conexões matemáticas

QUINZENA
13
28/07 a 01/08

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITORES DO PAEBES
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.	• Representar graficamente funções do 2º grau com base em sua forma algébrica, identificando o vértice da parábola, o eixo de simetria dessa curva, bem como os pontos de interseção com os eixos x e y, quando existirem. • Identificar a forma geral de uma função quadrática ($y = ax^2 + bx + c$) e a relação dos coeficientes a, b e c com a parábola do gráfico. • Utilizar softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica para explorar graficamente funções do 2º grau, verificando como alterações nos coeficientes impactam a parábola.	***D071_M*** - Analisar crescimento/ decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos. ***D082_M* -** Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

Contextualização

Você já se perguntou como o caminho de uma bola lançada para o alto, o formato de uma rampa de skate ou até a trajetória de um foguete são descritos matematicamente? Todos esses movimentos podem ser representados por uma parábola! Essa curva, que aparece em diversos fenômenos do nosso cotidiano, é modelada pela função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, e é usada para entender desde o movimento de objetos no ar até o design de estradas e pontes.

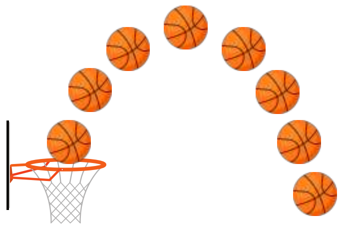


Imagem produzida no Canva


Design: Getty iImages Fonte: Canva


Design: Getty iImages Fonte: Canva

Outro exemplo interessante está nas lentes de uma câmera ou em telescópios, onde o formato parabólico é utilizado para capturar e refletir a luz. E não é só isso: até em algumas antenas parabólicas, que recebem sinais de TV ou internet, esse formato é essencial para concentrar e direcionar as ondas para um ponto específico. Assim, as parábolas estão muito mais presentes na nossa vida do que imaginamos!

Mas o que faz essa curva se apresentar de maneiras diferentes? É o impacto dos coeficientes *a*, *b* e *c*. Alterar o coeficiente *a* pode fazer a ***parábola "se abrir" mais ou menos***, enquanto o *b* desloca a curva para a direita ou para a esquerda, e o *c* ajusta a altura da parábola.

Agora, imagine que você pudesse alterar esses coeficientes com apenas um clique e ver a parábola se transformar diante dos seus olhos. Parece interessante, não é? Isso é exatamente o que você pode fazer com ***softwares de álgebra e aplicativos de geometria***. Eles permitem que você explore, de maneira interativa e em tempo real, como essas mudanças afetam a curva. Em vez de apenas desenhar gráficos em papel, você pode “brincar” com a Matemática e observar os resultados de forma instantânea.

Esses softwares não apenas tornam o aprendizado mais divertido e visual, mas também ajudam a entender como a Matemática está presente em tantas coisas ao nosso redor. Ao explorar essas ferramentas, você pode perceber como a álgebra e a geometria se conectam de maneira prática e envolvente, tornando o aprendizado mais intuitivo e prazeroso. Que tal experimentar e ver com seus próprios olhos o que acontece quando você altera os coeficientes? O mundo das parábolas está esperando para ser descoberto!

BONS ESTUDOS!

Conceitos e Conteúdos

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Para falarmos sobre o gráfico da função quadrática iremos usar o GeoGebra.
O GeoGebra é uma das ferramentas acessíveis para o ensino e a aprendizagem de Matemática, utilizado em escolas e universidades ao redor do mundo. Trata-se de um ***software gratuito*** que integra álgebra, geometria, cálculo e estatística de forma interativa.
Uma das principais características do GeoGebra é sua capacidade de trabalhar com gráficos, permitindo que os usuários criem representações visuais de funções matemáticas, como **funções lineares, quadráticas, trigonométricas**, entre outras. A plataforma possibilita a modificação de variáveis em tempo real, o que facilita a compreensão de como as mudanças nos parâmetros de uma função afetam o seu gráfico.

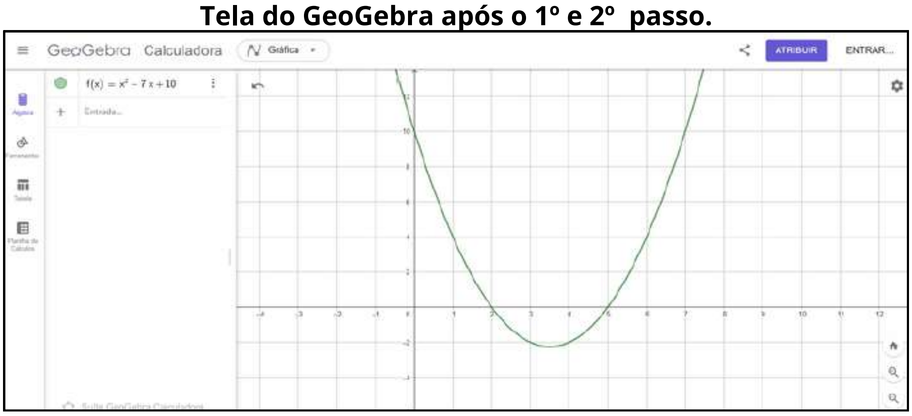
Clique no ícone para ir para a página do GeoGebra

Vamos começar o estudo do gráfico da função quadrática!
André utilizou o GeoGebra para observar como é o gráfico de uma função quadrática. Ele utilizou a lei de duas funções para representar os respectivos gráficos e obteve duas curvas, chamadas de ***parábolas***, como podemos verificar a seguir. Veja o passo a passo que ele seguiu:

a) Vamos construir inicialmente o gráfico da função quadrática ***f*** , definida por ***f(x)* = x^2 -7x +10.**

