação do nosso sistema:

$$4x + y = 9$$

Isolando ***y***:

$$y = 9 - 4x$$

Passo 2: Substituir na outra equação.
Agora, substituímos $y = 9 - 4x$ na primeira equação do sistema:

$$3x + 2y = 10$$

substituindo:

$$\begin{aligned} 3x + 2(9 - 4x) &= 10 \\ 3x + 18 - 8x &= 10 \\ 3x + 18 - 18 - 8x &= 10 - 18 \quad (Somamos\ -18\ nos\ dois\ membros) \\ 3x - 8x &= -8 \\ -5x &= -8 \end{aligned}$$

agora, basta dividir ambos os lados por -5:

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{-8}{-5}$$
$$x = 1,6$$

Passo 4: Substituir x para encontrar y.
Agora que sabemos que ***x* = *1,60***, substituímos esse valor na equação: $y = 9 - 4x$.
substituindo:

$$y = 9 - 4 \cdot 1,6$$
$$y = 9 - 6,4$$
$$y = 2,6$$

Novamente, encontramos que o preço da maçã é R$ 1,60 e o preço da banana é R$ 2,60.

Para finalizar vamos retomar o exemplo dado na contextualização. Representaremos as toneladas de ferro por ***x*** e as de cobre por ***y.*** Assim podemos criar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y & = 1\ 500 \quad \rightarrow \quad \textit{toneladas de minério} \\ 2\ 000x + 3\ 500y & = 4\ 350\ 000 \quad \rightarrow \quad \text{valor total} \end{cases}$$

Vamos utilizar o método da substituição. Para isso, vamos reescrever a primeira equação.

$$x + y = 1\ 500$$
$$x = 1500 - y$$

A seguir faremos a substituição de ***x*** na segunda equação.

$$2\ 000x + 3\ 500y = 4\ 350\ 000$$

$$2\ 000 \cdot (1\ 500 - y) + 3\ 500y = 4\ 350\ 000$$
$$3\ 000\ 000 - 2\ 000y + 3\ 500y = 4\ 350\ 000$$
$$-2\ 000y + 3\ 500y = 4\ 350\ 000 - 3\ 000\ 000$$
$$1\ 500y = 1\ 350\ 000$$
$$y = \frac{1\ 350\ 000}{1\ 500}$$
$$y = 900$$

Para descobrir a quatidade de ferro substituiremos ***y* = *900*** na primeira equação.

$$x + y = 1\ 500$$
$$x + 900 = 1\ 500$$
$$x = 1\ 500 - 900$$
$$x = 600$$

Portanto são ***600 toneladas*** de ferro e ***900 toneladas*** de cobre.

CONCLUSÃO

Agora você sabe como resolver um sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas tanto pelo ***método da adição*** quanto pelo ***método da substituição***. Esses métodos são fundamentais para resolver problemas do cotidiano, e também são muito úteis em diversas áreas do conhecimento.

ATIVIDADE 4

Resolva o sistema de equações graficamente: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

ATIVIDADE 5

Considere as retas *r* de equação $y = x + 1$ e *s* de equação $y = -2x + 4$.
Mostre graficamente qual é o ponto de interseção dessas retas.

ATIVIDADE 2

Uma fazenda em Domingos Martins, na região serrana do Espírito Santo, produz e vende caixas de morangos e caixas de uvas para um mercado local em Vitória. Cada caixa de morangos custa R$ 12,00, enquanto cada caixa de uvas custa R$ 8,00. Recentemente, o mercado fez um pedido de 50 caixas dessas frutas, totalizando um gasto de R$ 440,00. Sabendo que todas as caixas foram entregues, determine quantas caixas de morangos e quantas caixas de uvas foram compradas.

ATIVIDADE 3

Resolva o sistema de equações graficamente: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$

CONEXÕES MATEMÁTICAS SEDU - 2025

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Pedro e João ganharam um prêmio de R$ 300,00. Pedro recebeu R$ 50,00 a mais que João. Quanto cada um recebeu?
Resposta:
Vamos definir as incógnitas da seguinte maneira: ***x*** será o prêmio de Pedro e ***y*** será o prêmio de João. Podemos criar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 300 & \longrightarrow \text{valor total dos prêmios} \\ x - y = 50 & \longrightarrow \textit{diferença entre os prêmios} \end{cases}$$

Vamos utilizar o ***método da substituição***.
Da equação (2), isolamos ***x***: $x = y + 50$

Substituímos $x = y + 50$ na equação (1):

$$\begin{aligned} (y+50)+y &= 300 \\ 2y+50 &= 300 \\ 2y &= 300-50 \\ 2y &= 250 \\ y &= \frac{250}{2} \\ y &= 125 \end{aligned}$$

Isso significa que João recebeu R$ 125,00. Substituímos y = 125 na equação (2).

$$\begin{aligned} x - y &= 50 \\ x - 125 &= 50 \\ x &= 50 + 125 \\ x &= 175 \end{aligned}$$

Então concluímos que ***Pedro*** recebeu ***R$ 175,00*** e ***João*** recebeu ***R$ 125,00***.