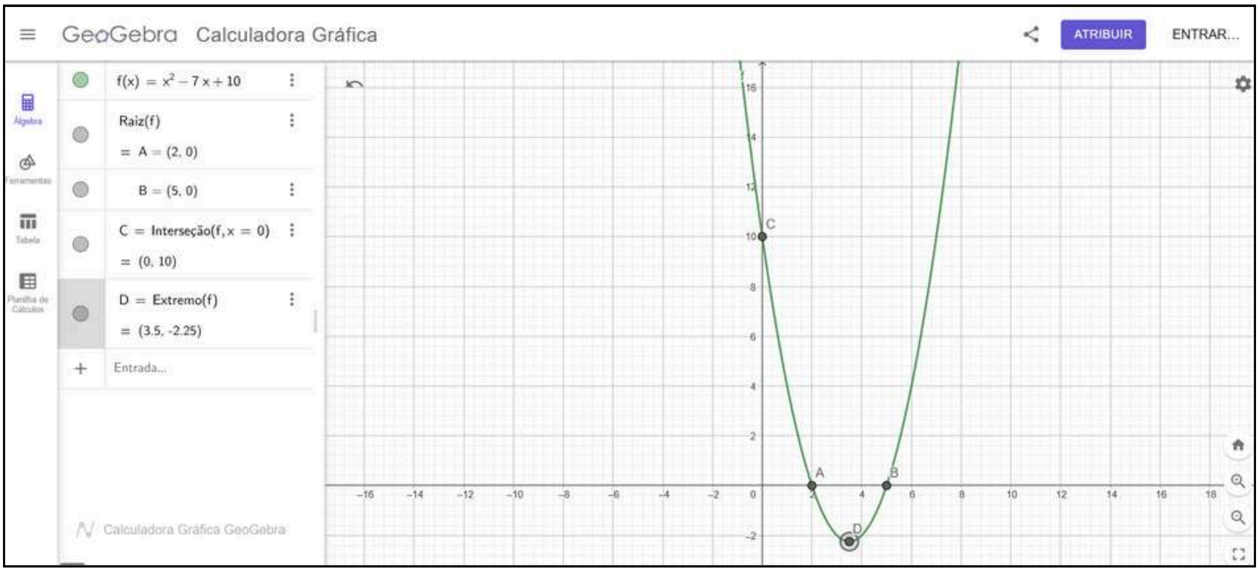
- ***1º passo:*** No campo entrada de comando digite a lei da função $f(x) = x^2 -7x +10$ e tecle “Enter”. Nota: o expoente 2 pode ser obtido digitando ^2.
- ***2º passo:*** Acesse as configurações de exibição (na parte superior direita da tela) e selecione as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal. Essa foi a imagem que André obteve.

Tela do GeoGebra após o 1º e 2º passo.



- Os coeficientes da função ***f*** são: a = 1 , b = -7 e c = 10.
- Note que neste caso a > 0, positivo.

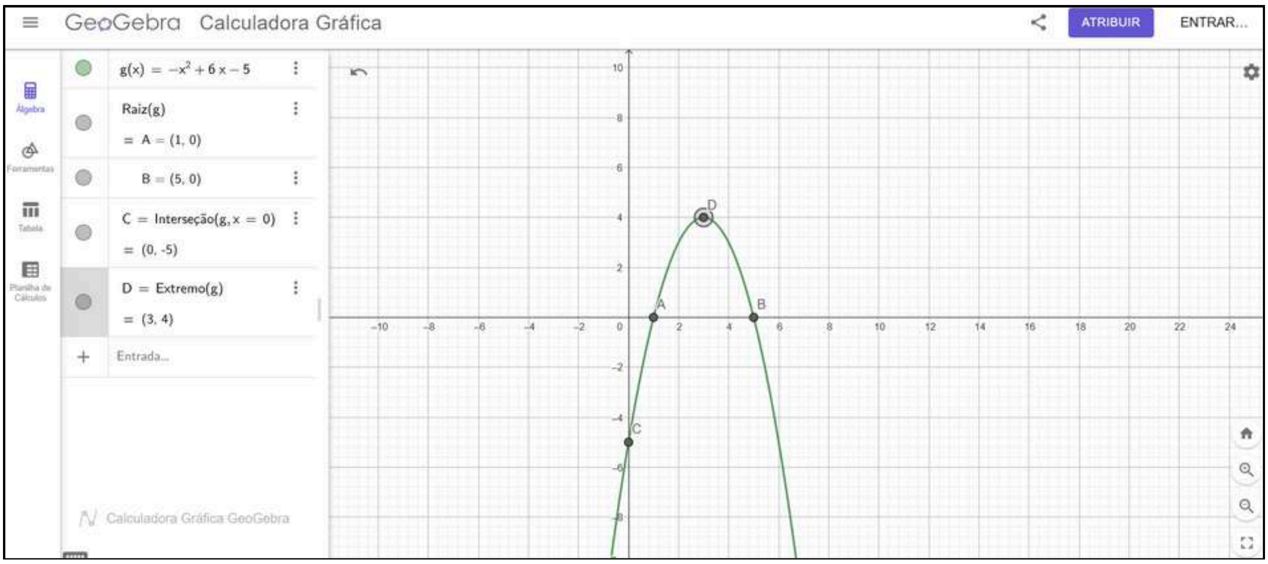
- ***3º passo:*** Agora vamos determinar os zeros da função. Para isso, digite na segunda linha do campo Entrada ***raiz (f)*** e tecle "Enter". Veja que foram criados os pontos A e B são a intersecções do gráfico com o eixo x.
- ***4º passo:*** Vamos determinar o ponto em que o gráfico intersecta (toca) o eixo das ordenadas (eixo y), para isso digite na linha do campo Entrada ***interseção(f, x=0)*** e tecle "Enter". Observe que o ponto de intersecção com eixo y, ponto ***C(0, 10)***, tem como ordenada o valor do termo independente ***c*** da equação
- ***5º passo:*** Na próxima linha do campo de Entrada, digite ***extremo (f)*** e tecle "Enter". Veja que foi criado ponto ***D(3.5 , -2.25)***, que corresponde ao ponto em que o gráfico muda de sentido. Esse ponto é chamado de vértice da parábola. Essa escrita apresentada para o ponto D é equivalente a ***D(3,5 ; -2,25)*** na notação matemática que usamos no Brasil.