Podemos resolver esse problema utilizando o ***método da adição***. Note que y possui coeficientes opostos (1 e -1).

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ x - y = 50 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} x + y = 300 \\ +\quad x - y = 50 \\ \hline 2x \quad = 350 \\ x = 175 \end{array} \longrightarrow \begin{aligned} 175 + y &= 300 \\ y &= 300 - 175 \\ y &= 125 \end{aligned}$$

Pedro recebeu R$ 175,00 e João recebeu R$ 125,00.

Material Extra

Sistema de equações (substituição e adição)
Portal da OBMEP

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022. Páginas 164 a 169. Clique aqui.

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8° ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática). Página 215 a 217. Clique aqui

Atividades

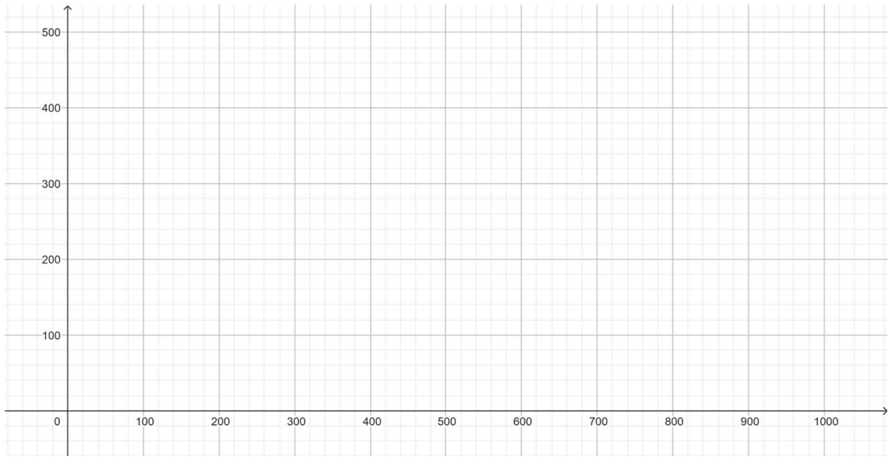
ATIVIDADE 1

No Brasil, muitas famílias enfrentam dificuldades financeiras para garantir uma alimentação adequada todos os meses. Suponha que duas famílias gastaram valores diferentes com comida.
Família 1: Comprou 2 cestas básicas e 5 caixas de leite com 12 unidades, gastando R$ 1 960,00 no total.
Família 2: Comprou 3 cestas básicas e 8 caixas de leite com 12 unidades, gastando R$ 2 976,00 no total.

Os preços usados neste material são aproximados e podem mudar de uma cidade para outra porque o valor dos produtos depende de fatores como a região, o transporte e o local onde são vendidos.

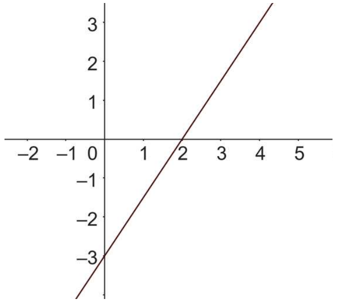
A) Com base nessas informações, represente o preço de uma cesta básica por x e o preço de uma caixa de leite com 12 unidades por y e construa um sistema de equações do 1º grau.

B) Resolva esse sistema pelo método gráfico, desenhando as duas equações no plano cartesiano.

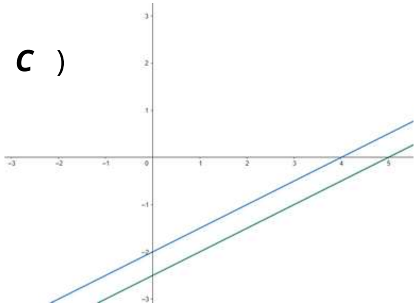


C) Qual é o preço de uma cesta básica e de uma caixa de leite?

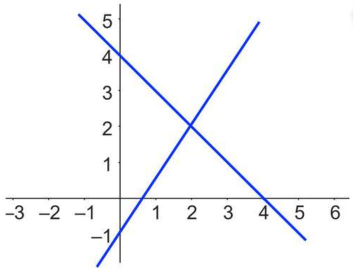
(*B*)



(*C*)



(*A*)



Material Extra

Posições relativas entre duas retas no plano

Atividades

ATIVIDADE 1

O complexo portuário de Tubarão, em Vitória, é conhecido pelo grande volume de exportação de minério de ferro. Em um determinado dia, dois navios atracaram para serem carregados: o Navio A e o Navio B.

Sabe-se que:

- O Navio A carregou 20.000 toneladas a mais de minério de ferro do que o Navio B.
- O total de minério de ferro carregado pelos dois navios juntos foi de 140.000 toneladas.

Quantas toneladas de minério de ferro cada navio transportou?

ATIVIDADE 2

No complexo portuário de Tubarão, dois caminhões, o caminhão X e o caminhão Y, transportam cargas de areia e cascalho para a construção de um novo terminal.

O caminhão X transportou um total de 40 toneladas de areia e cascalho.

O caminhão Y transportou um total de 50 toneladas.