Tela do GeoGebra após o 3º , 4º e 5º passo.

André seguiu os mesmos passos para fazer o gráfico da outra função:

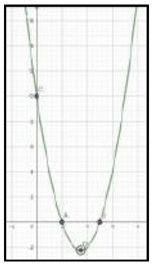
b) ***g(x)* = -x² + 6x - 5.**



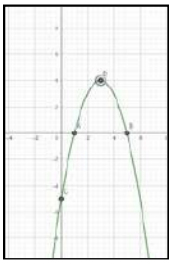
Tela do GeoGebra após seguir os passos.

CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

Como vimos acima o gráfico da função quadrática é uma ***parábola*** que pode ter sua ***concavidade voltada para cima***, se o coeficiente ***a*** for ***positivo***, ou para ***baixo***, se ***a*** for ***negativo***.



- Na função $f(x) = x^2 - 7x + 10$, $a = 1$ (positivo). Por isso a concavidade da parábola está para cima.



- Na função $g(x) = -x^2 + 6x - 5$, $a = -1$ (negativo). Por isso a concavidade da parábola está para baixo.

RELAÇÃO DOS COEFICIENTES COM A PARÁBOLA

Coeficiente a:

- O coeficiente ***a*** determina a abertura da parábola e sua orientação (para cima ou para baixo).
- Se ***a > 0***, a parábola abre para cima, e o gráfico tem um ponto de mínimo (ou vértice inferior).
- Se ***a< 0***, a parábola abre para baixo, e o gráfico tem um ponto de máximo (ou vértice superior).
- O valor de ***a*** também influencia a largura da parábola:
  - Quanto ***maior*** o valor absoluto de ***a***, mais ***estreita*** a parábola.
  - Quanto ***menor*** o valor absoluto de ***a***, mais ***larga*** a parábola.

Coeficiente b:

- O valor de ***b*** determina a localização horizontal do vértice da parábola. Mudanças no valor de ***b*** movem o vértice da parábola para a esquerda ou para a direita.

Coeficiente c:

- O coeficiente ***c*** determina a interceptação da parábola com o ***eixo y***, ou seja, o valor de y quando ***x = 0***.
- O ponto de intersecção com o ***eixo y*** é dado por ***(0,c)***. Portanto, ***c*** é o valor da função quando ***x = 0***.

Como os coeficientes afetam a parábola:

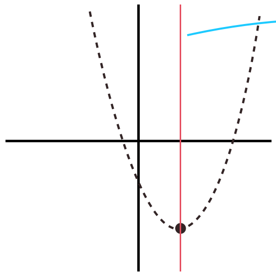
- ***a*** controla a abertura e a orientação da parábola.
- ***b*** afeta a posição horizontal do vértice.
- ***c*** determina a posição vertical do gráfico (onde a parábola intercepta o eixo y).

Esses três coeficientes juntos definem completamente a forma e a posição da parábola no plano cartesiano.

EIXO DE SIMETRIA DA PARÁBOLA

O eixo de simetria da parábola é uma reta vertical que passa pelo vértice, dividindo a parábola em duas partes simétricas. A equação do eixo de simetria é dada por:

$$x = \frac{-b}{2a}$$



A linha vermelha na figura representa o eixo de simetria da parábola.

Ou seja, o eixo de simetria é a reta vertical que passa pela coordenada **x** do vértice.

Veja um exemplo:
Encontre o eixo de simetria da parábola dada pela função quadrática:

$f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

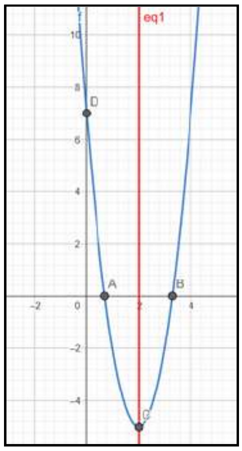
1º passo: Identificar os coeficientes da equação quadrática.
A equação é ***$f(x) = 3x^2 - 12x + 7$***, então:

a = 3 b = −12 c = 7

2º passo: Usar a fórmula do eixo de simetria. A fórmula do eixo de simetria é:

$$x = -\frac{b}{2a} \qquad x = -\frac{(-12)}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Resultado: O eixo de simetria da parábola é a reta vertical x = 2.



Representação gráfica da parábola. Reta vermelha representa o eixo de simetria.

INTERSEÇÕES COM O EIXO Y

A interseção da parábola com o ***eixo y*** ocorre quando ***x = 0***. Para encontrar o ponto de interseção com o eixo y, basta substituir x = 0 na equação original da função:

$$y = f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$$

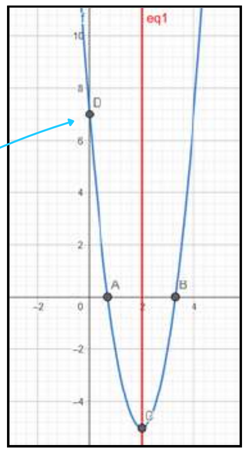
Logo, a interseção com o ***eixo y*** será no ponto ***(0,c)***.

No exemplo anterior:
Encontre a interseção da parábola com o eixo y para a função quadrática:

$f(x) = 3x^2 - 12x + 7$

Substitua x = 0 na função quadrática.
$f(0) = 3.(0)^2 - 12.\ 0 + 7 = 7$

O ponto D (0 , 7) representa a interseção da parábola com o eixo Y.



INTERSEÇÕES COM O EIXO X

As interseções com o ***eixo x*** ocorrem quando y = 0, ou seja, quando a função quadrática é igual a zero:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para encontrar as interseções com o ***eixo x***, precisamos resolver a equação quadrática resultante utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

As raízes (x' e x") da função são as abscissas dos pontos de interseção com o eixo X.

Veja o exemplo:

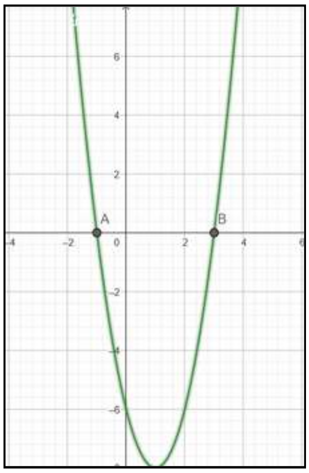
Encontre a interseção da parábola com o eixo X para a função quadrática: ***f(x) = 2x² − 4x - 6***

Substitua y = f(x) = 0 na função quadrática: ***0 = 2x² - 4x - 6***
Usando a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(-6) = 16 + 48 = 64$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2(2)} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

Portanto, as raízes são x = 3 e x = −1. As interseções com o eixo x são os pontos (3,0) e (−1,0).



Os pontos A (-1 , 0) B (3 , 0) representam a interseção da parábola com o eixo X

CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

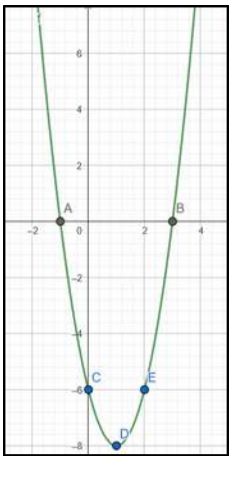
Após as explorações que você fez no GeoGebra, vamos ver como construir no plano cartesiano o gráfico de um tipo de função quadrática sem usar softwares.
Considere a função ***f*** definida pela lei :

f(x) = 2x² − 4x - 6

Observe a tabela a seguir, na qual são apresentados alguns pontos que pertencem à representação gráfica dessa função.

x	*f(x) = 2x² − 4x - 6*	*(x,y)*
-1	2 · (-1)² - 4 · (-1) - 6 = 0	(-1, 0)
0	2 · 0 - 4 · 0 - 6 = -6	(0, - 6)
1	2 · (1)² - 4 · 1 - 6 = -8	(1, -8)
2	2 · (2)² - 4 · (2) - 6 = -6	(2, -6)
3	2 · (3)² - 4 · (3) - 6 = 0	(3 , 0)

Marcamos os pontos da tabela no plano cartesiano e traçamos a curva que passa por eles. Como o coeficiente ***a*** da função é positivo a parábola tem a concaivdade voltada para cima.



Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Em que pontos a parábola que representa graficamente a função ***f(x) = x² - 4x + 3*** intersecta os eixos x e y?

SOLUÇÃO

Interseção com o eixo y:

A interseção com o eixo y ocorre quando x = 0. Substituímos x = 0 na função ***f(x)***:

$$f(0) = (0)^2 - 4 \cdot (0) + 3 = 3$$

Portanto, a interseção com o eixo y é o ponto (0,3).

Interseção com o eixo x:

A interseção com o eixo x ocorre quando f(x) = 0. Resolvemos a equação quadrática resultante da substituição de f(x) por zero: $0 = x^2 - 4x + 3$

- Podemos resolver usando Bhaskara ou fatorar a equação. Neste caso, usaremos a fatoração:

  $x^2 - 4x + 3 = (x - 3) \cdot (x - 1)$

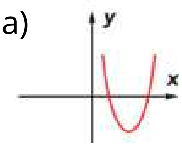
- Aplicamos a regra do produto nulo: Resolvendo, temos:

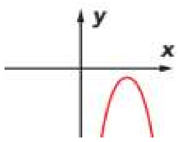
$x - 3 = 0$	$x - 1 = 0$
$x = 0 + 3$	$x = 0 + 1$
$x = 3$	$x = 1$

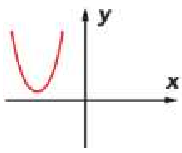
Portanto, as interseções com o eixo x são nos pontos (3,0) e (1,0), são as raízes da função.

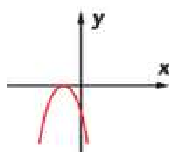
EXERCÍCIO 2

Em cada gráfico que representa uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, indique se a > 0 ou a < 0 e descubra se $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$.

a)


b)


c)


d)


SOLUÇÃO

Para todas, usaremos as definições aprendidas.

- Quando o coeficiente ***a > 0, a concavidade da parábola é voltada para cima, quando a < 0 a parábola tem a concavidade para baixo.***
- Quando $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e distintas. Ou seja, a função quadrática possui duas interseções com o eixo x. Quando $\Delta = 0$, a equação tem uma raiz real e a função uma interseção com o eixo x. Quando $\Delta < 0$, não há soluções reais e não há interseção com o eixo x.

a) $a > 0$	b) $a < 0$	c) $a > 0$	d) $a < 0$
$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$

Material Extra

LIVRO MATEMÁTICA EM CONTEXTOS -
FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 106,108 e 109
- Para fortalecer o uso da tecnologias digitais, sugerimos a atividade indicada nas páginas: 101 , 102 e 103.

LIVRO MATEMÁTICA PRISMA -
CONJUNTOS E FUNÇÕES

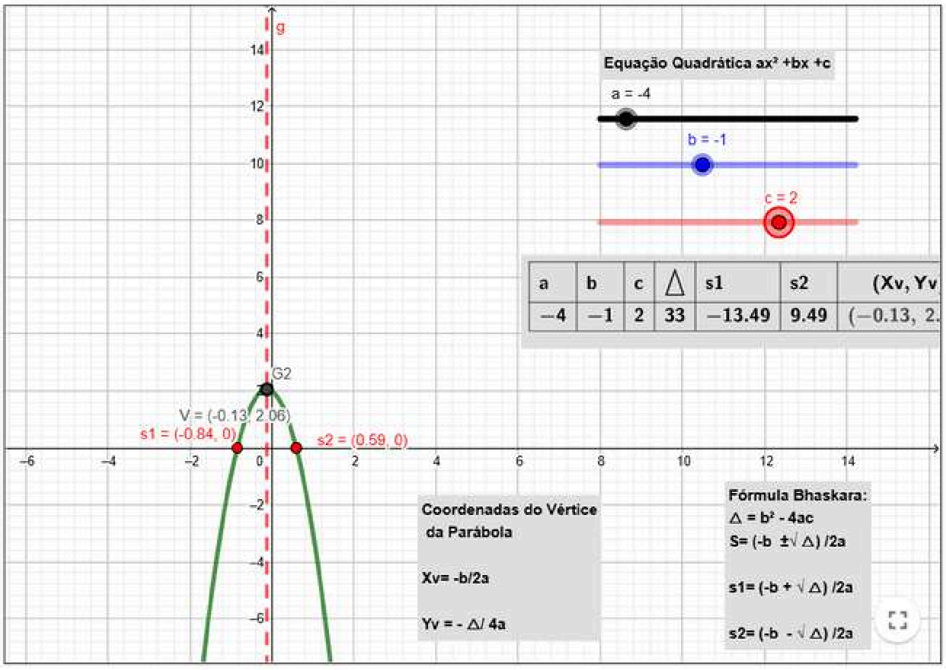
- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 118 e 119.
- Para fortalecer o uso da tecnologias digitais, sugerimos a atividade indicada nas páginas: 120 e 121.