Sabe-se que:

- Juntos, os dois caminhões transportaram 60 toneladas de areia.
- O caminhão X transportou 10 toneladas a mais de areia do que o caminhão Y.

Quantas toneladas de areia e de cascalho cada caminhão transportou?

ATIVIDADE 3

Indicando por x o número de figurinhas de Jorge e por y o número de figurinhas de Luísa, monte um sistema de equação e descubra quantas figurinhas tem cada um.

Design: Prosymbols / Fonte: Canva

ATIVIDADE 4

A tirinha abaixo apresenta uma conversa entre Carla e Bruna, na qual planejam o investimento da quantia em dinheiro que cada uma possui.

Imagem: Elaborada pela autora.

Supondo que x representa a quantia de Carla e y a quantia de Bruna, escreva o sistema de equações do 1º grau que melhor traduz o problema.

ATIVIDADE 5

No jogo de basquete, há cestas que valem 3 e 2 pontos. Durante uma partida, Robson fez 10 cestas e marcou 22 pontos. Quantas cestas de 3 pontos e quantas de 2 pontos Robson fez nessa partida?


Design: Pat Strairhead / Fonte: Canva

Resposta: vamos analisar a resolução de cada sistema de equações do 1º grau.

- Se a solução do sistema for um único par ordenado, o gráfico representará duas retas concorrentes.
- Se a solução do sistema forem infinitos pares ordenados, o gráfico representará duas retas coincidentes.
- Se não houver par ordenado como solução para o sistema, o gráfico representará duas retas paralelas.

$$A\begin{cases} x+y &= 4 \\ 2x-y &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + \cancel{y} &= 4 \\ 2x - \cancel{y} &= 1 \\ \hline 3x &= 6 \\ x &= \frac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \textit{Com } x = 2 \textit{ na primeira equação}: \\ 2 + y = 4 \\ 2 - \cancel{2} + y = 4 - 2 \\ \textit{somamos } -2 \textit{ nos dois membros} \\ y = 2 \end{gathered}$$

Solução única: $(2, 2)$.
Portanto, esse sistema é representado por duas retas concorrentes.

Analisando o sistema *B*, notamos que a segunda equação é ***o dobro*** da primeira equação. Portanto trata-se da mesma equação. Assim temos um gráfico com ***retas coincidentes***.

$$3x - 2y = 6$$

dobro dobro dobro

$$6x - 4y = 12$$

Para resolver o sistema *C*, vamos utilizar o método da substituição.

$$\begin{cases} x-2y &= 5 \\ 2x-4y &= 8 \end{cases}$$

Isolando x na primeira equação temos:

$$x = 5 + 2y$$

Substituindo na segunda equação:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (5+2y) - 4y &= 8 \\ 10 + \cancel{4y} - \cancel{4y} &= 8 \\ 10 &= 8 \end{aligned}$$

Falso!

Logo, chegamos a um resultado falso. Portanto o sistema C não possui soluções e representa um par de ***retas paralelas***. Observe a seguir a solução completa da questão:

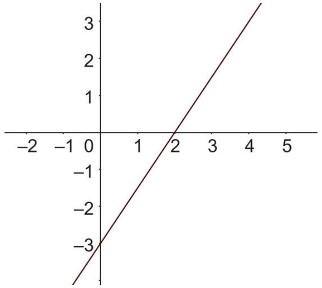
Logo como o ponto de encontro das retas acontece onde $x = 7$ e $y = 2$, o **caderno** custará R$ 7,00 e o **lápis** R$ 2,00.

EXERCÍCIO 3

Relacione os sistemas de equação da primeira coluna com os gráficos correspondentes na segunda coluna.

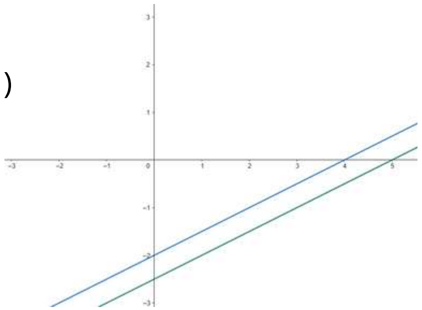
$$A)\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

( )



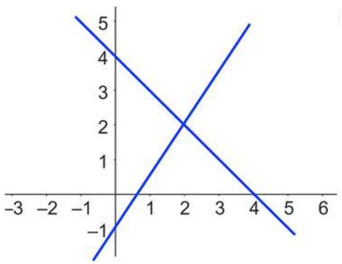
$$B)\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

( )



$$C\begin{cases} x - 2y &= 5 \\ 2x - 4y &= 8 \end{cases}$$

( )



ATIVIDADE 6

Na semana passada, Augusto completou 46 anos de idade. Ele é pai de Clara e de Mateus. Observe abaixo o que as crianças disseram a respeito da idade de cada um.

Indicando por **c** a idade de Clara e **m** a idade de Mateus. Quais são as idades dos filhos de Augusto?

Fonte: Canva

ATIVIDADE 7

Na compra de 3 mangas e 2 melões, Adriana gastou R$ 42,00. Observando o preço dessas frutas, ela percebeu que não havia diferença entre o custo de 4 mangas e o de 2 melões. Qual é o preço de cada fruta?

Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 8

Em um escritório trabalham 33 funcionários, entre homens e mulheres. Se forem demitidos 3 homens e admitidas 4 mulheres, o número de homens e de mulheres será igual. Quantas mulheres trabalham nesse escritório?

ATIVIDADE 9

Ana fez uma prova com 50 questões. Para cada questão correta, ela ganhava 5 pontos; para cada errada, perdia 3 pontos. Ana fez um total de 130 pontos.
Defina por ***a*** a quantidade de acertos e por ***e*** a quantidade de erros, monte o sistema de equações e pelo método da substituição responda às perguntas a seguir:

A) Quantas questões ela acertou?

B) E quantas ela errou?

ATIVIDADE 10

Resolva o sistema de equações do 1º grau pelo método da adição, e marque a opção que representa o par ordenado (x, y) que o satisfaz.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

A) (4, 0).
B) (3, 1).
C) (2, 2).
D) (2, 0).

EXERCÍCIO 2

Carolina comprou 2 cadernos e 3 lápis por R$ 20,00. Já Marcos comprou 4 cadernos e 5 lápis por R$ 38,00. Descubra o preço de um caderno e de um lápis.
Resposta: Vamos inferir um sistema de equações onde ***x*** será o preço do caderno e ***y*** será o preço do lápis.

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 20 \\ 4x + 5y & = 38 \end{cases}$$

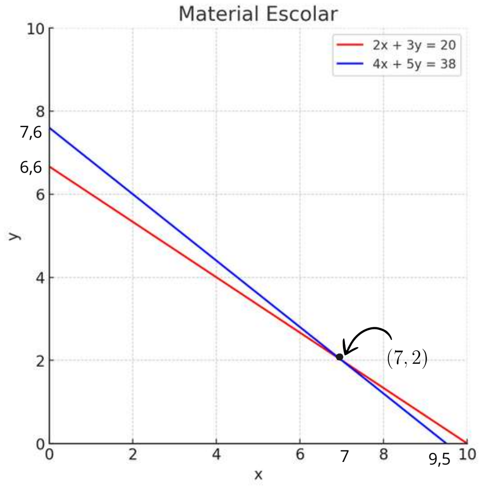
Agora, vamos encontrar dois pares ordenados como soluções em cada equação, com o objetivo de esboçar seu gráfico. Para isto, podemos atribuir os valores zeros em cada equação.

2x+3y=20	
$com\ x = 0$	$com\ y = 0$
$2 \cdot 0 + 3y = 20$	$2x + 3 \cdot 0 = 20$
$3y = 20$	$2x = 20$
$y = \frac{20}{3} \cong 6,6$	$x = \frac{20}{2}$
	$x = 10$

4x+5y=38	
$com\ x = 0$	$com\ y = 0$
$4 \cdot 0 + 5y = 38$	$4x + 5 \cdot 0 = 38$
$5y = 38$	$4x = 38$
$y = \frac{38}{5}$	$x = \frac{38}{4}$
$x = 7,6$	$x = 9,5$

Então para a equação $2x + 3y = 20$, temos os seguintes pares ordenados: (0; 6,6) e (10,0). Para a equação $4x + 5y = 38$, temos (0 ; 7,6) e (9,5 ; 0).

Por fim podemos esboçar o gráfico de cada e equação. O encontro ou intersecção das retas nos dará a solução do sistema.



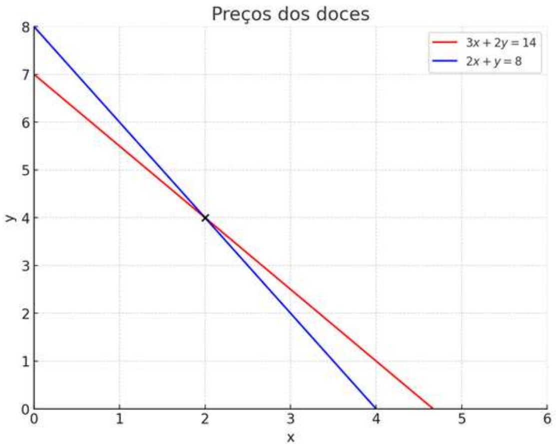
Para a equação $2x + y = 8$.

$$\begin{aligned} Com\ x &= 0 \\ 2 \cdot 0 + y &= 8 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

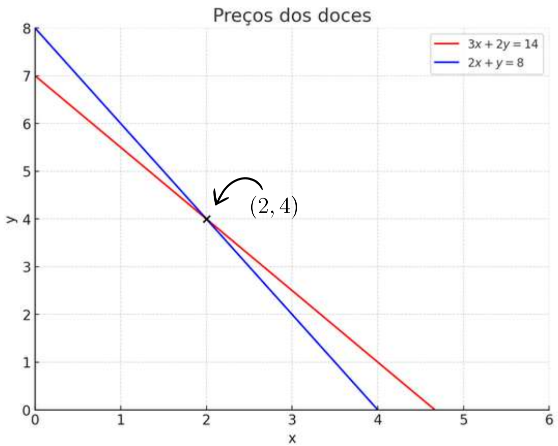
$$\begin{aligned} Com\ y &= 0 \\ 2x + 0 &= 8 \\ 2x &= 8 \\ x &= \frac{8}{2} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Para a equação $2x + y = 8$, temos os seguintes pares de solução:
$(0, 8)\ e\ (4, 0)$

2° Desenhe as duas retas no plano cartesiano.