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.

Gráfico de função quadrática (Khan Academy)

Interpretação de uma parábola no contexto (Khan Academy)

Material Extra



Professor(a), para melhor compreensão dos estudantes, recomendamos a utilização de um material do Geogebra, com objetivo de investigação e verificação de resultados. O referido material permite a visualização das alterações que o gráfico da função quadrática sofre quando há alterações nos coeficientes ***a***, ***b*** e ***c***.

Permita que os estudantes alterem cada coeficiente utilizando o controle deslizante e pergunte quais conclusões eles tiveram ao observar as alterações correspondentes.

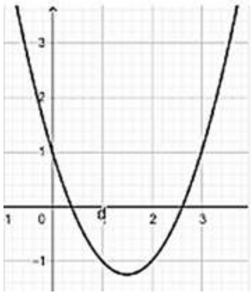
O material também pode ser usado para apoiar a aprendizagem, pois apresenta os pontos importantes em um gráfico de função quadrática (vértice e raízes).

Material do Geogebra: Estudo da função quadrática

Atividades

ATIVIDADE 1

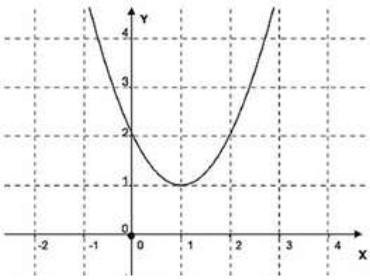
O **gráfico** a seguir é de uma **função quadrática** do tipo ***f(x) = ax² + bx + c***. Observando o gráfico, podemos afirmar que:



A) O coeficiente ***a*** que acompanha ***x²*** é um número negativo;
B) O coeficiente ***b*** que acompanha ***x*** é nulo;
C) O termo independente ***c*** é igual a ***1***;
D) A concavidade da parábola é para baixo;
E) O eixo de simetria da parábola é ***x = 1***.

ATIVIDADE 2

O **gráfico** da figura é uma **parábola** associada a uma **função quadrática**. O **vértice** (ponto mais baixo) dessa parábola é o ponto de coordenadas:



A) (0,2)
B) (1,1)
C) (2,0)
D) (2,2)
E) (1,2)

ATIVIDADE 3

O **gráfico** da **função polinomial de segundo grau** (função quadrática) **f(x) = x² + 2x + 3**:

A) Não tem interseção com o eixo x;
B) Não tem interseção com o eixo y;
C) É uma parábola de concavidade para baixo;
D) É uma parábola com eixo de simetria em x = 1;
E) É uma parábola cujo ponto mais baixo é (1,2).

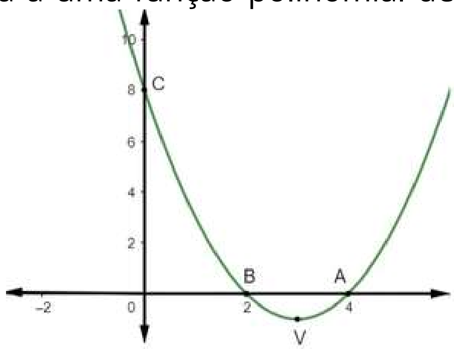
ATIVIDADE 4

A **parábola** associada à função **f(x) = 2x² + 10x + 12** intercepta o eixo x em:

A) – 2 e – 3
B) 0 apenas
C) – 2 apenas
D) – 3 apenas
E) 2 e 3

ATIVIDADE 5

A figura a seguir mostra uma **parábola** associada a uma função polinomial de segundo grau. O **eixo de simetria** dessa parábola é:



A) x = 2
B) x = 3
C) x = 4
D) y = 8
E) y = 0

ATIVIDADE 6

A **parábola** da figura da atividade 5 está associada a uma função do tipo **f(x) = ax² + bx + c** cujo discriminante **delta** é dado pela expressão $\Delta = b^2 - 4ac$

Com base nessas informações, podemos afirmar que:

A) a < 0 e Δ < 0;
B) a < 0 e Δ > 0;
C) a > 0 e Δ > 0;
D) a > 0 e Δ < 0;
E) a > 0 e Δ = 0;

ATIVIDADE 7

Para que o **gráfico** da função polinomial de segundo grau **f(x) = - x² + 4x + c** toque o eixo x em **apenas um ponto** é necessário que o valor de **c** seja igual a:

A) 4
B) 2
C) 0
D) - 2
E) - 4

ATIVIDADE 8

Num jogo de futebol, em um chute, a trajetória da bola descreve uma parábola. Supondo que sua altura *h,* em metros, *t* segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, em que instante a bola atinge a atura máxima?

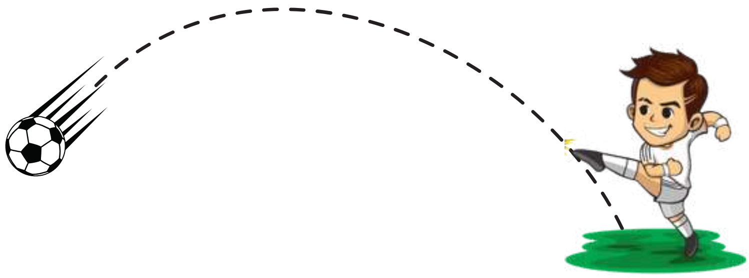


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 9

Com base na situação anterior (atividade 8), qual é a altura máxima atingida pela bola?