3°) Identifique o ponto de interseção: o ponto de encontro das retas acontece onde ***x*** = 2 e ***y*** = 4. Assim temos **2** balas e **4** chocolates.



Referências

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022.

Porto de Tubarão completa 50 anos com histórias de poluição em Vitória. disponível em: https://g1.globo.com/espirito-santo/noticia/2016/04/porto-de-tubarao-completa-50-anos-com-historias-de-poluicao-em-vitoria.html

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

8º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU - MÉTODO GRÁFICO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EF08MA08 - Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	• Resolver um sistema de equações por meio do método gráfico. • Identificar a posição relativa das retas que representam no plano cartesiano um sistema de duas equações lineares a duas variáveis. • Corresponder a posição relativa das retas que representam um sistema de duas equações lineares à quantidade de soluções desse sistema. • Resolver um sistema de duas equações lineares e duas variáveis algébrica e geometricamente. • Resolver problemas que podem ser modelados por sistemas lineares do 1º grau.	**D077_M** - Corresponder um sistema de equações polinomiais de 1º grau à uma situação problema descrita textualmente. **D089_M -** Utilizar sistemas de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas. **D149_M** - Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Ana e João foram à loja de doces e fizeram compras deliciosas! Ana comprou 3 balas e 2 chocolates por R$ 14,00, enquanto João levou 2 balas e 1 chocolate por R$ 8,00. Quanto custa uma bala e um chocolate?

Resposta: Vamos criar o sistema de equações desse problema. O preço da bala será ***x*** e o preço do chocolate será ***y***. Assim:

$$\begin{cases} 3x + 2y & = 14 \\ 2x + y & = 8 \end{cases}$$

Vamos seguir os 3 passos sugeridos para encontrar a solução do sistema:

1º Determine dois pares ordenados como soluções em cada equação.

Para a equação $3x + 2y = 14$.

$$\begin{aligned} &\mathit{Com}\ x = 0 \\ 3 \cdot 0 + 2y &= 14 \\ 2y &= 14 \\ y &= \frac{14}{2} \\ y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathit{Com}\ \ y = 1 \\ 3x + 2 \cdot 1 &= 14 \\ 3x + 2 &= 14 \\ 3x + 2 - 2 &= 14 - 2 \\ &\mathit{Somamos}\ \ -2\ \mathit{aos\ dois\ membros} \\ 3x &= 12 \\ x &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Para a equação $3x + 2y = 14$, temos os seguintes pares de solução:

$(0, 7)$ e $(4, 1)$

Para a equação $2x + y = 14$

$$\begin{aligned} Com\ x &= 0 \\ 2 \cdot 0 + y &= 14 \\ y &= 14 \end{aligned}$$

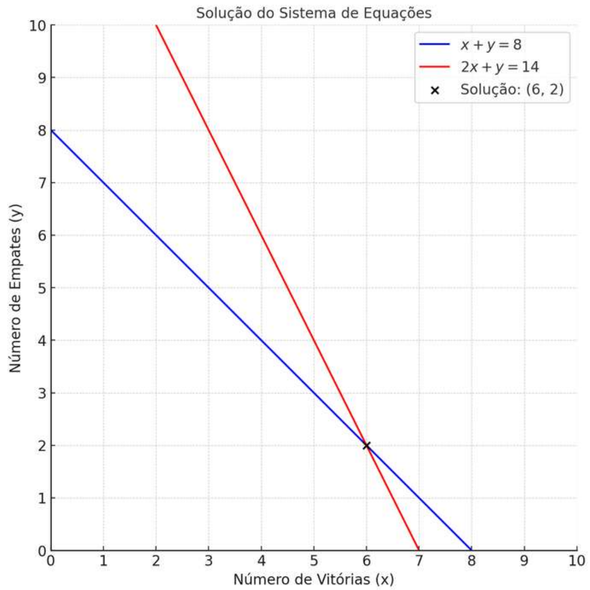
$Assim\ temos,\ \ (0, 14).$

$$\begin{aligned} Com\ y &= 0 \\ 2x + 0 &= 14 \\ 2x &= 14 \\ x &= \frac{14}{2} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$Assim\ temos,\ \ (7, 0).$

Para finalizar, traçamos uma reta passando pelos pontos $(0,8)\ \ e\ \ (8,0)$, e outra reta passando pelos pontos $(7,0)\ \ e\ \ (0,14)$

A construção do gráfico abaixo mostra que o ponto de encontro das duas retas acontece em **(6,2)**.
Portanto, essa é a solução do sistema. A equipe venceu 6 partidas e empatou 2.



Conclusão

Os sistemas de equações são uma parte fundamental da Matemática. Saber resolver esses sistemas, tanto graficamente quanto algebricamente, é essencial para a resolução de problemas do cotidiano, como visto nos exemplos. Além disso, compreender a posição das retas e como ela se relaciona com as soluções do sistema ajuda a entender melhor as situações em que podemos aplicar esses conhecimentos.