ATIVIDADE 10

Considere que um projétil é lançado do solo, conforme a figura abaixo, descrevendo uma trajetória em forma de parábola, representada pela função $y = -0{,}05x^2 + 1{,}5x$, sendo x e y dados em metros. Sabendo que y representa a altura desse projétil, e x o deslocamento horizontal a partir do lançamento, calcule:

a) o alcance desse lançamento;

b) a altura máxima atingida.

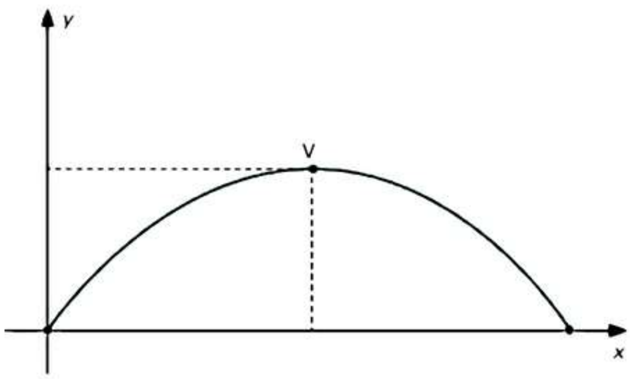


Imagem produzida no Canva

Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

KHAN ACADEMY. Gráfico de função quadrática. Khan Academy, 2025. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao-quadratica/x34e9dd8107ca5eda:grafico-de-uma-funcao-quadratica/e/grafico-de-funcao-quadratica-intro. Acesso em: 15 mar. 2025.

KHAN ACADEMY. Interpretando a parábola no contexto. Khan Academy, 2025. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao-quadratica/x34e9dd8107ca5eda:grafico-de-uma-funcao-quadratica/v/interpret-parabola-context. Acesso em: 15 mar. 2025.

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

1ª Série| Ensino Médio

MATEMÁTICA

CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT402 Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. ***EM13MAT503*** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	• Identificar o comportamento da função quadrática: intervalos de crescimento ou decrescimento e ponto de máximo ou mínimo. • Reconhecer o ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática como o vértice da parábola, compreendendo sua localização em relação ao gráfico. • Determinar a coordenada x (abscissa) do vértice de parábola que representa uma função quadrática, com ou sem uso de fórmula. • Determinar a coordenada y (ordenada) do vértice de parábola que representa uma função quadrática, com ou sem uso de fórmula.	***D071_M*** Analisar crescimento/ decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos. ***D082_M*** Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto. ***D133_M*** Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função do 2º grau.

Contextualização

Você sabia que os princípios da Matemática são essenciais para várias inovações tecnológicas que usamos no nosso dia a dia? Por exemplo, desde os algoritmos que controlam a busca de informações na internet até os sistemas de navegação por GPS, a Matemática está presente em cada aspecto da tecnologia moderna. Um dos conceitos matemáticos fundamentais que impulsiona essas inovações é a ***função quadrática***, que já estamos estudando desde o material anterior, usada para modelar e entender uma variedade de fenômenos.

Neste material, vamos estudar o comportamento da função quadrática, abordando os ***intervalos de crescimento e decrescimento e o ponto de máximo ou mínimo***, que ocorre no ***vértice da parábola***. Compreender esses conceitos é necessário para a ciência e tecnologia, pois eles são usados em diversas áreas de pesquisa e desenvolvimento, como Física, Engenharia, Economia e até mesmo em Inteligência Artificial.

Na engenharia de transporte, as trajetórias de veículos ou foguetes podem ser modeladas por funções quadráticas. A altura de um foguete lançado no ar segue uma parábola, e o ***vértice*** dessa parábola indica o ponto de maior altitude, ou seja, o ***máximo da função***. Esse princípio matemático não é apenas teórico, mas essencial para a tecnologia espacial, ajudando no planejamento de lançamentos e na trajetória de satélites.


Design: Nasa Images/ Fonte: Canva

Além disso, os ***intervalos de crescimento e decrescimento***, que representam onde a função está aumentando ou diminuindo, são fundamentais para a otimização em diversas áreas, como na construção de algoritmos computacionais e no desenvolvimento de novos produtos ou soluções tecnológicas.

Ao longo deste material, vamos explorar como os conceitos de crescimento, decrescimento e o cálculo do vértice se aplicam. A Matemática é uma ferramenta indispensável para a inovação, ajudando a criar soluções eficientes e a compreender fenômenos complexos de uma maneira mais precisa e prática. Compreender esses princípios é um passo importante para entendermos o impacto da ciência e tecnologia na nossa vida diária.

BONS ESTUDOS!

Conceitos e Conteúdos

VÉRTICE DA PARÁBOLA

Vimos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. O ***vértice*** de uma parábola é o ponto de mínimo ou máximo da função quadrática, dependendo da concavidade da parábola. Ele representa o ponto onde a parábola muda de direção, ou seja, o ***<u>ponto mais baixo</u>*** (***no caso de uma parábola com concavidade voltada para cima***) ou o ***<u>ponto mais alto</u>*** (***para uma parábola com concavidade voltada para baixo***).

A equação geral de uma função quadrática é dada por: f(x) = ax² + bx + c.

O ***vértice*** da parábola pode ser calculado pelas fórmulas:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Onde:

- x_v é a coordenada x do vértice,
- y_v é a ordenada y do vértice,
- ***a*** e ***b*** são coeficientes da função quadrática
- o vértice é o ponto (x_v , y_v)

Além disso, a concavidade da parábola depende do valor de ***a***:

- Se ***a > 0***, a parábola tem concavidade voltada para cima, e o vértice é o ponto de mínimo.
- Se ***a < 0***, a parábola tem concavidade voltada para baixo, e o vértice é o ponto de máximo.