Contextualização

A POBREZA NO BRASIL

O número de pessoas em situação de extrema pobreza no Brasil, ou seja, aqueles que ganharam menos de R$ 200,00 por mês, caiu para 5,9% em 2022. Já a quantidade de pessoas que vivem na pobreza, com renda de até R$ 637,00 mensais, caiu de 36,7% em 2021 para 31,6% em 2022.

Os benefícios de programas sociais governamentais também impactam na redução, principalmente, da extrema pobreza. Se não existissem os referidos programas, os índices de pobreza e extrema pobreza seriam bem maiores.

Gráficos são ferramentas poderosas que facilitam a compreensão de padrões, tendências e a interação entre variáveis.

Veremos, neste material, como representar graficamente no plano cartesiano a resolução de problemas envolvendo sistemas de equações do 1° grau.

Conceitos e Conteúdos

MÉTODO GRÁFICO PARA RESOLVER SISTEMAS DE EQUAÇÕES

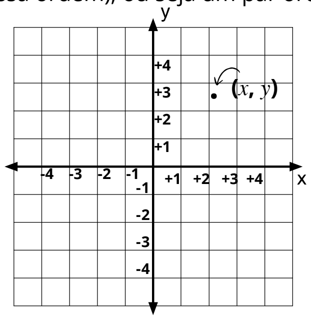
Como vimos anteriormente, um ***sistema de equações do 1°grau*** é formado por duas ou mais equações que envolvem as mesmas incógnitas ou valores desconhecidos.
O objetivo é encontrar os valores dessas incógnitas que tornam ambas as equações verdadeiras ao ***mesmo tempo***. Aprendemos a resolver um sistema algebricamente utilizando o método da adição ou o método da substituição.
Agora, vamos aprender a resolver esses sistemas geometricamente por meio do plano cartesiano.

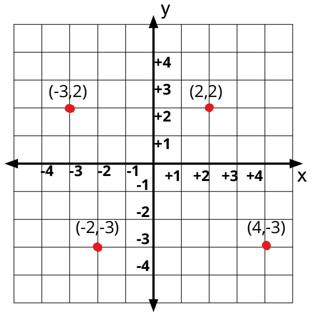
O ***método gráfico*** é uma maneira de resolver sistemas de equações lineares do 1° grau visualmente, desenhando retas no plano cartesiano. Cada equação do sistema é representada por uma reta. A solução do sistema é o ponto de interseção dessas retas, ou seja, o ponto onde as duas equações se tornam verdadeiras simultaneamente.

Você se lembra?

O ***plano cartesiano*** é um sistema de coordenadas que consiste em duas retas perpendiculares, uma horizontal e outra vertical, que se cruzam em um ponto. Esse sistema é usado para localizar pontos e realizar cálculos.

- Eixo ***x***: é a linha que vai da esquerda para a direita (horizontal).
- Eixo ***y***: é a linha que vai de baixo para cima (vertical).
- Cada ponto nesse gráfico possui um valor de referência para ***x*** e outro para ***y*** (nessa ordem), ou seja um par ordenado.





Por meio de uma simplificação concluímos que se trata da mesma equação.

$$\begin{cases} 3x - y &= 4 \\ \frac{6}{2}x - \frac{2}{2}y &= \frac{8}{2} \end{cases} \rightarrow \ dividimos\ todos\ os\ coeficientes\ por\ 2.$$

$$\begin{cases} 3x - y &= 4 \\ 3x - y &= 4 \end{cases}$$

Como se trata da mesma equação, logo temos o mesmo lugar geométrico correspondente. Portanto, as retas são coincidentes.

Resolvendo problemas com sistemas de equações do 1° grau

Muitas situações do cotidiano podem ser modeladas por sistemas lineares. Vamos ver um exemplo de como resolver um problema utilizando um sistema de equações do 1° grau.

O regulamento do torneio de voleibol de uma escola estabeleceu o seguinte critério de pontuação: cada partida que uma equipe vencer vale 2 pontos, no caso de empate 1 ponto e sofrendo uma derrota perderá 1 ponto. Uma equipe de voleibol disputou 8 partidas desse torneio sem sofrer nenhuma derrota. Entre vitórias e empates totalizou 14 pontos. Quantas partidas essa equipe venceu? E quantas ela empatou?
Para modelar esse problema, considere que ***x*** é a quantidade de vitórias, e ***y***, a quantidade de empates. Podemos expressar por um sistema de duas equações do 1° grau.

$$\begin{cases} x + y &= 8 \\ 2x + y &= 14 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **quantidade total de partidas: vitória + derrota.**

$\Rightarrow$ **quantidade total de pontos.**

Vamos encontrar a solução geométrica desse sistema. Para isso precisamos de dois pontos ou pares ordenados para traçar as respectivas retas de cada equação.