O ***vértice*** é o ponto crucial que ajuda a entender propriedades da parábola, indicando o valor máximo ou mínimo da função quadrática.

Veja um exemplo:

Encontre o vértice da parábola representada pela função quadrática:

f(x) = 2x² − 8x + 5

- Identifique os coeficientes de f(x) = 2x² − 8x + 5
  a = 2 b = −8 c = 5

- Calcule a coordenada x_v do vértice usando a fórmula: $x_v = -\frac{b}{2a}$

$$x_v = -\frac{(-8)}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

- Calcule a coordenada y_v do vértice usando a fórmula: $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

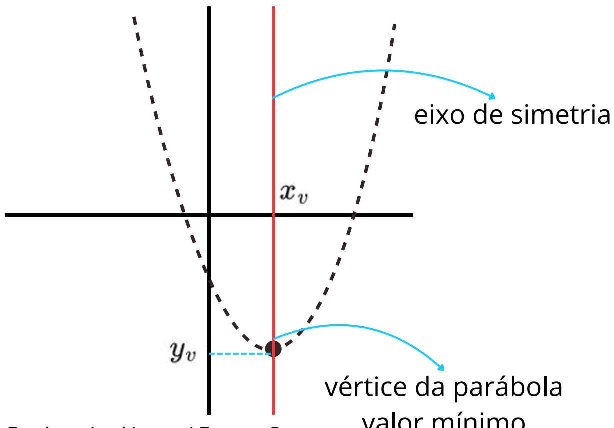
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}{4 \cdot 2} = -\frac{64 - 40}{8} = -\frac{24}{8} = -3$$

- O vértice da parábola é o ponto (2 , -3)

CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O vértice da parábola ajuda na construção dela no plano cartesiano e podemos estudar o ***crescimento e o decrescimento*** da função quadrática com base no valor de ***a*** e na abscissa x_v do vértice da parábola , bem como o valor máximo ou mínimo da função, como indicado a seguir.

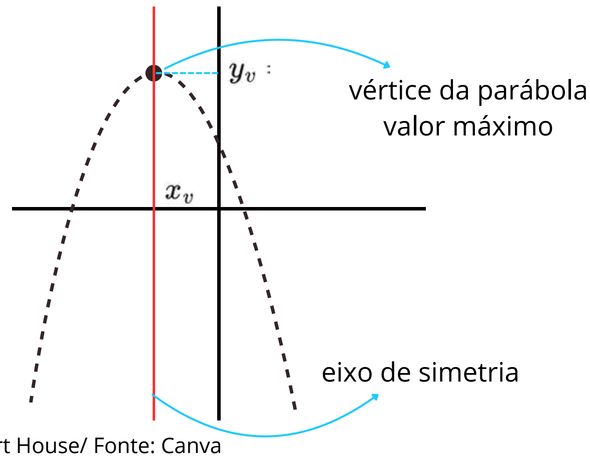
a > 0



Design: Art House/ Fonte: Canva

- A função é ***decrescente*** no intervalo] -∞ , x_v].
- A função é ***crescente*** no intervalo [x_v , +∞ [.
- O valor mínimo que esta função assume é y_v.

a < 0



Design: Art House/ Fonte: Canva

- A função é ***crescente*** no intervalo] -∞ , x_v].
- A função é ***decrescente*** no intervalo [x_v , +∞ [.
- O valor máximo que esta função assume é y_v.

Veja o exemplo:

Considere a função quadrática: $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$. Identifique os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

Primeiro calculamos o x_v da parábola, utilizando a fórmula :

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como o coeficiente ***a*= −2** é negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo, o que significa que o vértice é um ponto de máximo.

- A função é ***crescente*** no intervalo **]−∞,1]**.
- A função é ***decrescente*** no intervalo **[1,∞[**.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Uma empresa especializada em eventos esportivos lançou um novo serviço de streaming para transmissões ao vivo de partidas amadoras. O lucro, **em milhares de reais**, obtido por esse serviço em certo período pode ser modelado pela função:

$$L(t) = -4t^2 + 40t + 10$$

Essa função também determina o lucro máximo, ou seja, o ***ponto de máximo*** de ***L(t),*** onde ***t*** representa os meses.

A) Após quantos meses esse lucro máximo será atingido?

B) Qual será o lucro máximo que a empresa pode obter com esse serviço?

SOLUÇÃO

A) Determinando em quantos meses o lucro máximo é atingido:

A função quadrática dada é: $L(t) = -4t^2 + 40t + 10$

Aqui, os coeficientes são ***a = −4 , b = 40 e c = 10***. O tempo ***t*** em que o lucro é máximo pode ser determinado pela fórmula da abscissa do vértice da parábola:

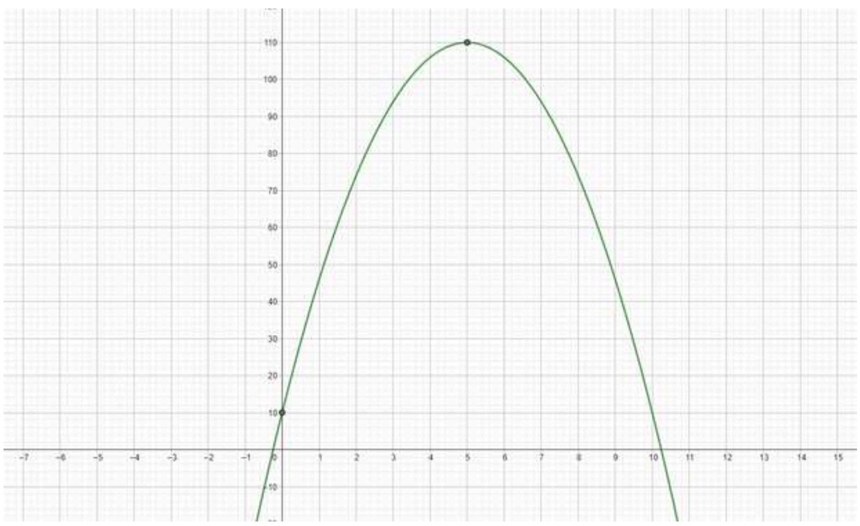
$$t_v = \frac{-b}{2a} \qquad t_v = \frac{-40}{2(-4)} = \frac{-40}{-8} = 5$$

Portanto, o lucro máximo é atingido após 5 meses do início do serviço.