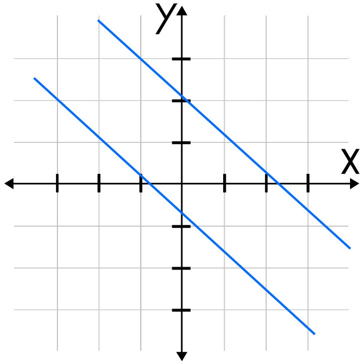
Para a equação $x + y = 8$.

$$\begin{aligned} Com\ x &= 0 \\ 0 + y &= 8 \\ y &= 8 \end{aligned}$$
$Assim\ temos,\ (0, 8).$

$$\begin{aligned} Com\ y &= 0 \\ x + 0 &= 8 \\ x &= 8 \end{aligned}$$
$Assim\ temos,\ (8, 0).$

- Nenhuma solução: quando as retas são paralelas e nunca se encontram. O sistema não possui solução.

Retas paralelas: nenhuma solução.



Exemplo: $\begin{cases} x+y &= 3 \\ x+y &= 6 \end{cases}$

Utilizando o método da substituição temos:

$$x = 3 - y$$

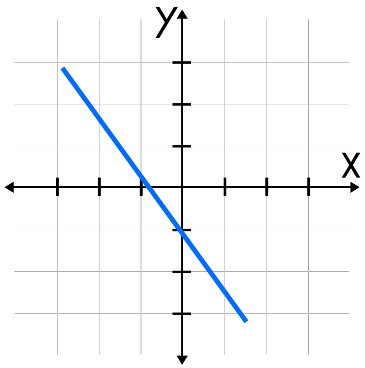
$$substituindo\ x\ na\ \ segunda\ \ equação:$$

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ 3-\cancel{y}+\cancel{y} &= 6 \\ 3 &= 6 \end{aligned}$$

Nossos cálculos chegaram a um resultado falso. Portanto, não existe solução para este sistema.

- Infinitas soluções: quando as retas são a mesma reta, ou seja, coincidem em todos os pontos. O sistema é indeterminado.

Retas coincidentes: infinitas soluções



Exemplo: $\begin{cases} 3x - y &= 4 \\ 6x - 2y &= 8 \end{cases}$

Vamos utilizar o método da adição:

$$(-2)\cdot(3x - y) = (-2)\cdot 4$$

$$multiplicamos\ \ (-2)\ \ nos\ \ dois\ \ membros$$

$$-6x + 2y = -8$$

Agora somamos com a segunda equação.

$$\begin{array}{rl} & -6x + 2y = -8 \\ + & 6x - 2y = 8 \\ \hline & 0 = 0 \end{array}$$

Não é possível determinar um único par ordenado como solução deste sistema. Observe que os valores dos coeficientes da segunda equação correspondem ao dobro dos valores dos coeficientes da primeira equação.

Passo a passo: Vamos seguir um passo a passo para encontrar a solução geométrica do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

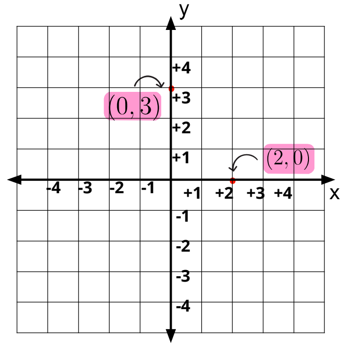
1°) Determine dois pares ordenados como soluções em cada equação. Você precisa conhecer 2 pontos para poder traçar uma reta referente à equação dada. Podemos escolher um valor para ***x*** e substituir na equação, assim acharemos o valor de ***y*** correspondente, e um par ordenado que é solução da equação. De mesma forma, podemos escolher um valor para y e substituí-lo na equação para encontrar outra solução. Observe como ficam essas escolhas para a equação $3x + 2y = 6$:

Para $x = 0$:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ 3\cdot 0 + 2y &= 6 \\ 2y &= 6 \\ y &= \tfrac{6}{2} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Para $y = 0$:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ 3x + 2\cdot 0 &= 6 \\ 3x &= 6 \\ x &= \tfrac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$



Com isso temos dois pares ordenados como soluções da equação $3x + 2y = 6$:

$(0, 3)\ \ e\ \ (2, 0)$

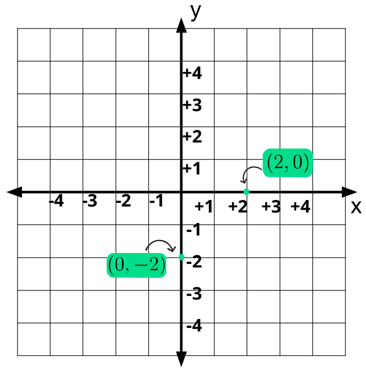
Agora faremos o mesmo com a equação $x - y = 2$.