B) O lucro máximo é obtido por meio da substituição do valor de t que faz parte do ponto de máximo na função quadrática. Assim:

$$\begin{aligned} L(t) &= -4t^2 + 40t + 10 \\ L(5) &= -4 \cdot 5^2 + 40 \cdot 5 + 10 \\ L(5) &= -100 + 200 + 10 \\ L(5) &= 110 \end{aligned}$$

Logo, o lucro máximo atingido será de R$ 110.000,00.



Material Extra

LIVRO MATEMÁTICA EM CONTEXTOS -
FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICAS

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 126,127,128 e 129

LIVRO MATEMÁTICA PRISMA -
CONJUNTOS E FUNÇÕES

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 123e 124. Exercícios de antigos ENEM.

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.

Gráfico de função quadrática- Valor máximo e mínimo

Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 3

Atividades

ATIVIDADE 1

Numa competição de lançamento de foguetes da Escola "Ciência em Ação", uma turma da 1ª série do Ensino Médio foi dividida em dois grupos. Cada grupo montou um foguete com materiais reciclados. Sabe-se que os foguetes seguem trajetórias distintas devido à diferença entre eles. O foguete do grupo A é lançado e sua altura (em metros) em relação ao solo no instante t (em segundos), após o lançamento, é dada pela função $h_1(t) = -5t^2 + 60t$. Já o grupo B, tem sua altura em função do tempo descrita por $h_2(t) = -4t^2 + 32t$. De acordo com os dados anteriores, responda:

A) Em qual instante cada foguete atinge sua altura máxima?
B) Qual dos dois foguetes atinge a maior altura? Justifique sua resposta.

ATIVIDADE 2

Em uma empresa, o **custo C**, em reais, para se fabricar **x unidades** de um determinado produto é dado pela expressão

$$C(x) = 2x^2 - 100x + 5000$$

A quantidade **x** desse produto que proporciona o **menor custo** possível é:

A) 25
B) 50
C) 100
D) 3 750
E) 5 000

ATIVIDADE 3

A **potência elétrica P**, em Watt, lançada num circuito por um gerador, em função da **intensidade i** da corrente elétrica, em ampere, é dada por

$$P(i) = 12i - 6i^2$$

A **potência máxima** do gerador é:

A) 1 watt
B) 2 watts
C) 6 watts
D) 12 watts
E)144 watts

ATIVIDADE 4

A **posição S**, em quilômetros, de um móvel que está em aceleração constante é dada em função do **tempo t**, em horas, por meio da relação

$$S(t) = 3t^2 - 36t + 128$$

O instante em que esse móvel para e **inverte o sentido** do movimento, ou seja, no qual o **valor de t** faz a função S assumir seu valor mínimo é:

A) 3 segundos
B) 6 segundos
C) 12 segundos
D) 20 segundos
E) 128 segundos

ATIVIDADE 5

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A **temperatura T** no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão

$$T(h) = -h^2 + 22h - 85$$

em que ***h*** representa as **horas do dia**. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: *muito baixa*, *baixa*, *média*, *alta* e *muito alta*.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o **maior número possível de bactérias**, a temperatura no interior da estufa está classificada como

A) muito baixa.
B) baixa.
C) média.
D) alta.
E) muito alta.

ATIVIDADE 6

Em Piúma, no Espírito Santo, um passeio de escuna é uma excelente forma de explorar as ilhas e praias próximas. A escuna, inclusive, é o meio mais popular para se chegar à Ilha dos Cabritos, um dos destinos mais procurados da região. O grupo responsável por organizar esses passeios observou que a receita diária de suas escunas, em reais, obtida com a venda de ingressos varia de acordo com o preço cobrado por pessoa. Essa relação é representada pela seguinte função:

$$R = -10p^2 + 600p$$

Qual é a receita máxima (em reais) que pode ser obtida por dia?

A) R$ 30,00
B) R$ 60,00
C) R$ 590,00
D) R$ 3700,00
E) R$ 9000,00

ATIVIDADE 7

O **lucro L** de uma empresa é dado pela expressão matemática **L = R – C**, onde, **C** é o **custo** da produção e **R** a **receita** do produto.

Uma fábrica de tratores produziu **n unidades** e verificou que o custo de produção e sua receita são representadas por

$$C(n) = n^2 - 1000n \qquad R(n) = 5000n - 2n^2$$

Com base nas informações acima, a **quantidade n** de peças a serem produzidas para que o **lucro seja máximo** corresponde a um número do intervalo

A) $580 < n < 720$
B) $860 < n < 940$
C) $980 < n < 1300$
D) $1350 < n < 1800$
E) $2020 < n < 2500$

ATIVIDADE 8

O custo C, em real, de um produto é dado por $C(x) = x^2 - 80x + 3\,000$, sendo x a quantidade de unidades produzidas. Qual deve ser a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo?

ATIVIDADE 9

Determine o valor de ***c*** na função real ***f(x)*** abaixo de modo que seu **valor mínimo** seja igual $-\frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$$

A) c = 3
B) c = 4
C) c = 5
D) c = 6
E) c = 7

ATIVIDADE 10

Agora é você investigando!!!

Karla é aluna da 1ª série do Ensino Médio e está estudando função quadrática. Ela chegou em casa com uma dúvida sobre uma questão que o professor Beto colocou no quadro. O pai dela prontificou-se em ajudá-la.

O enunciado do problema era: "***Dentre todos os retângulos de perímetro igual a 24 cm qual é o de maior área?***"

Qual é a resposta correta para esse problema?

Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

YOUTUBE. Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 3. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=4Ls9woncmd0. Acesso em: 15 mar. 2025.

YOUTUBE. Gráfico de uma Função Quadrática – Parte 3. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=4Ls9woncmd0. Acesso em: 15 mar. 2025.