Para $x = 0$:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x - y &= 2 \\ 0 - y &= 2 \\ -y &= 2 \\ (-1)\cdot(-y) &= 2\cdot(-1) \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Para $y = 0$:

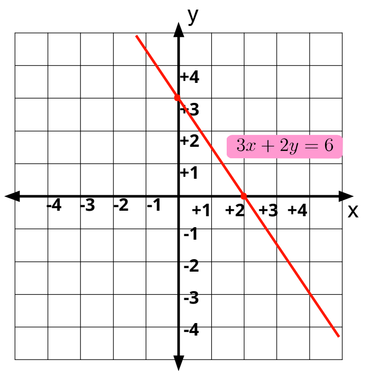
$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x - 0 &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

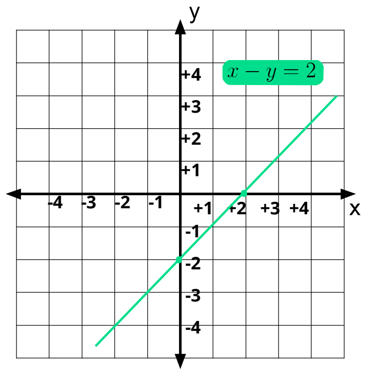


Com isso temos dois pares ordenados como soluções da equação $x - y = 2$:

$(0, -2)\ e\ (2, 0)$

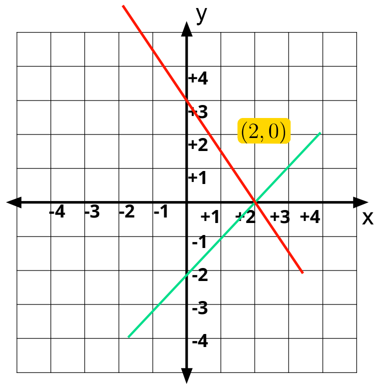
2°) Desenhe as duas retas no plano cartesiano. Já encontramos dois pontos em cada equação. Agora vamos ligar esses pontos com uma linha reta.





3°) Identifique o ponto de interseção. Esse ponto será a solução do sistema, ou seja, os valores de ***x*** e ***y*** que resolvem as duas equações.

O ponto de intersecção das retas será (2,0). Logo esta é a solução do sistema de equações.

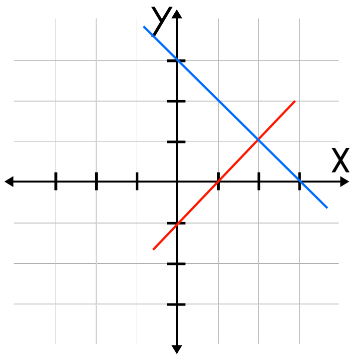


Posição Relativa das Retas e Soluções

A posição das retas no plano cartesiano nos diz quantas soluções o sistema de equações do 1º grau possui. As possibilidades são:

- Uma solução: quando as retas se interceptam em um único ponto. O sistema é determinado, e tem uma única solução.

Retas concorrentes: uma única solução.



Exemplo:

$$\begin{cases} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{cases}$$

Para a primeira equação, $x + y = 3$, vamos

determinar dois pontos com o objetivo de traçar a reta.

$$\begin{aligned} &Para\ x = 0 \\ &x + y = 3 \\ &0 + y = 3 \\ &y = 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &Para\ y = 0 \\ &x + y = 3 \\ &x + 0 = 3 \\ &x = 3 \end{aligned}$$

Com isso temos dois pares ordenados como solução da equação $x + y = 3$.

$$(0,3)\ e\ (3,0)$$

Para a segunda equação, $x - y = 1$,

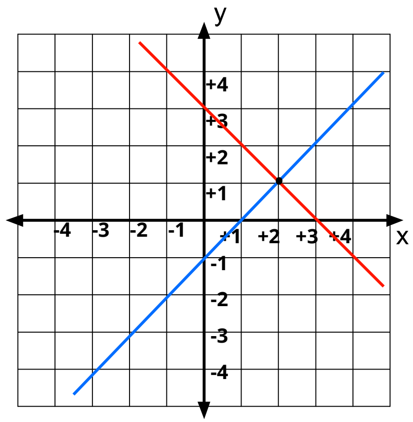
$$\begin{aligned} &Para\ \ x = 0 \\ &x - y = 1 \\ &0 - y = 1 \\ &(-1) \cdot (-y) = 1 \cdot (-1) \\ &multiplicamos\ \ (-1)\ \ nos\ \ dois\ membros \\ &y = -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &Para\ \ y = 0 \\ &x - y = 1 \\ &x - 0 = 1 \\ &x = 1 \end{aligned}$$

Com isso temos dois pares ordenados como solução da equação $x - y = 1$.

$$(0, -1)\ \ e\ \ (1, 0)$$

Agora, vamos traçar as retas de cada equação. Para isto basta que ela passe pelos respectivos pares ordenados.

Observamos que o encontro das retas acontecerá no ponto **(2,1)**, indicando assim a solução do sistema. Resolvendo o sistema de equações pelo método da adição temos:



$$\begin{aligned} x + \cancel{y} &= 3 \\ +\ \ x - \cancel{y} &= 1 \\ \hline 2x &= 4 \\ x &= \frac{4}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de ***x*** na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} &x + y = 3 \\ &2 + y = 3 \\ &-\cancel{2} + \cancel{2} + y = 3 - 2 \\ &Somamos\ -2\ nos\ dois\ membros \\ &y = 1 \end{aligned}$$

Portanto, as retas se interceptam em um único ponto e o sistema de equações do 1º grau tem uma única solução.